ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXI, № 4, 1968 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. ХАЧИЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗГИБА И СДВИГА

Вывод дифференциального движения балки с учетом деформации сдвига и инерции вращения имеются во многих монографиях и статьях по теории колебаний. Если пренебречь в этих уравнениях членами, учитывающими инерцию вращения, получим следующее дифференциальное уравнение свободных колебаний с учетом деформаций изгиба и сдвига

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EJ}{kFG}\,\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{q}{g}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где y — прогиб балки; E — модуль упругости; J — момент инерции поперечного сечения; G — модуль сдвига; F — площадь поперечного сечения; q — вес единицы длины бруса; k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения; g — ускорение силы тяжести.

Решение уравнения (1) ищем в следующем виде:

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(x) f_j(t). \tag{2}$$

В силу (1) и (2) получим следующие два уравнения:

$$Y_j^{\mathrm{IV}}(x) - \alpha_j Y_j(x) + \beta_j Y_j''(x) = 0; \tag{3}$$

$$\ddot{f}_j(t) + p_j^2 f_j(t) = 0, \tag{4}$$

где

$$\alpha_j = \frac{p_j^2 q}{gEJ}; \quad \beta_j = \frac{p_j^2 q}{gkFG}. \tag{5}$$

Здесь p_j — круговая частота свободных колебаний j-й формы.

Решение уравнения (3) представим в виде

$$Y_j(x) = A_j \sin\lambda_{1j} x + B_j \cos\lambda_{1j} x + C_j \,\mathrm{sh}\,\lambda_{2j} x + D_j \,\mathrm{ch}\,\lambda_{2j} x. \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (3) убедимся, что λ_{1j} и λ_{2j} должны удовлетворять уравнениям:

$$\lambda_{1j}^4 - \lambda_{1j}^2\beta_j - \alpha_j = 0;$$
$$\lambda_{2j}^4 + \lambda_{2j}^2\beta_j - \alpha_j = 0. \tag{7}$$

Коэффициенты A_j, B_j, C_j и D_j, а также круговые частоты p_j определяются из граничных условий. При этом изгибающие моменты и поперечные силы имеют следующие значения:

$$M(x,\ t) = -EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{EJ}{kFG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$Q(x,\ t) = -EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{EJ}{kFG}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}. \tag{8}$$

На свободно опертом конце, где прогиб и изгибающий момент равны нулю, будем иметь:

$$y(x,\ t) = 0; \quad EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{EJ}{kFG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{9}$$

На закрепленном конце равны нулю прогиб и угол наклона от изгиба

$$y(x,\ t) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{EJ}{kFG}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{EJ}{(kFG)^2}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} = 0. \tag{10}$$

Второе условие для консольного стержня можно заменить следующим:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{kFG}\int_0^l \frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx. \tag{11}$$

На свободном конце стержня изгибающий момент и поперечная сила равны нулю, поэтому на основании (8) получим:

$$EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{EJ}{kFG}\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{EJ}{kFG}\frac{q}{g}\frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}. \tag{12}$$

Из уравнений (7) для круговой частоты получим

$$p_j = \frac{k_j^2}{l^2}\sqrt{\frac{1}{1+\nu^2 k_j^2}}\sqrt{\frac{gEJ}{q}} = \frac{\omega_j^2}{l^2}\sqrt{\frac{1}{1-\nu^2\omega_j^2}}\sqrt{\frac{gEJ}{q}}, \tag{13}$$

где

$$k_j = \lambda_{1j} l, \quad \omega_j = \lambda_{2j} l,$$

$$\nu^2 = \frac{EJ}{kFGl^2}, \quad \beta_j l^2 = k_j^2 - \omega_j^2. \tag{14}$$

Рассмотрим несколько частных случаев, имеющих практическое применение.

1. Стержень с шарнирно-опертыми концами

Граничным условием для этого случая на основании (9)—(12) будут

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x = 0,\ Y_j(0) = 0,\ l^2 Y_j''(0) = -(k_j^2 - \omega_j^2)\,Y_j(0) = 0; \\ &\text{при} \quad x = l,\ Y_j(l) = 0,\ l^2 Y_j''(l) = -(k_j^2 - \omega_j^2)\,Y_j(l) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Граничные условия (15) не отличаются от граничных условий задачи без учета влияния деформации сдвига. Поэтому формы колебания для шарнирно-опертого стержня будут такими же, как и при неучете деформаций сдвига, т. е.

$$Y_j(x) = A_j \sin \frac{k_j}{l} x, \tag{16}$$

где k_j — определяется из уравнения

$$\sin k_j = 0. \tag{17}$$

Однако частоты колебания будут зависеть от отношения изгибных и сдвиговых жесткостей, как это видно из (13).

2. Стержень с одним заделанным и другим свободным концом

Граничные условия соответственно будут

$$\begin{aligned}
&\text{при} \quad x = 0, \; Y_j(0) = 0, \; [1 + \nu^2 (k_j^2 - \omega_j^2)] \, Y_j'(0) + \nu^2 Y_j'''(0) = 0; \\
&\text{при} \quad x = l, \; l^2 Y_j''(l) + (k_j^2 - \omega_j^2) \, Y_j(l) = 0, \; l^2 Y_j'''(l) + (k_j^2 - \omega_j^2) \, Y_j'(l) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (6) в (18), получим систему однородных уравнений относительно коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j, из которой получим следующие выражения для уравнения частот и отношения коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j:

$$(\omega_j^4 + k_j^4) \operatorname{ch} \omega_j \cos k_j - \nu^2 k_j^3 \omega_j^3 \sin k_j \operatorname{sh} \omega_j + 2 \omega_j^2 k_j^2 = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{-k_j^3 \omega_j \operatorname{sh} \omega_j \sin k_j - k_j \omega_j^3 \operatorname{ch} \omega_j \cos k_j - k_j^3}{-k_j^3 \omega_j \operatorname{ch} \omega_j \cos k_j + k_j \omega_j^3 \operatorname{sh} \omega_j \sin k_j - \omega_j^3} C_j, \\
B_j &= -D_j = \frac{k_j \omega_j^3 \operatorname{ch} \omega_j \operatorname{sh} k_j - k_j^3 \omega_j \operatorname{sh} \omega_j \cos k_j}{-k_j^3 \omega_j \operatorname{ch} \omega_j \cos k_j + k_j \omega_j^3 \operatorname{sh} \omega_j \sin k_j - \omega_j^3} C_j.
\end{aligned} \tag{20}$$

3. Стержень с одним защемленным и другим опертым концом

Граничные условия для этого случая примут вид

$$\begin{aligned}
&\text{при} \quad x = 0, \; Y_j(0) = 0, \; [1 + \nu^2 (k_j^2 - \omega_j^2)] \, Y_j'(0) + \nu^2 Y_j'''(0) = 0; \\
&\text{при} \quad x = l, \; Y_j(l) = 0, \; l^2 Y_j''(l) + (k_j^2 - \omega_j^2) \, Y_j(l) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Удовлетворяя граничным условиям (21) для уравнения частот и коэффициентов форм колебаний, получим

$$k_j^3 \sin k_j \operatorname{ch} \omega_j - \omega_j^3 \operatorname{sh} \omega_j \cos k_j = 0; \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
A_j &= -\operatorname{th} \omega_j \operatorname{ctg} k_j \, C_j; \\
B_j &= -D_j = \operatorname{th} \omega_j \, C_j.
\end{aligned} \tag{23}$$

4. Стержень с двумя защемленными концами

Соответствующие граничные условия будут:

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad x = 0,\ Y_j(0) = 0,\ [1 + \nu^2 (k_j^2 - \omega_j^2)]\, Y_j'(0) + \nu^2 Y_j'''(0) = 0; \\
&\text{при} \quad x = l,\ Y_j(l) = 0,\ [1 + \nu^2 (k_j^2 - \omega_j^2)]\, Y_j'(l) + \nu^2 Y_j'''(l) = 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Аналогичным образом для уравнения частот и коэффициентов A_j, B_j, C_j, D_j получим

$$(k_j^6 - \omega_j^6) \sin k_j \operatorname{sh} \omega_j - 2 k_j^3 \omega_j^3 \cos k_j \operatorname{ch} \omega_j + 2\omega_j^3 k_j^3 = 0, \tag{25}$$

$$A_j = -\frac{k_j^3}{\omega_j^3} C_j,\ B_j = -D_j = -\frac{\omega_j^3 \operatorname{sh} \omega_j - k_j^3 \sin k_j}{\omega_j^3 (\cos k_j - \operatorname{ch} \omega_j)} C_j. \tag{26}$$

Если в уравнениях (19), (22) и (25) принять $\nu^2 = 0$, $k_j = \omega_j$, то получим соответствующие уравнения частот без учета влияния деформаций сдвига

$$\cos k_j \operatorname{ch} k_j + 1 = 0;\ \operatorname{tg} k_j - \operatorname{th} k_j = 0;\ \cos k_j \cdot \operatorname{ch} k_j - 1 = 0.$$

Прибавляя к частотным уравнениям (19), (22) и (25) следующее уравнение, вытекающее из (13):

$$\omega_j = \frac{k_j}{\sqrt{1 + \nu^2 k_j^2}}. \tag{27}$$

На электронной вычислительной машине были получены значения характеристических чисел k_j для различных значений ν^2, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

ν^2	$\frac{l}{h}$	Корни характеристических уравнений								
		По уравнению (19)			По уравнению (22)			По уравнению (25)		
		k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3
0		1,875	4,694	7,855	3,926	7,068	10,210	4,730	7,853	10,995
0,001	18	1,874	4,682	7,825	3,915	7,032	10,137	4,699	7,765	10,830
0,005	8	1,872	4,637	7,730	3,872	6,911	9,926	4,588	7,489	10,389
0,01	5,7	1,869	4,588	7,651	3,825	6,798	9,775	4,475	7,254	10,096
0,02	4	1,864	4,510	7,571	3,745	6,652	9,629	4,303	6,968	9,821
0,03		—	—	—	3,679	6,563	9,562	4,177	6,800	9,694
0,04	2,8	1,854	4,408	7,532	3,627	6,505	9,525	4,079	6,691	9,625
0,05		—	—	—	3,582	6,465	9,502	4,001	6,615	9,581
0,06	2,3	1,845	4,349	7,540	3,545	6,435	9,486	3,936	6,558	9,552
0,08	2	1,836	4,314	[illegible]	3,484	6,395	9,467	3,835	6,483	9,515

Коэффициент ν^2 в виде (14) удобен для сложных строительных конструкций в целом, когда известны обобщенные жесткости конструкции на изгиб EJ и на сдвиг kFG. Для однородных конструкций коэффициенту ν^2 можно придать более наглядный вид, принимая следующие условия: $J=\frac{bh^3}{12}$, $F=bh$, $G=0{,}4E$ (железобетон), $k=\frac{2}{3}$ (прямоугольник). Тогда получим

$$\nu^2=0{,}312\left(\frac{h}{l}\right)^2. \tag{28}$$

Выражение (28) позволяет определить влияние деформации сдвига в зависимости от отношения толщины конструкции h к ее высоте l, поэтому в табл. 1 приведены также соответствующие значения $\frac{l}{h}$.

Значения коэффициентов A_j/C_j, B_j/C_j и D_j/C_j, вычисленные по формулам (20), (23) и (26), приведены в табл. 2. В таблицах случай $\nu^2=0$ соответствует чисто изгибным колебаниям. Как видно из таблиц, с увеличением коэффициента ν^2 частоты и особенно формы колебания сильно изменяются по сравнению со случаем изгибных колебаний. Графические изменения частот колебаний в зависимости от коэффициента ν^2 для всех рассмотренных случаев показаны на рис. 1, где p_{0j} есть частота колебания без учета влияния сдвига. Из рис. 1 и таблицах 1 и 2 видно, что наименьшее влияние деформации сдвига оказывают на частоты и формы колебания консольного стержня, а наибольшее на частоты и формы колебания стержня с двумя защемленными концами. На рис. 2 и 3 представлены формы колебания для двух случаев закрепления концов стержня при различных значениях ν^2. Как видно из рисунка и из данных табл. 2, учет деформаций сдвига приводит к увеличению прогибов системы, причем, если это увеличение для первой формы колебания невелико, то для второй и третьей форм колебаний оно очень существенно. Таким образом, для высших форм колебаний деформации изгиба и сдвига меняются ролями, а именно деформации сдвига являются основными, а деформации изгиба — второстепенными.

Выше рассматривалось влияние деформации сдвига на частоты и формы колебания стержней. Результаты показали, что для стержней, у которых $\frac{l}{h}>6$, влияние деформации сдвига существенно только для высших форм колебаний. Возникает вопрос, а какую роль играют деформации изгиба в сооружениях при $\frac{l}{h}<1$, для которых деформации сдвига можно считать главными по сравнению с деформациями изгиба? Такие случаи часто встречаются при расчете зданий на сейсмостойкость. Для этого формулу (13), учитывая (14), представим в виде

$$p_j=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{gFGk}{q}}\sqrt{\frac{k_j^4}{k_j^2+\frac{1}{\nu^2}}}. \tag{29}$$

	ν^2	0	0,001	0,005	0,01	0,02
По формулам (2[illegible])	$A_1 C_1$	−1	−1,004	−1,025	−1,052	−1,105
	$B_1 C_1 = -D_1 C_1$	1,362	1,363	1,368	1,373	1,385
	$A_2 C_2$	−1	−1,032	−1,165	−1,331	−1,667
	$B_2 C_2 = -D_2 C_2$	0,981	0,961	0,975	0,968	0,953
	$A_3 C_3$	−1	−1,09[illegible]	−1,478	−1,996	−3,139
	$B_3 C_3 = -D_3 C_3$	1	1,001	1,002	1,005	1,014
По формулам ([illegible])	$A_1 C_1$	−1	−1,023	−1,114	−1,227	−1,449
	$B_1 C_1 = -D_1 C_1$	1	0,999	0,998	0,998	0,997
	$A_2 C_2$	−1	−1,075	−1,378	−1,768	−2,588
	$B_2 C_2 = -D_2 C_2$	1	0,999	0,999	0,999	0,999
	$A_3 C_3$	−1	−1,158	−1,823	−2,734	−4,822
	$B_3 C_3 = -D_3 C_3$	1	0,999	0,999	0,999	0,999
По формулам (2[illegible])	$A_1 C_1$	−1	−1,033	−1,161	−1,314	−1,604
	$B_1 C_1 = -D_1 C_1$	1	1,019	1,025	1,034	1,052
	$A_2 C_2$	−1	−1,091	−1,448	−1,885	−2,767
	$B_2 C_2 = -D_2 C_2$	1	0,998	0,997	0,994	0,986
	$A_3 C_3$	−1	−1,181	−1,910	−2,869	−5,013
	$B_3 C_3 = -D_3 C_3$	1	1,000	1,000	1,001	1,006

Таблица 2

0,03	0,04	0,05	0,06	0,08
—	−1,213	—	−1,321	−1,431
—	1,407	—	1,428	1,449
—	−2,369	—	−3,114	−3,927
—	0,915	—	0,871	0,820
—	−5,905	—	−9,222	−13,054
—	1,049	—	1,103	1,173
−1,667	−1,885	−2,103	−2,323	−2,767
0,996	0,994	0,992	0,990	0,986
−3,471	−4,419	−5,432	−6,506	−8,831
0,999	0,999	0,998	0,997	0,996
−7,242	−9,959	−12,948	−16,19	−23,355
0,999	0,999	0,999	0,998	0,997
−1,880	−2,149	−2,415	−2,681	−3,212
1,070	1,088	1,106	1,125	1,160
−3,688	−4,662	−5,691	6,776	−9,113
0,975	0,964	0,951	0,939	0,913
−7,465	−10,20	−13,216	−16,47	−23,669
1,014	1,024	1,035	1,047	1,075

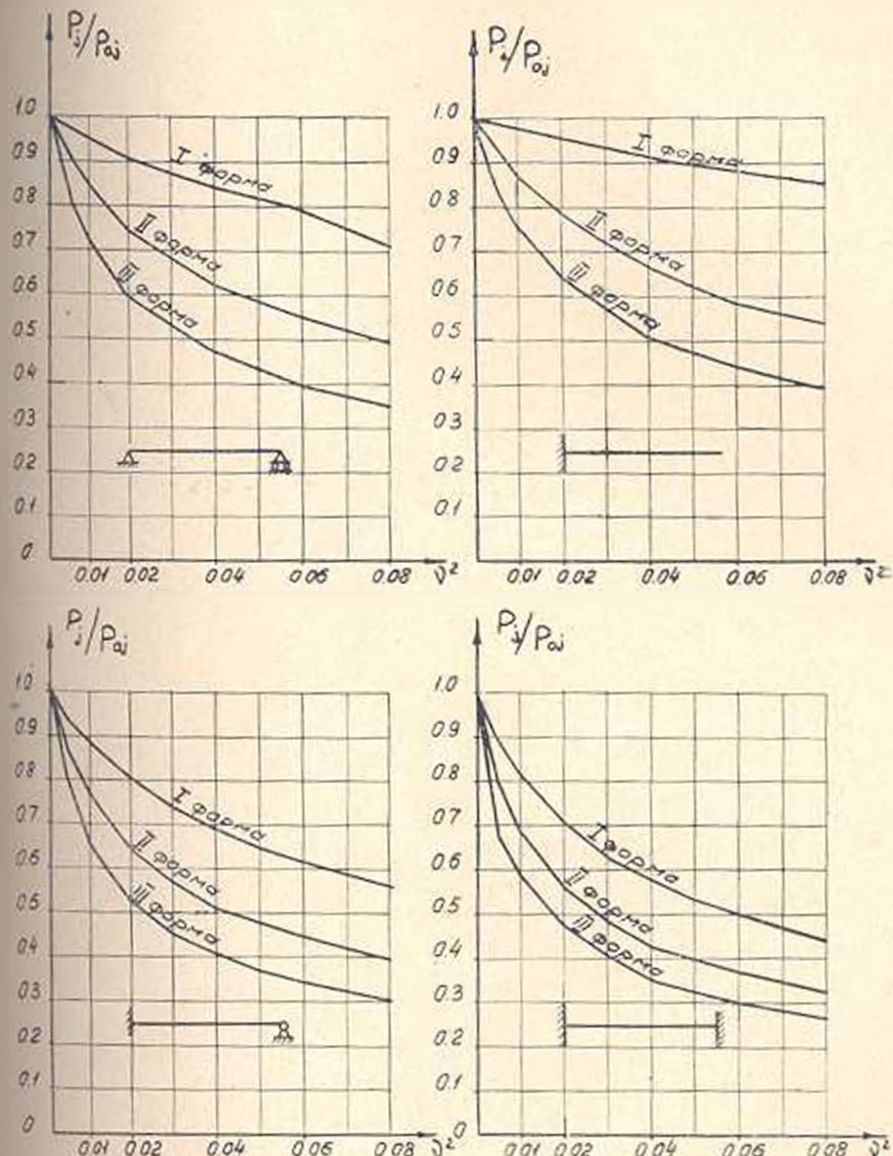

Рис. 1.

При чисто сдвиговых колебаниях уравнение свободных колебаний имеет вид [2, 3]

$$kFG\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \tag{30}$$

Частоты колебания при этом, как нетрудно убедиться, определяются формулой

$$p_i=\frac{\gamma_i}{l}\sqrt{\frac{gFGk}{q}}, \tag{31}$$

где γ_i — определяется из граничных условий. Для стержней с опертыми и защемленными концами $\mu_j = j\pi$, для консольного стержня $\mu_j = \frac{2j-1}{2}\pi$. Сопоставим значения μ_j со значением $\theta_j = \sqrt{\frac{k_j^4}{k_j^2 + \frac{1}{\nu^2}}}$.

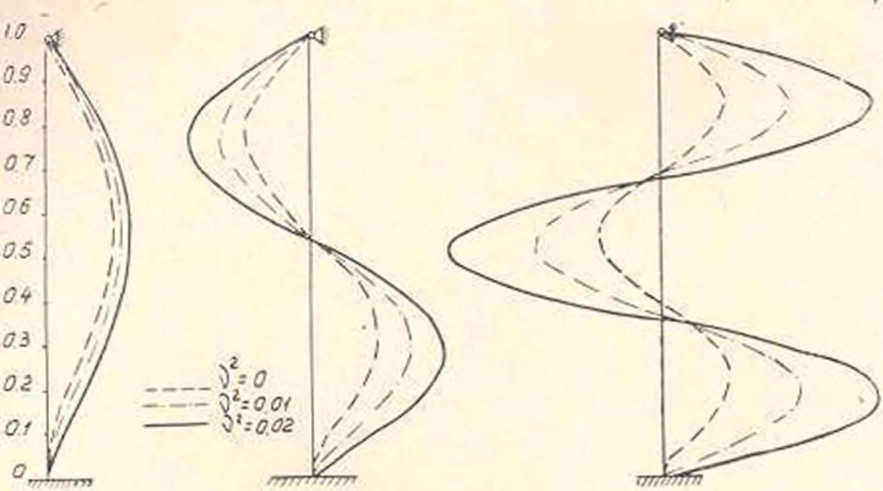

Рис. 2.

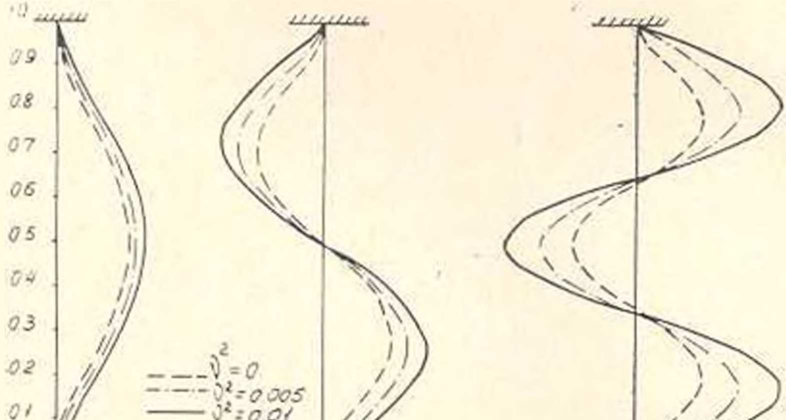

Рис. 3.

Для консольного стержня $\mu_1 = 1,57$, $\mu_2 = 4,71$, $\mu_3 = 7,85$. Тогда при

$$\nu^2 = 1,5\ (h = 2,2\,l),\quad k_1 = 1,653,\quad k_2 = 4,533,\quad k_3 = 7,801,$$
$$\theta_1 = 1,482,\quad \theta_2 = 4,481,\quad \theta_3 = 7,758;$$

при
$$\nu^2 = 2,0\ (h = 2,5\,l),\quad k_1 = 1,637,\quad k_2 = 4,586,\quad k_3 = 7,813,$$
$$\theta_1 = 1,503,\quad \theta_2 = 4,532,\quad \theta_3 = 7,781.$$

Значения k_j для θ_j определялись из характеристического уравнения (19). Приведенные данные показывают, что при $\nu^2 = 2,0$ откловение между ν_1 и δ_1 составляет не более $4{,}5\%$, а для высших форм колебания оно еще меньше.

АИСМ Поступило 31.V.1967.

Է. Ս. ԽԱՉԻՅԱՆ

ԾՌՄԱՆ ԵՎ ՍԱՀՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՏԵՂ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՁՈՂԵՐԻ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՁԵՎԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված են ծռման և սահքի դեֆորմացիաների համատեղ հաշվառման դեպքում ձողերի տատանումների հաճախությունների և տատանման ձևերի որոշման ճշգրիտ բանաձևեր։

Մի շարք պրակտիկ կիրառություն ունեցող ամրակցումների դեպքում ստացված են հաճախությունների (19), (22), (25) հավասարումների և տատանման ձևերի (6) հավասարման մեջ մտնող A_i, B_i, C_i և D_i գործակիցների (20), (23), (26) արտահայտությունները։ Ծռման և սահքի կոշտությունների հարաբերության (14) տարբեր արժեքների դեպքում էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ ստացված են հաճախությունների (29), (22), (25) հավասարումների առաջին երեք արմատների արժեքները, որոնք բերված են № 1 աղյուսակում։ A_i, B_i, C_i և D_i գործակիցների համապատասխան արժեքները բերված են № 2 աղյուսակում։ Ստացված տվյալների հիման վրա հաշվված են միայն մաքուր ծռման և սահքի հաշվառման դեպքում ստացվող հաճախությունների հարաբերությունները, որոնց կապը ծռման և սահքի կոշտությունների հարաբերությունից սխեմատիկ կերպով ցույց է տրված նկ. 1-ում։

Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս սահքի դեֆորմացիաների նշանակալից ազդեցությունը տատանման հաճախությունների վրա և առանձնապես տատանման բարձր ձևերի հաճախությունների վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко.* Колебания в инженерном деле. Физматгиз, 1959.
2. *Назаров А. Г.* Методы инженерного анализа сейсмических сил. АН АрмССР, Ереван, 1959.
3. *Корчинский И. Л.* Вибрация каменных зданий, вызываемая вибрацией грунта. Строительная промышленность, № 6, 1950.
4. *Филиппов А. П.* Колебания упругих систем. АН Украинской ССР, Киев, 1956.