ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXI, № 2, 1968 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Т. А. НАЛЧАДЖЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ МЕТОДОМ «ОПТИМУМА НОМИНАЛА»

В 1956 г. был предложен метод „активного" вмешательства в случайный процесс [1]. Решение задачи оптимизации по этому методу дает возможность выбрать оптимальную комбинацию управляющихся параметров с учетом „стоимостей" распределений этих параметров, причем значения оптимальных параметров всегда находятся в пределах технологических допусков. Идею метода, следуя [1], поясним на следующем простейшем примере. Пусть имеются две полосы *1* и *2*, расположенные на расстоянии *C* друг от друга, и на эти полосы попадают случайные величины. Принимаем, что попадание имеет нормальное распределение плотности вероятностей. Допустим также, что попадание в полосу *1* желательно, а в полосу *2* — нежелательно. Обычно система настраивается таким образом, что центр распределения совпадает с центром полосы *1* (сплошная кривая на рис. 1). Определяем смещение x_0 точки настройки системы, при котором разность вероятностей $p_1 - p_2$ попадания случайной величины в полосы *1* и *2* была бы наибольшей (обоснование выбора этого критерия см. в [1]). Если нормальный закон нормирован и все величины рассматриваются относительно среднеквадратической ошибки σ, то

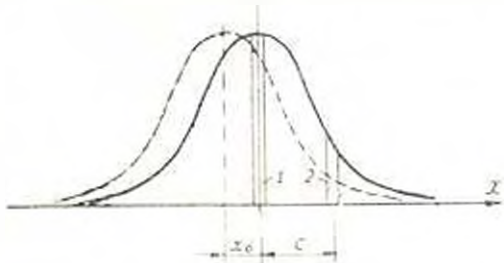

Рис. 1.

$$p_1 - p_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x_0^2}{2}} - e^{-\frac{(x_0+c)^2}{2}}\right), \tag{1}$$

где α — относительная величина ширины полос, внутри которой плотность вероятностей постоянна.

Разность $p_1 - p_2$ достигает максимума при

$$x_0 = \frac{1}{c}\ln\frac{x_0 - c}{x_0} - \frac{c}{2}. \tag{2}$$

А если учитывать также относительные „стоимости“ этих полос, принимая для полосы I стоимость за единицу, а для полосы 2 за b единиц, разность вероятностей при этом будет

$$p_1 - bp_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x_0^2}{2}} - be^{-\frac{(x_0+c)^2}{2}}\right), \tag{1'}$$

которая достигает своего максимального значения при условии

$$x_0 = \frac{1}{c}\ln\frac{x_0+c}{x_0} - \frac{c}{2} + \frac{\ln b}{c}. \tag{2'}$$

В соответствии с (2') на рис. 2 приведено семейство кривых при различных значениях b.

Если же допустить, что ширина полос α_1 и α_2 не равна между собой, а плотности вероятностей постоянны, и кроме того, стоимости полос равны соответственно b_1 и b_2, то разность вероятностей с соответствующими стоимостями

$$b_1p_1 - b_2p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\alpha_1 b_1 e^{-\frac{x_0^2}{2}} - \alpha_2 b_2 e^{-\frac{(x_0+c)^2}{2}}\right) \tag{3}$$

достигает экстремума, когда

$$x_0 = \left\{\left[\left(\frac{1}{c}\ln\frac{x_0+c}{x_0} - \frac{c}{2}\right) + \frac{1}{c}\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \frac{1}{c}\ln\frac{b_2}{b_1}\right\}. \tag{4}$$

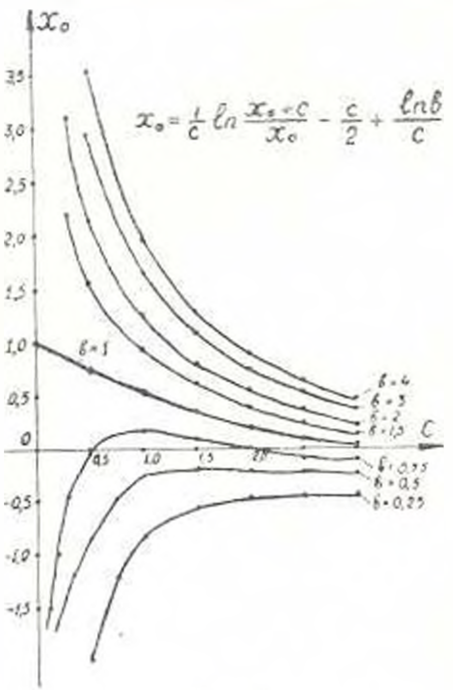

Рис. 2.

Нетрудно заметить, что полученные выше решения (2) и (2') являются частными случаями уравнения (4).

Если же ширины полос конечные и равны соответственно a_1 и a_2, внутри которых действует нормальный закон распределения, x_0 ищется из условия

$$b_1\left(e^{-\frac{(x_0-a_1)^2}{2}} - e^{-\frac{x_0^2}{2}}\right) - b_2\left(e^{-\frac{(x_0+c+a_2)^2}{2}} - e^{-\frac{(x_0+c)^2}{2}}\right) = 0. \tag{5}$$

Откуда при известных a_1, a_2, c, b_1 и b_2 можно определить значение смещения x_0. Формула (5) получена для случая двух полос. Для n полос, у которых относительная ширина равна a_i ($i=1, 2, \cdots n$), а смещение определенного края i-й полосы от условной линии отсчета (например, от края первой полосы) равно c_i и стоимость i-й полосы равна b_i. аналогичным образом можно вывести следующую формулу для определения смещения x_0

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \left(e^{-\frac{(x_0+c_i+a_i)^2}{2}} - e^{-\frac{(x_0-c_i)^2}{2}} \right) = 0. \qquad (6)$$

Выше рассматривалась одномерная задача. Рассмотрим задачу при двух случайных величинах x и y. Предположим, что имеем взаимное расположение группы объектов с соответствующими площадями $s_1, s_2, \cdots, s_n$ и двухмерный закон распределения $f(x, y)$ попадания случайных величин x и y. Принимаем, что площади объектов относительные, т. е.

$$s_i \approx \frac{\Delta x_i \cdot \Delta y_i}{\sigma_x \sigma_y}$$

и настолько малы, что внутри них плотности вероятностей можно считать постоянными. Обозначим через x_i и y_i координаты центров объектов от начала координат и через x_0 и y_0 искомые оптимальные значения смещений центра распределения в системе координат x, y. Принимаем также, что координатные оси параллельны направлениям главных осей распределения. Рассмотрим функцию двух переменных

$$\varphi(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i s_i f(x_i - x_0, y_i - y_0). \qquad (7)$$

которая достигает своего экстремального значения, когда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x_0} &= \sum_{i=1}^{n} b_i s_i \frac{\partial f(x_i - x_0, y_i - y_0)}{\partial x_0} = 0, \\ \frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x_0} &= \sum_{i=1}^{n} b_i s_i \frac{\partial f(x_i - x_0, y_i - y_0)}{\partial y_0} = 0. \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

Из этой системы уравнений определяются координаты x_0 и y_0.

При n случайных величинах можно вывести аналогичную формулу для определения оптимальных координат центра распределения $x_0, y_0, \cdots, t_0$. При этом требуется максимизация следующего выражения

$$\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i R_i f(x_i - x_0, y_i - y_0, \cdots, t_i - t_0), \qquad (9)$$

где $f(x, y, \cdots, t)$ закон распределения случайных величин в n-мерном пространстве, b_i — стоимости каждого объекта, R_i — обобщенные объемы объектов. Для определения искомых координат $x_0, y_0, \cdots t_0$ необходимо решить следующую систему, состоящую из n уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0)}{\partial x_0} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} b_i R_i f(x_i - x_0, y_i - y_0, \cdots, t_i - t_0)}{\partial x_0} = 0;\\
\frac{\partial\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0)}{\partial y_0} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} b_i R_i f(x_i - x_0, y_i - y_0, \cdots, t_i - t_0)}{\partial y_0} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0)}{\partial t_0} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} b_i R_i f(x_i - x_0, y_i - y_0, \cdots, t_i - t_0)}{\partial t_0} = 0.
\end{aligned}\right| \quad (10)$$

Условия (10) являются необходимыми, но недостаточными для существования экстремума функции $\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0)$ в точке с координатами $(x + x_0, y + y_0, \cdots, t + t_0)$, поэтому следует провести дополнительное исследование экстремума.

Если размеры „объектов" не позволяют с необходимой точностью полагать, что плотность вероятностей постоянна внутри этих областей, то задача определения оптимальных координат усложняется, так как приходится определять такие значения $x_0, y_0, \cdots, t_0$, при которых достигает своего экстремального значения функция

$$\varphi(x_0, y_0, \cdots, t_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i \iint_{R_i} \cdots \int f(x - x_0, y - y_0, \cdots, t - t_0)\, dx dy \cdots dt. \quad (11)$$

Значения $x_0, y_0, \cdots, t_0$ удается определить из следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} b_i \iint_{R_i} \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_0} f(x - x_0, y - y_0, \cdots, t - t_0)\, dx dy \cdots dt = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} b_i \iint_{R_i} \cdots \int \frac{\partial}{\partial y_0} f(x - x_0, y - y_0, \cdots, t - t_0)\, dx dy \cdots dt = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{n} b_i \iint_{R_i} \cdots \int \frac{\partial}{\partial t_0} f(x - x_0, y - y_0, \cdots, t - t_0)\, dx dy \cdots dt = 0.
\end{aligned}\right| \quad (12)$$

В системе (12) интегрирование ведется по обобщенным объемам объектов R_i.

В заключение отметим, что изложенная методика разработана в [1] как для дискретных значений стоимостей b_i, так и для непрерывных функций $b(x, y \cdots t)$.

Для сложных систем с n параметрами могут служить параметрами, например, давления в химических аппаратах, температуры, расходы сырья, составы газовых смесей, качество и количество продукций и т. п., принятая комбинация которых дает определенный экономический эффект. В большинстве случаев с достаточным основанием можно принять вероятностный характер этих параметров. Поэтому решение задач изложенным методом позволяет определить такую новую комбинацию управляемых параметров, при которой эффективность процесса достигает максимума. А если управляемые параметры являются функциями времени, то оптимальные смещения оказываются некоторыми функциями времени (оптимальными программами управления), которые определяются решением вариационных задач.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 12.V.1967.

Ի. Ա. ՆԱԼՉԱՋՅԱՆ

«ՆՈՄԻՆԱԼԻ ՕՊՏԻՄՈՒՄ» ՄԵԹՈԴՈՎ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում առաջարկվում է ավտոմատ և ոչ ավտոմատ սիստեմների աշխատանքի էֆեկտիվության բարձրացման այնպիսի մոտեցում, որն, ի տարբերություն գոյություն ունեցող այլ մեթոդների, չի պահանջում ոչ կապիտալ ներդրումներ, ոչ էլ կոնստրուկտիվ փոփոխություններ։ Մեթոդը կիրառելի է մասսայական արտադրանք թողարկող բազմապիսի տեխնոլոգիական պրոցեսների համար, որոնց մուտքային և ելքային պարամետրներն ունեն հավանականական բնութագրեր։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свечарник Д. В.* Задача об оптимуме номинала при вероятностных расчетах. Тр. института машиноведения АН СССР, вып. 10, М., 1957.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., 1961.