

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Н. А. МАТЕВОСЯН

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ТОЧНОСТИ АНАЛОГОВЫХ  
 МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье рассматривается методика расчета точности аналоговых математических модулей (АММ), описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений, основанная на выполнении расчетов с применением аналоговых моделей. В общем случае АММ может быть реализована для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$f_s(x_1, \dots, x_n, x_1', \dots, x_n', b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_r, t) = 0, \quad (1)$$

$$(s = 1, 2, \dots, n)$$

где  $x_i$  — зависимое переменное ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

$x_i'$  — производная по времени от зависимой переменной;

$b_j$  — заданное или независимое переменное ( $j = 1, 2, \dots, m$ );

$a_s$  — коэффициент ( $s = 1, 2, \dots, r$ );

$t$  — время в сек.

Построенная на основе (1) математическая модель обычно содержит помимо основных решающих блоков целый ряд дополнительных устройств, например, таких как инверторы, блоки постоянных и переменных коэффициентов, а также паразитные проводимости, емкости и индуктивности в различных частях решающих блоков. В результате, так называемые машинные уравнения математической модели содержат большее число параметров, чем заданные исходные уравнения. Поэтому при рассмотрении точности АММ в основу исследования следует брать не исходные, реализованные на модели уравнения (1), а машинные уравнения.

Систему машинных уравнений АММ, построенную для реализации (1), можно в общем случае представить так:

$$U_i = F_i(U_1, \dots, U_n, U_m, \dots, U_{m+1}, K_1, \dots, K_l, t), \quad (2)$$

где  $U_i$  — машинное переменное или выходное напряжение;

$U_i'$  — производная машинной переменной по машинному времени  $t$ ;

$U_m$  — заданное или входное напряжение;

$K_q$  — коэффициент передачи решающего блока ( $q = 1, 2, \dots, l$ ).

Для случая суммирующего и функционального блоков машинное уравнение (2) в левой части вместо производной  $U_i'$  имеет  $U_i$ . При

учете в схеме АММ паразитного параметра, машинное уравнение составляется с учетом этой погрешности в виде параметра схемы, имеющего погрешность, но с номиналом, равным нулю.

При исследовании точности АММ, в качестве „первичных ошибок“ [1, 2] удобно рассматривать не погрешности параметров отдельных деталей, таких как  $R, L, C$ , а погрешности решающих блоков в целом, т. е. ошибки их коэффициентов передач  $K_q$ .

Разлагая (2) в ряд Тейлора по степеням приращений (погрешностей)  $\Delta U_{\delta i}, \Delta K_q$ , параметров  $U_{\delta i}, K_q$ , ограничиваясь членами первого порядка малости и вычитая из полученных уравнений уравнения (2) „идеальной“ АММ, получим выражение для расчета погрешностей выходных параметров исследуемой модели, вида

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_j}{\partial U_{\delta j}} \right)_0 \Delta U_{\delta j} + \sum_{q=1}^m \left( \frac{\partial F_j}{\partial K_q} \right)_0 \Delta K_q, \quad (3)$$

Это выражение может быть получено также путем замены в выражении полного дифференциала уравнения (2) знака дифференциала  $d$  знаком приращения  $\Delta$ . При учете дрейфа нуля усилителей в (3) следует включить дополнительную сумму

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_j}{\partial U_{\delta i}} \right)_0 \Delta U_{\delta i},$$

где  $\Delta U_{\delta i}$  — напряжение дрейфа нуля. Индекс 0 при частных производных (3) означает, что частная производная берется без учета погрешности параметров математической модели.

Для расчета ошибки наиболее сложным представляется вычисление значений частных производных (3), которые в общем случае для АММ, предназначенной для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, могут быть сложными функциями от входных параметров, от параметров схемы модели и от времени. Степень влияния погрешностей отдельных решающих устройств на точность решения можно ориентировочно установить путем небольших изменений непосредственно на исследуемой АММ величин ее параметров. Такой способ исследования может быть применен при ориентировочном анализе. Однако для осуществления расчетов точности с целью получения количественных соотношений, этот способ не приемлем.

Расчет и исследование точности сложного устройства можно выполнить с помощью (3) по заранее вычисленным значениям частных производных. В работах [2—5] предложены различные аналитические и экспериментальные методы их определения. Однако осуществление подобных расчетов для АММ, реализованных для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, у которых частные производные и погрешности параметров решающих блоков представляют сложные функции от входных параметров и времени, требует также выполнения значительного объема математических операций.

При расчете частных производных, необходимых для исследова-

ния точности механических и электронных систем, в работах предложены методы построения так называемых „преобразованных механизмов“ и „преобразованных цепей“. Основываясь на этих методах и принимая во внимание особенности АММ, представляется целесообразным для выполнения расчета  $\Delta U$  использовать ту же аналоговую модель.

Представим в общем случае блок-схему модели для расчета точности АММ при наличии только одной ошибки  $\Delta U_{bf}$ . Согласно (2) имеем:

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right)_0 \Delta U_j + \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_{bf}} \right)_0 \Delta U_{bf}. \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет в общем случае систему  $n$  линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, зависящих от машинных переменных  $U_j$ . С целью повышения точности расчета, увеличим номиналы  $\Delta U_i$ ,  $\Delta U_{bf}$ ,  $\Delta K_j$ , путем умножения уравнений (4) на постоянный коэффициент  $M$ . В результате (4) перепишем в следующем виде

$$\dot{U}_i^* = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right)_0 U_j^* + \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_{bf}} \right)_0 U_{bf}^*, \quad (5)$$

где  $U_i^* = \Delta U_i \cdot M$  и  $U_{bf}^* = \Delta U_{bf} \cdot M$ .

На основе полученной системы (5) линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами составим блок-схему так называемой „преобразованной“ модели. Напряжения  $U_i$ , необходимые для реализации переменных коэффициентов формулы 5, можно получить с выходов исследуемой АММ согласно схеме, представленной на рис. 1.

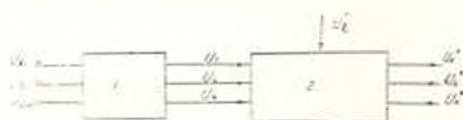


Рис. 1. Блок-схема модели при погрешности входного напряжения.

На рис. 1 блок 1 представляет схему исследуемой АММ, а блок 2—схему „преобразованной“ модели. На вход блока 2 подается напряжение  $U_{bf}^*$  от отдельного источника питания, а напряжения  $U_1^*, \dots, U_n^*$  с выходов блока 1. На выходе блока 2 получаем напряжения  $U_1^*, \dots, U_n^*$ , соответствующие погрешностям выходных напряжений  $U_1, \dots, U_n$  от ошибки в напряжении  $U_{bf}$ .

Аналогично предыдущему, систему уравнений для вычисления ошибок выходных напряжений только от ошибки  $\Delta K_j$ , согласно (2), можно представить так

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right)_0 \Delta U_j + \left( \frac{\partial F_i}{\partial K_j} \right)_0 \Delta K_j. \quad (6)$$

Частная производная  $\left(\frac{\partial F_i}{\partial K_q}\right)_0$  для случая линейного решающего блока представляет собой напряжение, полученное от поданного на соответствующий вход усилителя, имеющего коэффициент передачи  $K_q$ . Значение  $\Delta K_q$  при рассмотрении функционального блока можно представить в виде функции выходного напряжения этого блока, т. е.  $\Delta K_q = f_q(U_i)$ . Для блока произведения  $\Delta K_q$  представляет сложную функцию от двух его входных напряжений, которую приближенно, с целью удобства моделирования, можно представить в виде функции от выходного напряжения множительного блока, т. е.  $\Delta K_{q,m} = f_q(U_{i,m})$ .

Умножая систему линейных дифференциальных уравнений (6) на постоянный множитель  $M$ , аналогично предыдущему получим

$$U_i^* = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial U_i}\right)_0 U_i^* + \left(\frac{\partial F_i}{\partial K_q}\right)_0 K_q^* \quad (7)$$

На рис. 2 блок 1 соответствует схеме исследуемой АММ, а блок 2 — схеме „преобразованной“ модели, построенной на основании (7).

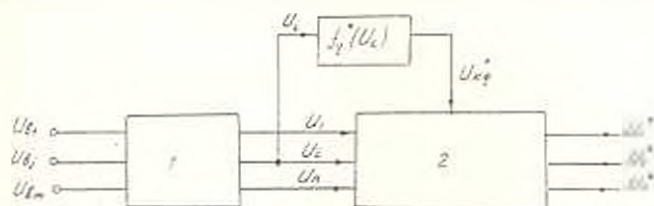


Рис. 2. Блок-схема модели при погрешности коэффициента передачи.

На вход блока 2 подается напряжение, пропорциональное  $K_q^*$ , получаемое с нелинейного блока, реализующего функцию  $U_{eq}^* = f_q^*(U_i)$ .

Исходя из рассмотренных частотных случаев, расчетную схему, соответствующую (2), при наличии погрешностей во всех входных напряжениях и в коэффициентах передач решающих блоков, можно представить в виде схемы рис. 3.

Модель, собранная согласно схеме рис. 3, позволяет вычислить погрешности выходных напряжений АММ от совместного влияния погрешностей отдельных ее устройств. С помощью рассмотренной методики можно выполнить расчет точности только для конкретной единичной АММ.

При рассмотрении серии одинаковых моделей расчет точности проводится на основании вероятностных формул, с помощью которых вычисляются математическое ожидание  $M_0 O(\Delta U_i)$ , дисперсия  $\sigma^2(\Delta U_i)$  и допуск  $\Delta(\Delta U_i)$  выходных параметров модели, по известным значениям математического ожидания, дисперсии и допуска параметров отдельных решающих блоков.

Уравнения (4) и (6) после ряда преобразований можно представить так

$$\Delta U_s = \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial U_{vj}} \right)_0 \Delta U_{vj} \quad (8)$$

и

$$\Delta U_s = \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial K_q} \right)_0 \Delta K_q, \quad (9)$$

где частные производные представляют собой коэффициенты влияния погрешностей отдельных решающих блоков на погрешность выход-

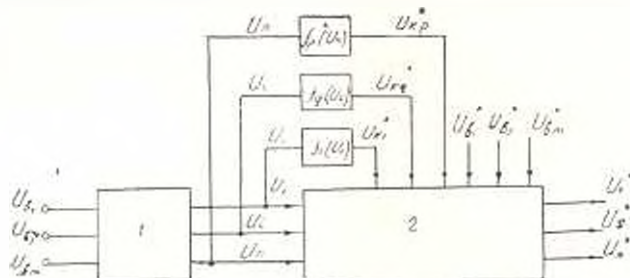


Рис. 3.

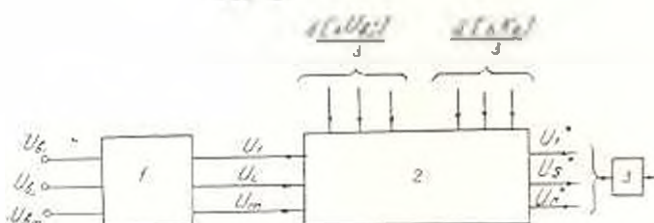


Рис. 4.

Рис. 3. Блок-схема модели при наличии погрешностей по всем узлам и входным параметрам модели.

Рис. 4. Блок-схема для расчета слагаемых уравнения допуска.

ных напряжений. Значения частных производных можно вычислить с помощью схем моделей рис. 1 и рис. 2. С этой целью значения  $U_{vj}$  и  $U_{k0}$  следует принять равными единице. Тогда напряжения  $\Delta U_s$  согласно (8) и (9) будут соответствовать величинам коэффициентов влияния.

Предполагая, что распределение случайных ошибок решающих блоков АМ подчиняется симметрично расположенной кривой закона Гаусса, формулы для определения математического ожидания, дисперсии и допуска можно представить так

$$M. O. |\Delta U_s| = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial U_{vj}} \right)_0 M. O. |\Delta U_{vj}| = \sum_{q=1}^l \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial K_q} \right)_0 M. O. |\Delta K_q|; \quad (10)$$

$$\sigma^2 |\Delta U_s| = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial U_{vj}} \right)_0^2 \sigma^2 |\Delta U_{vj}| + \sum_{q=1}^l \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial K_q} \right)_0^2 \sigma^2 |\Delta K_q|; \quad (11)$$

$$\hat{\varepsilon}[\varepsilon U_s] = \left\{ \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial U_{bj}} \right)_0 (\hat{\varepsilon} |\Delta U_{bj}|)^2 + \sum_{q=1}^l \left( \frac{\partial \Phi_s}{\partial K_q} \right)_0 (\hat{\varepsilon} |\Delta K_q|)^2 \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Уравнение (12) используется как в задачах анализа точности АММ, т. е. для вычисления величины допуска ошибки выходного напряжения по известным допускам отдельных параметров модели, так и в задачах синтеза, где по заданному значению допуска на выходное напряжение требуется установить допуски на погрешности параметров решающих блоков.

Расчеты точности с помощью формул (10)–(12) для моделей описываемых системами нелинейных уравнений представляется удобным проводить также с помощью аналоговых моделей. Так для расчета с помощью схемы рис. 3 допуска выходного напряжения, на вход преобразованной модели вместо напряжений, пропорциональных  $\Delta U_{bj}$  и  $\Delta K_q$ , следует подать поочередно на соответствующие входы напряжения, пропорциональные  $\hat{\varepsilon} |\Delta U_{bj}|$  и  $\hat{\varepsilon} |\Delta K_q|$ , тогда на выходе модели, согласно уравнениям (8) и (9), соответственно получим напряжения, пропорциональные выражениям

$$\left( \frac{d\Phi_s}{dU_{bj}} \right)_0 \cdot \hat{\varepsilon} |\Delta U_{bj}| \text{ и } \left( \frac{d\Phi_s}{dK_q} \right)_0 \cdot \hat{\varepsilon} |\Delta K_q|.$$

Подавая поочередно эти напряжения на вход квадратора, получим слагаемые подкоренного выражения (12), сумма которых будет соответствовать напряжению, пропорциональному  $\hat{\varepsilon} |\Delta U_s|$ . Блок-схема для вычисления значений слагаемых (12) представлена на рис. 4.

На рис. 4 блок 2 соответствует схеме „преобразованной“ модели, составленной для общего случая наличия всех возможных ошибок, блок 3—соответствует квадратору.

В качестве примера рассмотрим расчетную схему для исследования точности АММ синхронного генератора, описываемого системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dU_d}{dt} &= -314U_q - \frac{dU_r}{dt}; \quad \frac{dU_r}{dt} = 0,177e_r - 0,177U_r - 0,662 \frac{dU_d}{dt}; \quad (13) \\ \frac{dU_q}{dt} &= 314U_d + 314U_r; \quad C \frac{d^2\theta}{dt^2} = M_m - U_q \left[ \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) U_d + \frac{1}{x_q} U_r \right]. \end{aligned}$$

Блок-схема моделирования (13) показана на рис. 5.

Машинные уравнения схемы (рис. 5) можно представить так:

$$\begin{aligned} U_1 &= -K_{21}U_1 - K_{23}U_3 & U_9 &= -K_{10}U_1 \\ U_2 &= -K_{22}U_2 - K_{24}U_4 & U_{10} &= -K_{11}U_1 \\ U_3 &= -K_{31}U_1 - K_{32}U_2 - K_{33}U_3 - K_{34}U_4 & U_5 &= -K_{55}U_5 \\ U_4 &= -K_{41}U_1 - K_{42}U_2 - K_{43}U_3 - K_{44}U_4 & U_6 &= -K_{66}U_6 \\ U_7 &= -K_{71}U_1 - K_{72}U_2 - K_{73}U_3 - K_{74}U_4 & U_8 &= -K_{88}U_8 \\ U_9 &= -K_{99}U_9 - K_{910}U_{10} & U_{10} &= -K_{10}U_{10} \end{aligned} \quad (14)$$

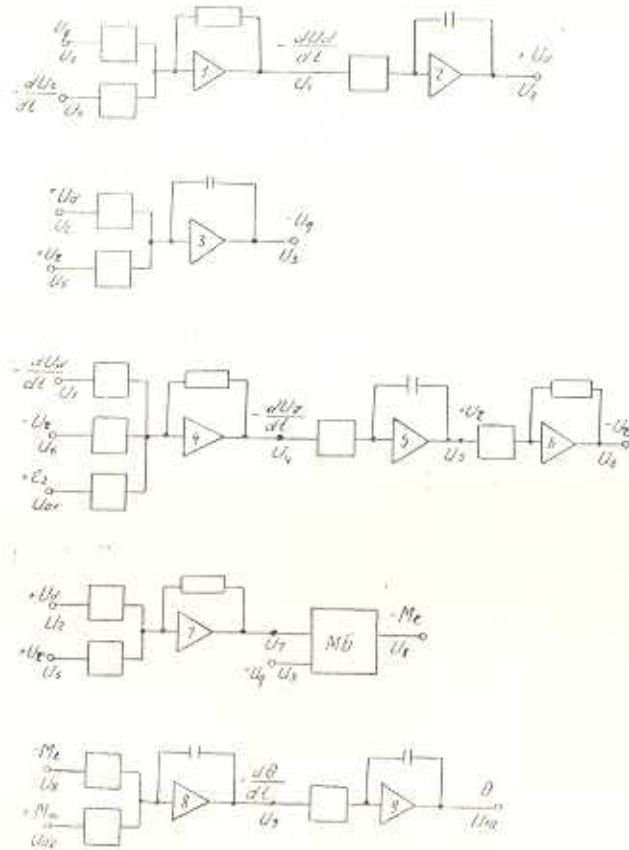


Рис. 5. Схема моделирования уравнений синхронного генератора.

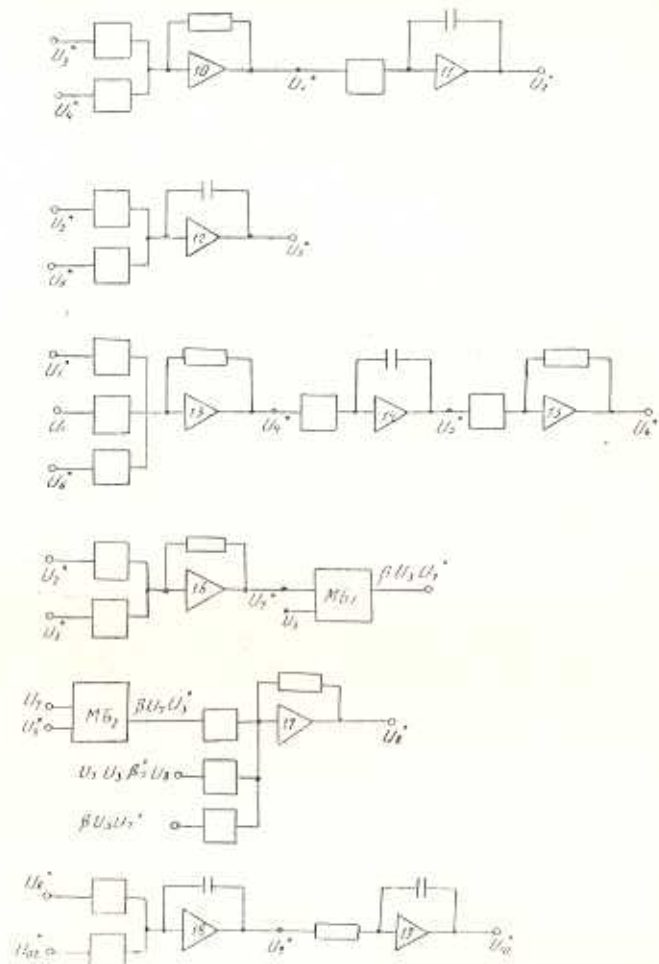


Рис. 6. Схема преобразованной модели синхронного генератора.

При наличии ошибок  $\Delta K_{11}$ ,  $\Delta \beta$  и  $\Delta U_{02}$  согласно уравнениям (3) получим:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= -K_{11} \cdot \Delta U_2 - K_{12} \Delta U_4 & \Delta U_2 &= -K_{12} \cdot \Delta U_1 \\ \Delta U_3 &= -K_{22} \cdot \Delta U_2 - K_{23} \Delta U_5 & \Delta U_5 &= -K_{23} \cdot \Delta U_3 \\ \Delta U_4 &= -K_{11} \cdot \Delta U_2 - U_1 \cdot \Delta K_{11} - K_{61} \cdot \Delta U_8 & \Delta U_8 &= -K_{61} \Delta U_4 \\ \Delta U_7 &= -K_{22} \cdot \Delta U_2 - K_{37} \Delta U_5 & \Delta U_{10} &= -K_{99} \Delta U_9 \\ \Delta U_9 &= -\Delta \beta \cdot U_1 U_2 - \beta \cdot U_1 \cdot \Delta U_2 - \beta \cdot U_2 \Delta U_1 \\ \Delta U_{10} &= -K_{99} \Delta U_9 - K_{10,8} \cdot \Delta U_{10,2}\end{aligned}$$

Эти уравнения должны быть умножены на постоянный множитель  $M$ , причем так, чтобы максимальные значения напряжений не превышали 100 в. Схема „преобразованной“ модели представлена на рис. 6. Для получения решения необходимо подать на входы „преобразованной“ модели (рис. 6) напряжения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_7$ ,  $U_8$  с выходов модели (рис. 5).

В заключение автор выражает свою благодарность Г. А. Арешяну за ценные замечания, учтенные при редактировании статьи.

АрмНИИЭ

Поступило 13.VI.1967.

Պ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՅԱՆ

## ԱՆԱԼՈՒԿԱՅԻՆ ԻՄՔԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋՐ

Ա մ փ ո փ ո մ

Հողվածում տրված է անալոգային մաթեմատիկական մոդելների վրա ոչ գծային դիֆերենցիալ համասարումների սխեմաների լուծման ժամանակ ճշտության հաշվարկի մեթոդ՝ օգտագործելով նույն անալոգային մոդելը:

Ճշտության հաշվարկը առաջարկվում է կատարել ոչ թե մասնակի ածանցյալներով, այլ փոփոխականի սխալի և ելքի սխալի ֆունկցիոնալ կախվածության անմիջական իրականացումով մոդելի վրա: Բերված է սինխրոն գեներատորի համար անալոգային մոդելի ճշտության հաշվարկի և մոդելի սխեմայի կառուցվածքի օրինակ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бруевич Н. Г. Точность механизмов. М., 1916.
2. Быковский М. А. Основы динамической точности электрических и механических цепей. Изд. АН СССР, М., 1958.
3. Melsinger H. Parameter Influence Coefficients and weighting Functions Applied to Perturbation Analysis of Dynamic Systems, III ASJCA. Kongress, September 1961, Belgrade.
4. Miller K. S., Murray F. F. Error Analysis for Differential Analyzers. WADC, Technical Report 54-250. September, 1956.
5. Тогович Р., Карлаке У. Быстродействующие аналоговые вычислительные машины. М., 1964.
6. Доступов Б. Г. Об одном методе оценки точности сложных интегрирующих устройств. Труды института машиноведения. Семинар по точности в машиностроении и приборостроении. Изд. АН СССР, вып. 9. М., 1957.