ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XX, № 5, 1967 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. ДАРБИНЯН

О КОЛЕБАНИИ СВОБОДНО СТОЯЩЕГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА ПОД СЕЙСМИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В статье исследуется простейший случай колебания абсолютно твердого, свободно стоящего параллелепипеда под действием горизонтальных и вертикальных сейсмических сил (рис. 1). Колебание такого бруса описывается следующим дифференциальным уравнением [1]:

$$A\alpha'' - [b\ddot{x}_0 + h(\ddot{y}_0 + g)]\,\alpha = h\ddot{x}_0 - b(\ddot{y}_0 + g), \tag{1}$$

где $A = \frac{2}{3}(b^2 + h^2)$.

1. *Свободные колебания.* Предположим, что брусу сообщается начальная скорость $\dot{\alpha}_0$ в момент $t=0$, после чего он начинает свободно качаться.

Дифференциальное уравнение движения (1) в рассматриваемом случае примет вид:

$$A\alpha'' - hg\alpha = -bg.$$

Это уравнение можно преобразовать так:

$$\alpha'' - \omega^2\alpha = -\omega^2\gamma, \tag{1.1}$$

$$J_0 = \frac{AQ}{2g} = \frac{Q}{4g}(b^2 + h^2) + J_c, \quad \omega^2 = \frac{Qh}{2J_0}, \quad \gamma = \frac{b}{h},$$

где J_0 — момент инерции бруса относительно точки 0; ω — частота собственных колебаний.

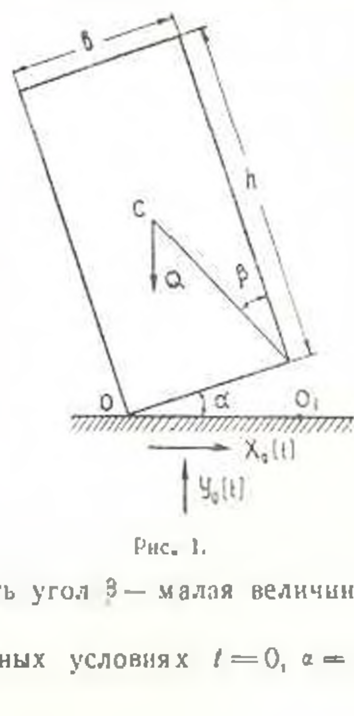

Рис. 1.

В частном случае, когда $h \gg b$, то есть угол β — малая величина, (1.1) совпадает с уравнением [2].

Решение уравнения (1.1) при начальных условиях $t=0$, $\alpha=0$, $\alpha' = \dot{\alpha}_0$ запишется следующим образом:

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t + \gamma\,(1 - \mathrm{ch}\,\omega t). \tag{1.2}$$

Момент максимального смещения t_m находим из условия $\alpha' = 0$

$$\dot{\alpha}_0 \operatorname{ch} \omega t_m - \gamma\omega \operatorname{sh} \omega t_m = 0 .$$

Откуда

$$th\,\omega t_m = \frac{\dot{\alpha}_0}{\gamma\omega} . \tag{1.3}$$

Максимальный угол поворота α_m на основании (1.2) и (1.3) будет равен

$$\alpha_m = \gamma\left(1 - \sqrt{\frac{1 - \dot{\alpha}_0^2}{\gamma^2\omega^2}}\right). \tag{1.4}$$

Если колебания совершаются без потерь, то есть имеют место упругие удары, период колебаний определится по формуле

$$T = 4t_m = \frac{4}{\omega}\ arcth \frac{\dot{\alpha}_0}{\gamma\omega} . \tag{1.5}$$

С момента $t = t_m$ брус возвращается в свое начальное положение. Тогда движение описывается уравнением (1.1) с новыми начальными условиями при $t = t_m$, $\alpha = \alpha_m$, $\alpha' = 0$. Поэтому решением (1.1) будет

$$\alpha = \gamma + (\alpha_m - \gamma) \operatorname{ch} \omega (t - t_m). \tag{1.6}$$

Момент времени t_1, когда происходит удар бруса по фундаменту, находим из (1.6) при $\alpha = 0$

$$t_1 = t_m + \frac{1}{\omega} arc\operatorname{ch} \frac{\gamma}{\gamma - \alpha_m} . \tag{1.7}$$

Скорость в этот момент на основании (1.4), (1.6) и (1.7) будет

$$\alpha'(t_1) = -\omega\sqrt{\gamma^2 - (\gamma - \alpha_m)^2} = -\dot{\alpha}_0 .$$

После совершения удара ($t > t_1$) брус будет качаться вокруг точки O_1. Движение снова опишется уравнением (1.1) и возможно колебание произойдет вокруг O или O_1. Продолжительность такого процесса зависит от коэффициента восстановления k, то есть от величины скорости после каждого удара. Для абсолютно упругих тел ($k = 1$) колебание бруса продолжается без конца, меняется лишь знак скорости после каждого удара. Для абсолютно неупругих тел ($k = 0$) в момент $t = t_1$ качание прекращается полностью. Если $0 < k < 1$, то после каждого удара скорость уменьшается в k раз и колебание постепенно затухает.

Теперь вычислим то значение начальной скорости $\dot{\alpha}_0$, при котором брус опрокинется. Опрокидывание произойдет, если диагональ бруса примет вертикальное положение, и в этот момент он имеет ничтожную угловую скорость.

Это условие будет выражаться так: $\alpha_m = \beta = tg\,\gamma$, на основании которого находим

$$\dot{\alpha}_0 = \omega\sqrt{\gamma^2 - (\gamma - tg\,\gamma)^2} .$$

Откуда в случае, когда $h \gg b$, получим ту величину $\dot\alpha_0$, при которой брус опрокидывается

$$\dot\alpha_0 = \gamma\omega$$

или

$$\dot\alpha_0 = \frac{b}{h}\sqrt{\frac{Qh}{2J_0}},$$

но

$$J_0 = \frac{Q}{4g}(h^2 + b^2) + \frac{Q}{12g}(h^2 + b^2) = \frac{Q}{3g}(h^2 + b^2).$$

Следовательно

$$\dot\alpha_0 = \frac{b}{h}\sqrt{\frac{3gh}{2(h^2 + b^2)}}. \qquad (1.8)$$

В частном случае (1.8) совпадает с решением [3].

2. *Вынужденные колебания.* Рассмотрим колебание бруса, находящегося под сейсмическими силами в двух направлениях. В рассматриваемом случае (1) можно представить в следующем виде:

$$\ddot\alpha + P^2(t)\,\alpha = R(t), \qquad (2.1)$$

где

$$P^2(t) = -\frac{h}{A}(\gamma \ddot x_0 - \ddot y_0 - g), \quad R(t) = \frac{b}{A}\left(\frac{1}{\gamma}\ddot x_0 - \ddot y_0 - g\right).$$

Если выполняется условие

$$P^2(t) \gg \left|\frac{P''(t)}{2P(t)} - \frac{3}{4}\left(\frac{P'(t)}{P(t)}\right)^2\right|,$$

то решение однородного уравнения можно представить следующим образом [4]:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\left[c_1 e^{i\varphi(t)} + c_2 e^{-i\varphi(t)}\right],$$

где

$$\varphi(t) = \int P(t)\,dt.$$

Решение, соответствующее правой части (2.1), найдем методом вариации параметров. Тогда общее решение (2.1) будет:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\left\{C_1 e^{i\varphi(t)} + C_2 e^{-i\varphi(t)} + \frac{1}{2i}\left[e^{i\varphi(t)}\int\frac{R(t)\,e^{-i\varphi(t)}\,dt}{\sqrt{P(t)}} - e^{-i\varphi(t)}\int\frac{R(t)\,e^{i\varphi(t)}\,dt}{\sqrt{P(t)}}\right]\right\}, \qquad (2.2)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{e^{i\varphi(t)}}{\sqrt{P(t)}}; \quad \alpha_2 = \frac{e^{-i\varphi(t)}}{\sqrt{P(t)}}.$$

Если $\varphi(t)$ вещественная функция, то есть $P^2(t) > 0$, то

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\left\{A_1\cos\varphi(t) + A_2\sin\varphi(t) + \int\frac{R(\tau)}{\sqrt{P(\tau)}}\sin[\varphi(t) - \varphi(\tau)]\,d\tau\right\}. \qquad (2.3)$$

Если $\varphi(t)$ мнимая функция, то есть $P^2(t) < 0$, то

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\left\{A_1 \operatorname{ch}\psi(t) + A_2 \operatorname{sh}\psi(t) - \frac{1}{i}\int \frac{R(\tau)}{\sqrt{P(\tau)}} \operatorname{sh}[\psi(t) - \psi(\tau)]\, d\tau\right\}, \tag{2.4}$$

где $\psi(t) = \frac{1}{i} P(t) > 0$ — вещественная функция.

В частном случае, если на брус действует сейсмическая сила только в горизонтальном направлении, то есть, когда $y_0(t) = 0$ и $x = \lambda \cos pt$, уравнение (2.1) примет вид

$$\alpha'' + \left(-\frac{h}{A} g + \frac{h\gamma}{A} \lambda p^2 \cos pt\right) \alpha = -\frac{b}{A}\left(\frac{\lambda p^2}{\gamma} \cos pt - g\right).$$

Введем обозначение $pt = 2z$, тогда

$$\alpha' = \frac{p}{2}\frac{d\alpha}{dz}, \quad \alpha'' = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dz^2}.$$

Уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)\alpha = \gamma a + \frac{2q}{\gamma} \cos 2z, \tag{2.5}$$

где

$$a = -\frac{hg}{A}\left(\frac{2}{p}\right)^2; \; q = -\frac{2b\lambda}{A}.$$

Дифференциальное уравнение (2.5) представляет из себя стандартный вид уравнения Матье, решению которого посвящена обширная литература, например, [5, 6]. Можно показать, что для рассматриваемой задачи удобно применить асимптотические методы. Отметим, что (2.5) аналогично уравнению колебания обернутого маятника с коэффициентами a и q. Известно, что для такого случая существует область устойчивости, которую легко определить.

Колебание рассматриваемого бруса приводит к решению уравнения типа (2.5) в случаях, когда $x_0(t) = 0$, $y_0(t) = \lambda_1 \cos \omega_1 t$ и когда $x_0(t)$ и $y_0(t)$ меняются по гармоническому закону.

Таким образом, решение поставленной задачи приводится к изучению явления колебаний обернутого маятника, для которого методы решения существуют. Однако, задачу можно решить также при произвольном законе колебания почвы с использованием реальных акселерограмм и ЭЦВМ.

3. *Случай очень малых перемещений.* Из уравнения (2.1) видно, что коэффициент α и $R(t)$ — величины одинакового порядка. Поэтому при весьма малых значениях α (2.1) с известным приближением можно записать в следующем виде:

$$\alpha'' = \frac{b}{A}\left(\frac{1}{\gamma} x_0'' - y_0'' - g\right), \tag{3.1}$$

решение которого будет

$$z(t) = \frac{b}{A}\left(\frac{1}{\gamma} x_0 - y_0 - \frac{gt^2}{2}\right) + c_1 t + c_2$$

При нулевых начальных условиях $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, решение в нулевом приближении будет

$$z_0 = \frac{b}{A}\left(\frac{1}{\gamma} x_0 - y_0 - \frac{gt^2}{2}\right). \tag{3.2}$$

Для нахождения первого приближения в силу (3.2) и (2.1) находим

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t\int_0^t F(t)\,dtdt,$$

где

$$F(t) = \frac{bh}{A}(\gamma \ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)\left(\frac{1}{\gamma} x_0 - y_0 - \frac{gt^2}{2}\right). \tag{3.3}$$

Продолжая этот процесс, можно найти решение с любой приближенностью.

Нулевое приближение и первое приближение, как видно из (3.3), отличаются на величину

$$\delta_1 = \frac{1}{A}\int_0^t\int_0^t F(t)\,dtdt = \frac{h}{A}\int_0^t\int_0^t(\gamma\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)\,z_0(t)\,dtdt.$$

Последующие приближения друг от друга будут отличаться соответственно на величину:

$$\delta_2 = \frac{h}{A}\int_0^t\int_0^t(\gamma\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)(z_1 - z_0)\,dtdt.$$

$$\delta_3 = \frac{h}{A}\int_0^t\int_0^t(\gamma\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)(z_2 - z_1)\,dtdt. \tag{3.4}$$

. . . .

Все эти выражения можно написать следующим рекуррентным соотношением:

$$\delta_1 = \frac{h}{A}\int_0^t\int_0^t(\gamma\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)\,z_0\,dtdt,$$

$$\delta_n = \frac{h}{A}\int_0^t\int_0^t(\gamma\ddot{x}_0 + \ddot{y}_0 + g)(z_{n-1} - z_{n-2})\,dtdt. \qquad (n = 2, 3, \cdots).$$

Если ε очень малая величина и, следовательно, z_0 выбрана достаточно точно, то из (3.4) видно, что последовательность $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \cdots$ должна быстро убывать.

Таким образом, для практически применимых задач можно будет ограничиться нулевым приближением

$$\alpha = \frac{b}{A}\left(\frac{1}{\gamma}x_0 - y_0 - \frac{gt^2}{2}\right). \tag{3.5}$$

Момент времени t_m, при котором имеет место максимальный поворот бруса, находим из условия $\alpha'=0$. На основании (3.5) будем иметь:

$$\frac{1}{\gamma}\dot{x}_0(t_m) - \dot{y}_0(t_m) - gt_m = 0. \tag{3.6}$$

Определяя из (3.6) t_m и подставляя в (3.5), получим величину максимального значения $\alpha = \alpha_m$:

$$\alpha_m = \frac{b}{A}\left[\frac{1}{\gamma}x_0(t_m) - y_0(t_m) - \frac{gt_m^2}{2}\right]. \tag{3.7}$$

После максимального отклонения брус начнет обратное движение и в момент t_1, когда $\alpha=0$, произойдет удар по фундаменту. Далее, в зависимости от направления $x_0(t)$ он будет колебаться либо относительно точки O, либо относительно точки O_1.

Нетрудно доказать, что если колебание совершается относительно точки O_1, то в дифференциальном уравнении движения (1.1) меняется знак перед $\ddot{x}_0(t)$. Однако, если учесть и направления функции $\ddot{x}_0(t)$, то фактически получим то же самое уравнение, решение которого находим указанным методом.

Величину t_1 находим из (3.6) при $\alpha=0$

$$\frac{1}{\gamma}x_0(t_1) - y_0(t_1) - \frac{gt_1^2}{2} = 0. \tag{3.8}$$

Скорость в этот момент равна

$$\alpha'(t_1) = \frac{b}{A}\left[\frac{1}{\gamma}\dot{x}_0(t_1) - \dot{y}_0(t_1) - gt_1\right]. \tag{3.9}$$

Преимуществом решения (3.5), помимо простоты, является то обстоятельство, что становится возможным использовать при расчете сейсмограммы землетрясений.

Известно, что расчет сооружений с помощью реальных записей землетрясений связан с определенными трудностями из-за отсутствия акселерограмм. Поэтому предлагаемый метод в некоторой мере восполняет этот пробел.

Отметим, что все полученные выше уравнения являются линейными с переменными коэффициентами. При решении таких уравнений возможно параметрическое возмущение (в частности параметрический резонанс), на которое до сих пор не обращалось должного внимания. Это обстоятельство при некоторых условиях может привести к снижению сейсмического эффекта.

В заключение автор приносит свою благодарность академику АН АрмССР А. Г. Назарову за ценные советы при выполнении этой работы.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии АН АрмССР

Поступило 29.VI.1966

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ՍԵՅՍՄԻԿ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆԸ ԵՆԹԱՐԿՎԱԾ ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ՊՐԻԶՄԱՅԱՁԵՎ ՉՈՂԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է ազատ կանգնած զուգահեռանիստի տատանումների խնդիրը՝ հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղություններով ազդող սեյսմիկ ուժերի ազդեցության դեպքում։ Չնայած, որ խնդրի նշված դրվածքի դեպքում հայտնի են դառնում մի շարք նոր երևույթներ, որոնք շատ կարևոր են սեյսմակայունության հաշվարկ կատարելիս, մինչև այժմ դրանք չեն ուսումնասիրված։ Հայտնի է (1), որ այդ խնդրի լուծումը բերվում է փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ (1) հավասարման ինտեգրմանը։

Դիտվում են ազատ ու հարկադրական տատանումները և ցույց է տրված, որ արտաքին ուժերի հարմոնիկ օրենքով փոփոխման դեպքում (1) հավասարումը բերվում է Մատյեի հայտնի հավասարմանը։ Դիտվում է նաև շատ փոքր տեղափոխումների դեպքը, որի ժամանակ լուծումը հասցվում է մինչև վերջ։

Կատարված ուսումնասիրությունները ցույց են տալիս, որ կառուցվածքների սեյսմակայունության հաշվարկ կատարելիս, երկու ուղղությամբ ազդող ուժերի հաշվի առնելը կարող է ի հայտ բերել ամրության նոր, թաքնված պաշարներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дарбинян С. С.* Об одном дополнительном резерве сопротивляемости сооружений сейсмическим воздействиям. ДАН АрмССР, т. XLII, № 4, 1966.
2. *Housner G. W.* The Behavior of inverted Pendulum Structures During Earthquaker. Bulletin of the Seismological Society of America, February, 1963.
3. *Голицын Б. Б.* Избранные труды, т. II, М., 1960.
4. *Каннингхэм В.* Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.
5. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье, М., 1953.
6. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. М., 1957.