

Л. О. АВЕТИСЯН

ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛИНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

При комплексной автоматизации сложных энергосистем зачастую приходится передавать энергию либо информации на большие расстояния. Каналами передачи могут служить как электрические, так и пневматические длинные линии, переходные процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. В связи со сложностью расчета синтеза упомянутых систем автоматического регулирования часто прибегают к математическому моделированию, причем общеизвестно, что аналогом длинных линий являются цепочные схемы с сосредоточенными параметрами.

Систему уравнений, описывающих цепочные схемы, можно получить, пользуясь либо классическими методами четырехполюсников, либо методом дискретного преобразования Лапласа. Для решения цепных схем с большим успехом может быть применен также метод производящих функций.

Автором статьи предлагается метод предельного перехода от уравнений цепочных схем к уравнениям, описывающим переходные процессы в линиях с распределенными параметрами.

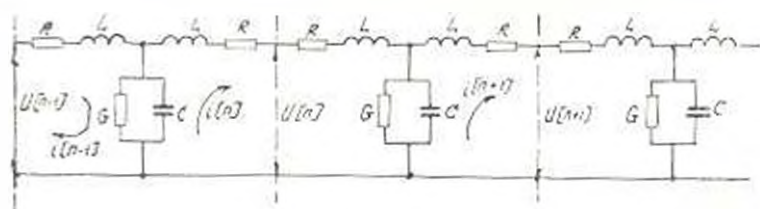


Рис. 1.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих цепочную схему, представленную на рис. 1]:

$$\begin{aligned} U[n] &= U[0] \cdot \operatorname{ch} x \cdot n - i[0] \cdot Z \cdot \operatorname{sh} x \cdot n, \\ i[n] &= i[0] \cdot \operatorname{ch} x \cdot n - U[0] \cdot I \cdot \operatorname{sh} x \cdot n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x = \operatorname{arch} [1 + (PL + R)(G + PC)]$,

$$Z = \frac{1}{I} = \frac{1}{G + PC} \cdot \sqrt{(R + PL)(G + PC) \pm (R + PL)(G - PC)}.$$

Обозначим параметры погонного метра длинной линии соответственно L_0 , R_0 , C_0 , G_0 , а длину линии — l . Приведенную цепочную схему можно рассмотреть как грубый аналог длинной линии и тогда можем записать следующие соотношения:

$$R = \frac{R_0 l}{2n}, \quad L = \frac{L_0 l}{2n}, \quad G = \frac{G_0 l}{n}, \quad C = \frac{C_0 l}{n},$$

где n — количество цепочек, соответствующих длине l .

Чем большее количество цепочек соответствует данной длине l , тем с меньшей ошибкой можно отождествлять процессы, происходящие в цепочных схемах с процессами в длинных линиях. При $n \rightarrow \infty$ цепочная схема окончательно переходит в длинную линию.

Найдем предел аргумента xn при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xn = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arch} \left| 1 + \frac{l^2}{2n^2} (PL_0 + R_0)(G_0 + PC_0) \right|.$$

Обозначим

$$(PL_0 + R_0)(PC_0 + G_0) = v^2$$

и после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} xn &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left| 1 + \frac{l^2 v^2}{2n^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{l^2 v^2}{2n^2}\right)^2 - 1} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{lv}{n} \right) = lv. \end{aligned} \quad (2)$$

Определим теперь значения Z и I , входящих в уравнение (1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R_0 + PL_0}{G_0 + PC_0} \left| 2 + (R_0 + PL_0)(G_0 + PC_0) \right|} = \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{R_0 + PL_0}{G_0 + PC_0} \left| 2 + \frac{l^2}{2n^2} (R_0 + PL_0)(G_0 + PC_0) \right|} = \\ &= \sqrt{\frac{R_0 + PL_0}{G_0 + PC_0}} = Z_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя полученные результаты (2) и (3) в систему уравнений (1), окончательно получим систему уравнений, описывающих процессы в линиях с распределенными параметрами:

$$\begin{aligned} U(l) &= U(0) \cdot \operatorname{ch} lv - i(0) \cdot Z_0 \operatorname{sh} lv, \\ i(l) &= i(0) \operatorname{ch} lv - U(0) \cdot I_0 \operatorname{sh} lv. \end{aligned} \quad (4)$$

Указанный предельный переход от уравнений цепочных схем к уравнениям длинных линий легко осуществить на любой стадии расчета переходных процессов.

Покажем, например, что, исходя из окончательного уравнения переходного режима в короткозамкнутой цепочной схеме без потерь, при включении постоянного э.д.с.

$$U_s = E \left[1 - \frac{S}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k \cdot S \cdot \pi}{n} \cdot \cos \frac{2 \sin \frac{k \cdot \pi}{2n}}{\sqrt{2LC}} \cdot t \right] \quad (5)$$

(здесь в отличие от [2] вместо $\sqrt{LC}$ взято $\sqrt{2LC}$, чтобы придерживаться рис. 1), нетрудно получить уравнение, описывающее переходный процесс в короткозамкнутой линии без потерь с распределенными параметрами при включении постоянного э.д.с. При этом представляется возможность миновать громоздкие преобразования, которыми обычно оперируют для вывода уравнения переходного процесса в длинных линиях. В предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{n} = \frac{x}{l}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{k \cdot S \cdot \pi}{n} = \sin \frac{k \cdot x \cdot \pi}{l},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2n}}{n \cdot \sin \frac{k\pi}{2n}} = \frac{2}{k\pi}.$$

Пользуясь соотношением $2L = \frac{L_0 l}{n}$ и $C = \frac{C_0 l}{n}$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \sin \frac{k \cdot \pi}{2n}}{\sqrt{2LC}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \cdot \sin \frac{k \cdot \pi}{2n}}{l \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{k\pi}{l \sqrt{L_0 C_0}}.$$

Подставляя найденные выражения в (5), окончательно получим искомое уравнение:

$$U(x) = E \left[1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k \cdot x \cdot \pi}{l} \cdot \cos \frac{k \pi}{l \sqrt{L_0 C_0}} \cdot t}{k} \right]. \quad (6)$$

Систему уравнений (4) и (6) обычно получают решением системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Дифференциальными уравнениями с частными производными описывается также процесс передачи сигналов через длинные пневматические трубопроводы, процесс передачи тепла через однородную стенку, диффузионные процессы, а также другие явления, являющиеся предметом изучения математической физики.

Очевидно, что в каждом из этих случаев представляется возможность применения рассмотренного выше предельного перехода.

Ереванский филиал
ВНИИТЕХМАШ

Поступило 24.XII.1966.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыкин Я. Э. Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях. Госэнергоиздат, 1951.
2. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. ГИИЭЛ, 1955.