

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕНСМОЛОГИЯ

А. Г. БАГЛОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА ФРОНТЕ ВБЛИЗИ
 ТОЧКИ ПОВОРОТА

Рассматривается задача о поведении решения вблизи фронта ударной волны малой интенсивности около каустики. В качестве примера можно указать задачу о движении давления по границе жидкой полуплоскости. Когда скорость фронта по поверхности $R'(t)$ становится равной скорости звука в невозмущенной жидкости a_0 , фронт перпендикулярен поверхности и точка пересечения фронта с поверхностью находится на каустике. Если теперь обратить движение и рассмотреть движение фронта вдоль луча в верхнюю полуплоскость, получится задача о прохождении фронта через каустическую. Используем тот факт, что образование огибающей лучей, на которой интенсивность бесконечна, связано с линеаризацией задачи. Поэтому необходим учет нелинейных эффектов. Обозначим через p_1 малую величину, связанную с приложенным давлением.

Уравнение потенциала $\varphi(x, y, t)$ возмущенного движения запишется с точностью до малых второго порядка

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где скорость звука в первом порядке находится с помощью уравнения состояния

$$P = B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - B \quad (2)$$

в виде

$$a = a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P}{Bn} \right). \quad (3)$$

Здесь P — давление, ρ — плотность, B , n — постоянные.

Введем вместо декартовых координат x , y координаты τ , θ :

$$\begin{aligned} x - x_0(\theta) &= a_0(t - t_0 - \tau) \cos \theta; \\ y - y_0(\theta) &= a_0(t - t_0 - \tau) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

где угол θ задает положение луча, $\tau = 0$ есть уравнение фронта линейной задачи в момент t , $x = x_0(\theta)$, $y = y_0(\theta)$ — уравнения каустики фронта, $t_0(\theta)$ — момент прихода фронта вдоль луча на каустическую, причем

$$x_0(t) = a_0 t_0(t) \cos \theta, y_0(t) = a_0 t_0(t) \sin \theta. \quad (5)$$

В координатах (4) уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \frac{n+1}{2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{1}{t_1} - \frac{a_0^2}{2t_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (6)$$

$$t_1 = t - t_0(t).$$

Введем систему координат, движущуюся с фронтом по каустике, причем направим ось Ox' по касательной с указанной кривой. Тогда

$$x' = -(x - x_0) \cos \theta_1 - (y - y_0) \sin \theta_1, y' = (x - x_0) \sin \theta_1 - (y - y_0) \cos \theta_1, \quad (7)$$

причем $\theta = \theta_1$ характеризует начало O' новой системы координат, при этом $t_0(\theta_1) = t$.

Если подставить (4) в (7) и оставить малые до четвертого порядка по $\theta' = \theta - \theta_1$, получим вблизи точки подхода фронта к каустике

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{3} t_0' \theta'^3 + \tau; \\ y' &= -\frac{1}{2} t_0' \theta'^2 \end{aligned} \quad (8)$$

и уравнение фронта при $\tau = 0$

$$x' = -\frac{1}{3} \frac{(1 + 2y')^2}{1 - t_0'^2} t_0'.$$

В случае задачи о приложенном давлении легко видеть, что при $R'(t) = \text{const}$ каустика отсутствует, поскольку $t_0' = \infty$.

Для давления вдоль фронта по лучевой теории [1]:

$$P = \frac{C(\theta_1)}{V t_1}$$

или, поскольку $t_1 = t - t_0'$, вблизи точки $t_0 = t$ имеем

$$P = \frac{C(\theta_1)}{V - t_0' \theta'}, \quad (9)$$

где C — постоянная вдоль луча, имеющая первый порядок по P_1 .

Из сравнения линейного и нелинейного наклонов фронта получают оценки для порядка

$$\tau = P_1^{\frac{6}{5}}, b' = P_1^{\frac{2}{5}}, y' = P_1^{\frac{4}{5}}, x' = P_1^{\frac{6}{5}}, P = P_1^{\frac{4}{5}}, \varphi = P_1^2.$$

Кроме того, легко найти

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\sin \theta_1}{t_0' \theta'}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\cos \theta_1}{t_0' \theta'}.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\sin^2 \theta_1}{t_0^2 \dot{\theta}_1^3} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\cos^2 \theta_1}{t_0^2 \dot{\theta}_1^3}.$$

Тогда с помощью (6) и (8) можно найти в порядке $\frac{2}{5}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} \left(\frac{n+1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial y'} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t} = 0. \quad (10)$$

Для получения решения в конечном виде запишем уравнение (4) в переменных τ, θ, t в порядке $\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \left\{ a^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial \tau}{\partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \right\} - \\ - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau \partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} a^2 \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right) + \dots = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где не выписаны производные по θ , причем $\tau = \tau_0 + \tau'$, $\theta = \theta_0 + \theta'$, $\tau = \tau_0$, $\theta = \theta_0$ даются (4), $\tau = \text{const}$ есть уравнение нелинейных характеристик, получаемое приравнованием нулю скобки при $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}$, которое

с учетом $\frac{\partial \tau'}{\partial t} = -2a_0^2 \left(\frac{\partial \tau'}{\partial x} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial \tau'}{\partial y} \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \right)$ запишется

$$2 \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \frac{\partial \tau'}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial \tau'}{\partial y} = -\frac{1}{a_0^2} \left(2 \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \right) - \frac{n+1}{a_0^2} \frac{\rho}{Bn}$$

и учитывая, что $\frac{\partial \tau_0}{\partial x} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial \tau_0}{\partial y} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau}$, $\rho = -\tau_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \tau_0}{\partial x} = -\frac{1}{a_0^2} \frac{dx}{dt}$,

$\frac{\partial \tau_0}{\partial y} = -\frac{1}{a_0^2} \frac{dy}{dt}$, вдоль луча имеем

$$\frac{d\tau'}{dt} = \frac{n+1}{2} \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \tau_0}{\partial \tau}.$$

Подставляя сюда линейное решение (9), взятое вдоль характеристики (4), где $\theta = \theta_0 + \theta'$, получим, отбрасывая несущественную постоянную

$$\tau' = -(n+1) \frac{C}{2a_0^2} \sqrt{t - t_0(\theta_0) - \tau_0}, \quad \tau_0 = t_0 \dot{\theta}_0, \quad (12)$$

$$\tau_0 = \frac{3}{2} \frac{n+1}{2} \frac{C}{2a_0^2} t_0^2 (t - t_0 - \tau_0)^{-\frac{1}{2}},$$

где $a_0(t - t_0 - \tau_0)$ — радиус кривизны характеристики. Отсюда

$$\frac{\partial \tau'}{\partial x} = \frac{n+1}{2} \frac{C}{2a_0^2} \frac{t_0 \sin \theta_0}{(t - t_0 - \tau_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial \tau'}{\partial x^2} = \frac{3}{2} \frac{n+1}{2} \frac{C}{2a_0^2} \frac{t_0^2 \sin^2 \theta_0}{(t - t_0 - \tau_0)^{\frac{5}{2}}}$$

и для кривизны характеристики ($\tau = \tau_0 + \tau'$)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{t-t_0} + \frac{3n+1}{2} \frac{C}{2\varphi_0 a_0^2} \frac{t_0'^2}{(t-t_0-t_0')^2}.$$

Если искать по лучевому методу решение (11) в виде

$$\varphi = \varphi_1(t_0, t) \quad \text{при } \tau > 0;$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \tau < 0,$$

приравнявая слагаемые с единичной функцией, получим интегрированием двух последних слагаемых в (4) с учетом $P = -\varphi_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$;

$$P = \frac{C(t_0)}{\sqrt{t}}, \quad \text{где } t' = t - t_0(t_0) + \frac{n+1}{2} \frac{C}{Bn} \frac{3}{2} \frac{t_0'^2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

То же выражение найдется из закона обратной пропорциональности решения корню квадратному из радиуса кривизны для нелинейной характеристики (12). Решение на линии $t = t_0$ будет конечным. Ударная волна не заходит в область, ограниченную линией, находящейся

на расстоянии порядка $P_1 \frac{t}{C}$ впереди огибающей лучей. Отметим, что соотношение для давления можно получить из общих характеристических уравнений в предположении одномерности характеристик [2]. (Уравнение $\tau = \text{const}$ есть уравнение одномерных вдоль лучей характеристик). В уравнении (11) $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ есть производная по нормали к не-

линейной характеристике. Из уравнения (11) для скачка $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ получается обычное линейное решение

$$= \frac{C(t_0)}{\sqrt{t - t_0 - t_0'}},$$

где $a_0(t - t_0 - t_0')$ — радиус кривизны нелинейной характеристики. Впереди ударной волны все параметры невозмущенные, поэтому, отбрасывая влияние ударной волны и отождествляя ее с характеристикой, получим, что приведенное выражение совпадает с $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$. Всюду в ок-

рестности огибающей лучей уравнение (11) совпадает с линейным, где вместо $a_0 t$ стоит нелинейный радиус кривизны. Отметим еще, что решение (6) дает закон затухания двумерных ударных волн.

Ա. Դ. ԲԱԶԴՅԱՆ

ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԴԱՐՁՄԱՆ ԿԵՏԻՆ ՄՈՏ ՀԱՆԱՏՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտվում է հարվածային մակատի որոշման խնդիրը մառադայթների հոսման գծի մոտ: Դժային լուծումը, որն անվերջություն է այդ գծի վրա, ճշտվում է քնութագրերի փոփոխման մեթոդով: Ստացվում են ոչ դժուարին հավասարումներ հատման գծի շրջակայքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоян А. Դ. Пространственные нестационарные движения. Ереван, 1961.
2. Губкин К. Е. ИММ, т. XXII, в. 4, 1958.