

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. БАГДАСАРЯН

ПРОЧНОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НЕОДИНАКОВЫХ
 КОНЦЕВЫХ ЭКСЦЕНТРИЦИТЕТАХ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОГО
 УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА*

В статье дается аналитическое решение задачи сжатого стержня прямоугольного сечения с неодинаковыми концевыми эксцентриситетами приложения продольной нагрузки (рис. 1). Принимается идеализированная диаграмма материала с линейным упрочнением за пределом упругости (рис. 2). Кроме того допускается, что крутильные де-

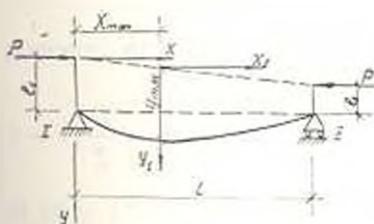


Рис. 1. Схема стержня сжатого с неодинаковыми концевыми эксцентриситетами.

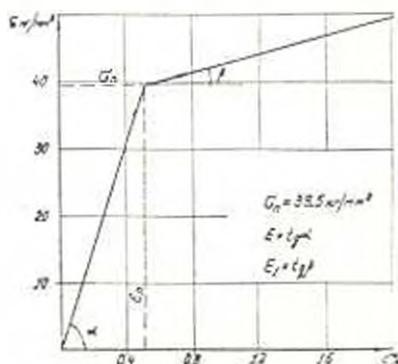


Рис. 2. Идеализированная диаграмма материала.

формации в стержне отсутствуют; влияние сдвигающих сил пренебрежимо мало; поперечные сечения при деформации стержня остаются плоскими; диаграммы материала при сжатии и растяжении идентичны; изогнутая ось стержня представляет собой синусоиду.

В соответствии с рис. 1 в системе координат (X_1, Y_1) изгибающий момент в любом сечении стержня будет равен

$$M_x = M_{\max} \cos \pi x, \quad (1)$$

при этом уравнение предельного равновесия согласно [1], [2] запишется в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi k}{2} \left(\frac{dr}{dy_{\max}} \frac{y_{\max}}{r} \frac{\pi k n + 1}{2n} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi k}{2n}} \right) + 1 = 0, \quad (2)$$

* Научный руководитель проф. В. В. Шнапжян.

где

$u_{\max} = \frac{M_{\max}}{P}$ — прогиб оси стержня в сечении с максимальным изгибающим моментом:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}; \quad r = \frac{\pi}{\alpha}; \quad h = \frac{2x_{\max}}{r};$$

$$u = \frac{x_{\max}}{L - x_{\max}} = \frac{\pi k}{2 \arccos\left(\frac{c_1}{c_2} \cos \frac{\pi k}{2}\right)}$$

В случае, когда при потере устойчивости пластические деформации наблюдаются только в зоне сжатых волокон стержня (рис. 3), следуя [3], получим:

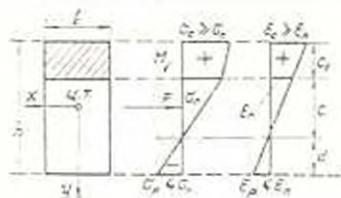


Рис. 3. Элюры напряжений и деформаций в сечении стержня при односторонней текучести.

$$u_{\max} = \frac{1 - \psi}{\psi} \xi \frac{h}{4} \frac{w}{v}; \quad (3)$$

$$\psi = \frac{(1 - \psi) \frac{c_1^2}{2} + \left(\frac{h}{2} - c_1\right) h}{(1 - \psi) h}. \quad (4)$$

Здесь

$\xi = \left(1 - \frac{c_1}{h}\right)$ — относительная высота упругой части сечения:

$$w = \left(1 - \frac{2}{3} \xi\right) (1 - \psi) + \frac{\psi}{3\xi^2}; \quad v = \psi \left(1 - \frac{1}{2\xi}\right) + \frac{\xi}{2} (1 - \psi).$$

Используя известные соотношения

$$\frac{1}{\psi} = \frac{r_0}{cE}; \quad \frac{1}{\psi} \approx y'' = u_{\max} \frac{\pi^2}{r^2}, \quad (5)$$

на основании (4) находим

$$r = \pi \sqrt{\frac{E}{3_0}} \sqrt{2h \frac{u_{\max}}{1 - \psi} \psi}. \quad (6)$$

Продифференцировав (3) и (6) по ξ и подставляя полученные выражения в (2), получим следующее уравнение предельного равновесия стержня при одностороннем развитии в сечении пластических деформаций

$$\operatorname{tg} \frac{\pi k}{2} \left[\left[1 + \frac{\psi + \xi(1 - \psi)}{v \left(1 - \frac{2}{3} \xi - \frac{1 - \psi + \frac{\psi}{\xi^2}}{w}\right) - \frac{1}{2} \xi \left(1 - \psi + \frac{\psi}{\xi^2}\right)} \right] \frac{\pi k n + 1}{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi k}{2n}} \right] - 1 = 0, \quad \text{где } \psi = \frac{E_1}{E}. \quad (7)$$

Относительный эксцентриситет приложения нагрузки на опоре l стержня (рис. 1) с учетом (3) будет равен

$$m_1 = \frac{3}{2} \frac{1 - \varphi}{\varphi} \xi \frac{\omega}{v} \cos \frac{\pi k}{2}. \quad (8)$$

Критическая гибкость стержня

$$\lambda_{кр} = \pi k \frac{n+1}{n} \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{E}{\varphi \sigma_n}} \sqrt{3\omega}. \quad (9)$$

При односторонней текучести сечения значения $\lambda_{кр}$ можно найти из выражений (7)–(9), задаваясь значениями φ , m_1 , e_0 , e_1 , ψ , σ_n , E , при этом $0 < k < 1$; $-1 < e_0, e_1 < 1$.

В случае, когда при потере устойчивости пластические деформации возникают одновременно в сжатой и растянутой зонах стержня (рис. 4), следуя [3], получим

$$y_{\max} = \frac{h^2 \frac{1-\varphi}{2} + 2 \frac{1-\psi}{\xi h} \left(\frac{c_1^3}{6} - h \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_2^3}{6} \right) - \frac{h}{\xi} \left(\frac{h}{3} - c_1 \right)}{\varphi h}; \quad (10)$$

$$c_2 = h(1-\xi) - c_1; \quad (11)$$

$$h(1-\xi) = \frac{(h-c_1)^2}{3h} - \varphi \frac{c_1^2}{3h} - \frac{c_1^2}{2h} (1-\psi); \quad (12)$$

$$\xi h = 2c. \quad (13)$$

В силу (10)–(13) находим

$$y_{\max} = \frac{h}{\varphi} \left\{ \frac{1-\varphi}{2} + 2 \frac{1-\psi}{\xi} \left[\frac{1}{6} - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} - \frac{z}{t} \left(\frac{1}{2} - \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} \frac{z}{t} \right) \right] - \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{3} - \frac{z}{t} \right) \right\}, \quad (14)$$

где

$$z = \xi \frac{1-\varphi}{2} + \frac{1-\psi}{2} - \xi(1-\psi) + \xi^2 \frac{1-\psi}{2} - \frac{1}{2}; \quad t = (1-\psi)(1-\xi) - 1.$$

Используя соотношения (5) с учетом (13), находим

$$r = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \sqrt{\xi \frac{h}{2} y_{\max}}. \quad (15)$$

Путем несложных преобразований уравнение предельного равновесия при двустороннем развитии пластических деформаций в сечении можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \frac{\pi k}{2} \left[\left(1 + \frac{y_{\max}}{\xi} \frac{dy_{\max}}{d\xi} \right) \frac{\pi k}{4} \frac{n-1}{n} + \operatorname{tg} \frac{\pi k}{2n} \right] + 1 = 0. \quad (16)$$

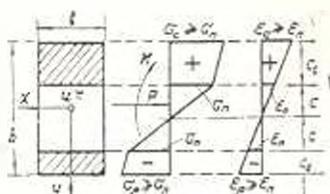


Рис. 4. Эпюры напряжений и деформаций в сечении стержня при двусторонней текучести.

Здесь

$$\frac{dy_{\max}}{d\xi} = \frac{h}{\xi^2} \left\{ 2(1-\psi)\xi + \frac{1}{\xi} \left[\frac{1}{3} - \xi \frac{1-\psi}{2} - \xi(1-\psi)(1-\xi) + z \left(\xi \frac{1-\psi}{t} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (17)$$

где

$$\xi = \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{3} - \frac{1}{6\xi} - \frac{z}{t} \left[\xi - 1 + \xi \frac{1-\psi}{2} - \xi(1-\psi)(1-\xi) + z \left(1 + \xi \frac{1-\psi}{t} \right) \right] - \frac{1}{2} - \xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi}{2} \frac{z}{t} \left[\frac{1-\psi}{2} - (1-\xi)(1-\psi) + z \left(\frac{1-\psi}{t} - \frac{1}{\xi} \right) \right].$$

Относительный эксцентриситет приложения нагрузки на опоре / стержня (рис. 1) равен

$$m_1 = \frac{6 y_{\max}}{h} \cos \frac{\pi k}{2}. \quad (18)$$

Критическая гибкость стержня

$$\lambda_{кр} = \pi k \frac{\sqrt{3} n + 1}{\xi} \sqrt{\frac{E}{\sigma_n}} \sqrt{\xi \frac{h}{2} y_{\max}}. \quad (19)$$

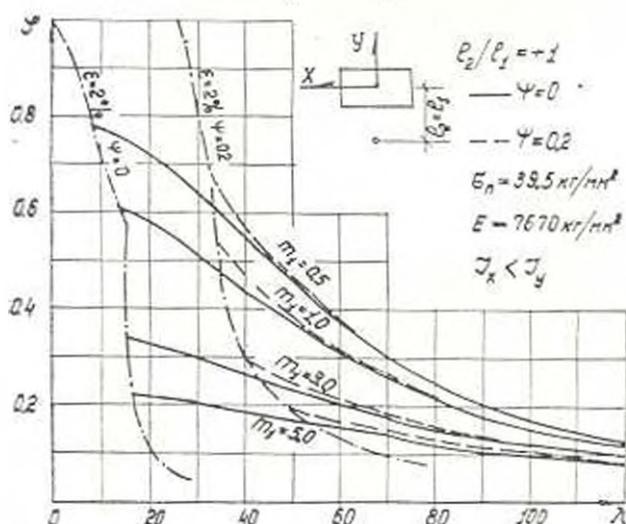


Рис. 5. График предельной несущей способности стержней при отношении конечных эксцентриситетов -1 .

При двусторонней текучести сечения значения $\lambda_{кр}$ можно найти из выражений (16), (18), (19) с учетом (14) и (17), задаваясь значениями φ , m_1 , e_2/e_1 , ψ , ε_n , E . При этом, как и в предыдущем случае: $0 \leq k \leq 1$, $-1 \leq e_2/e_1 \leq 1$.

Для граничного напряженного состояния, когда краевая деформация на выпуклой стороне стержня равна ε_n (рис. 3) в силу (13), из первого условия равновесия сил получим

$$\sigma = - (1 - \psi) \left(1 + \psi \frac{1 - \xi}{\xi} \right). \quad (20)$$

Совместным решением (7), (9) и (20) получим уравнение, описывающее границу между первым и вторым упруго-пластическими напряженными состояниями. На рис. 5, 6, 7 представлены кривые

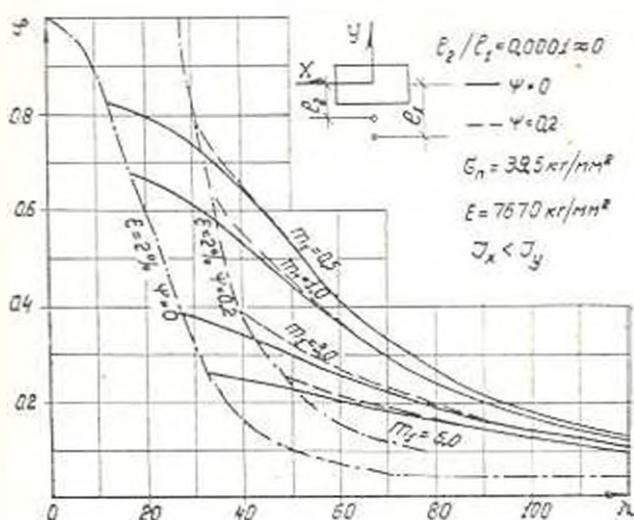


Рис. 6. График предельной несущей способности стержней при отношении конечных эксцентриситетов 0.

$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\lambda, e_2/e_1, m_1)$, вычисленные по приведенным выше формулам с помощью ЭВМ для сжатых стержней при коэффициентах линейного упрочнения $\psi = 0$ и 0,2. Графики показывают, что влияние линейного упрочнения на несущую способность стержней становится существенным с уменьшением их гибкости и увеличением эксцентриситетов. Значительное влияние на несущую способность оказывает линейное упрочнение при уменьшении отношения конечных эксцентриситетов e_2/e_1 . Например, для стержня с расчетными характеристиками $\lambda = 50$, $m_1 = 3$, $e_2/e_1 = 0,9$ изменение коэффициента линейного упрочнения от 0 до 0,2 увеличивает его несущую способность на 10%.

Сопоставление результатов экспериментальных исследований, проведенных автором над сжатыми дуралевыми стержнями прямоугольного сечения в диапазоне гибкостей 40–100, при относительных эксцентриситетах $m_1 = 0,5$ и 3 и отношении конечных эксцентрисите-

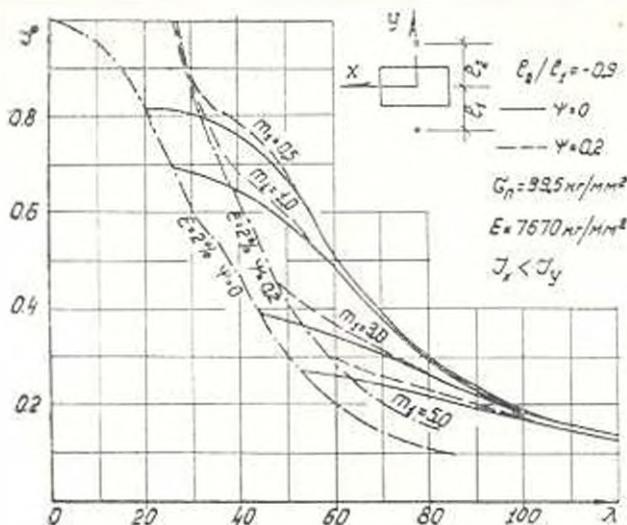


Рис. 7. График предельной несущей способности стержней при отношении конечных эксцентриситетов $e_2/e_1 = -0,2$.

тов $e_2/e_1 = 0$ и $-0,5$ с результатами, вычисленными по приведенным выше формулам, показало их хорошую сходимость.

АНСМ

Получено 6.XI.1965.

ՈՒՍՏԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

ՄԱՅՐԱՑՄԱՆ ԱՆՇԱՎԱՍԱՐ ԱՊԱԿԵՆՏՐՈՆՈՒԹՅԱՄԲ ՍԵՂՎՎԱՆ ՉՈՂՆԵՐ ԱՐՐՈՒԹՅՈՒՆԸ՝ ՆՅՈՒԹԻ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԱՅՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՒ

Ու մ փ ո փ ու մ

Հողվածում գիտվում է ծայրերում անհավասար ապակենտրոնությամբ բեռնավորված սեղմվող ձողի ինդրի մոտավոր անալիտիկ լուծումը. Լեթադրելով, որ ծոված առանցքը Լեթարկվում է սինուսոիդի օրենքին. իսկ նյութի $\nu = \xi$ դիագրամն ունի գծային ամրացում առաձգական-պլաստիկ դեֆորմացիաների շրջանում: Ստացված ներքակ լուծման հիման վրա հաշված են ձողերի սահմանային կրողունակության գրաֆիկները տարրեր ապակենտրոնության և գծային ամրացման դործակիցների համար: Ելքակապցվում է, որ e_2/e_1 հարաբերության նվազմամբ դժային ամրացման ազդեցությունը ձողերի կրողունակության վրա աճում է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М., 1955.
2. Соболев Ю. В. Исследование устойчивости внецентренно сжатых стальных стержней при неодинаковых эксцентриситетах. Научные доклады высшей школы (серия «Строительство»). № 2, 1958.
3. Пинадзյан В. В. Некоторые вопросы предельного состояния сжатых элементов стальных конструкций. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1956.