ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XX, № 2. 1967 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. ХАЧИЯН, Л. С. КАЗАРЯН

О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ИХ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

В статье методом Галёркина определены частоты колебаний стержней с учетом собственного веса для некоторых часто встречающихся случаев закрепления их концов и получено решение задачи при произвольных вынужденных колебаниях.

Дифференциальное уравнение статического изгиба балки имеет вид

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{1}$$

Дифференцируя дважды уравнение (1) и учитывая, что из условия равновесия элемента балки имеем [3]

$$\frac{dM}{dx} = Q - S(x)\frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

где $S(x)$ — продольная сила в сечении x, и что при колебаниях

$$\frac{dQ}{dx} = \bar{m}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{3}$$

есть интенсивность распределенной инерционной нагрузки, получим следующее дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержней с учетом переменной продольной силы

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + \bar{m}\frac{d^2y}{dt^2} + S(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dS(x)}{dx}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Здесь y — прогиб балки, M — изгибающий момент, Q — поперечная сила, E — модуль упругости, I — момент инерции, $\bar{m}$ — погонная масса стержня. Заметим, что при $S(x) = \text{const}$ уравнение (4) переходит в известное уравнение поперечных колебаний с учетом постоянной продольной силы.

Частное решение уравнения (4) ищем в виде

$$y(x, t) = Y(x)\,T(t). \tag{5}$$

Подставляя решение (5) в (4) после разделения переменных, получим следующие два уравнения движения:

$$\begin{gathered} T'' + \omega^2 T = 0; \\ EIY^{IV} + S(x)\,Y'' + S'(x)\,Y' - \bar{m}\omega^2 Y = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Первое уравнение (6) показывает, что движение системы носит колебательный характер с частотой ω, второе уравнение определяет форму колебания системы. Частота ω определяется из граничных условий для второго уравнения (6).

Рассматривая стержень в вертикальной плоскости, взяв за начало координат его нижний конец и направляя ось ox вертикально вверх, для продольной силы будем иметь

$$S(x) = q(l - x),$$

где q — вес единицы длины стержня; l — длина стержня. Второе уравнение (6) примет вид

$$EIY^{IV} + q(l - x)Y'' - qY' - \frac{q}{g}\omega^2 Y = 0. \tag{7}$$

Точное решение уравнения (7) из-за переменности коэффициентов найти трудно. Наиболее распространенным методом приближенного решения таких уравнений является метод Галёркина. Следуя этому методу, приближенное решение уравнения

$$L[Y(x)] = 0 \tag{8}$$

отыскиваем в виде

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i Z_i(x), \tag{9}$$

где C_i — некоторые постоянные, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1\Delta_{11} + C_2\Delta_{12} + \cdots + C_n\Delta_{1n} = 0; \\ C_1\Delta_{21} + C_2\Delta_{22} + \cdots + C_n\Delta_{2n} = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1\Delta_{n1} + C_2\Delta_{2n} + \cdots + C_n\Delta_{nn} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\Delta_{ij} = \int_0^l L[Z_i(x)] Z_j(x)\,dx. \tag{11}$$

Основное требование к методу Галёркина заключается в том что минимизирующие функции $Z_i(x)$ должны удовлетворять одновременно и граничным условиям задачи и условиям ортогональности. Эти требования существенно затрудняют выбор элементарных минимизирующих функций. Для уравнения (7) в качестве таких функций можно взять фундаментальные функции поперечных колебаний стержней, т. е.

$$EIZ^{IV} - \frac{q}{g}\omega^2 Z = 0. \tag{12}$$

В самом деле, решения уравнения (12) удовлетворяют условиям ортогональности и граничным условиям задачи, так как сила $S(x)$ не влияет на граничные условия задачи.

Рассмотрим несколько частных наиболее распространенных в практике задач, ограничиваясь первыми двумя членами ряда (9).

1. Стержень с шарнирно-опертыми концами

Фундаментальные функции $Z_i(x)$ имеют вид [3]

$$Z_i(x) = \sin \mu_i \frac{x}{l}, \quad \mu_1 = \pi, \quad \mu_2 = 2\pi.$$

Для коэффициентов Δ_{ij} по формуле (11) получим:

$$\Delta_{11} = 0{,}5\, l \left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\,\omega^2 \right] - 2{,}465\, q;$$

$$\Delta_{12} = -\frac{23}{9}\, q; \qquad \Delta_{21} = -\frac{68}{9}\, q;$$

$$\Delta_{22} = 0{,}5\, l \left[EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\,\omega^2 \right] - 9{,}86\, q.$$

При учете только одного члена ряда (9) частотное уравнение будет

$$\Delta_{11} = 0,$$

отсюда для частоты колебания ω получим

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 - 0{,}94 \frac{ql}{(ql)_{кр}}},$$

где $(ql)_{кр} = 18{,}5 \frac{EI}{l^2}$ — критическая нагрузка потери устойчивости при распределенной продольной нагрузке q.

Аналогично задачам устойчивости введем понятие приведенной нагрузки, понимая под этим нагрузку $P_{пр}$, сосредоточенную в верхнем конце стержня и эквивалентную распределенной переменной нагрузке. При постоянной продольной силе $P_{пр}$ для частоты первой формы имеем

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \sqrt{1 - \frac{P_{пр} l^2}{EI\pi^2}},$$

отсюда для эквивалентности

$$\frac{P_{пр}\, l^2}{EI\pi^2} = 0{,}051 \frac{ql^3}{EI}; \quad P_{пр} = 0{,}51\, ql.$$

Следовательно, приведенная нагрузка составляет половину полного веса.

С учетом двух членов ряда (9) частотное уравнение имеет вид

$$\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21} = 0.$$

Подставляя значения Δ_{ij}, получим квадратное уравнение относительно ω^2:

$$\omega^4 - 1652\frac{EI}{ml^4}\omega^2 + 24 g l\omega^2 + 15120\frac{(EI)^2 l^{-8}}{m^2} - 31150\frac{EI}{m} g l^{-5} - 77\frac{g^2}{l^2} = 0,$$

откуда для частот первой и второй формы получим

$$\omega_1 = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{8,5 - 0,126\alpha - \sqrt{56,25 - 1,142\alpha + 0,024\alpha^2}};$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\mu_2}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{0,531 - 0,098\alpha + \sqrt{0,22 + 0,00446\alpha + 9\cdot 10^{-5}\alpha^2}},$$

где принято обозначение $\frac{ql^3}{EI} = \alpha$.

Заметим, что если в выражениях для частоты положить $\alpha = 0$, то получим точные значения частоты без учета влияния собственного веса.

2. Стержень с одним заделанным и другим свободным концами

Для этого случая [3]

$$Z_i(x) = -\frac{\sin\mu_i + \operatorname{sh}\mu_i}{\cos\mu_i + \operatorname{ch}\mu_i}\left(\cos\mu_i\frac{x}{l} - \operatorname{ch}\mu_i\frac{x}{l}\right) + \sin\mu_i\frac{x}{l} - \operatorname{sh}\mu_i\frac{x}{l},$$

где $\mu_1 = 1,875$, $\mu_2 = 4,694$.

Для Δ_{ij} получим следующие значения:

$$\Delta_{11} = 1,73\, l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\omega^2\right] - 2,633q;$$

$$\Delta_{12} = -0,495\, l\left[EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\omega^2\right] + 0,058q;$$

$$\Delta_{21} = -0,495\, l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\omega^2\right] - 8,115q;$$

$$\Delta_{22} = 0,879\, l\left[EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\omega^2\right] - 7,933q.$$

С учетом одного члена ряда (9) для частоты основного тона получим

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{1 - 0,965\frac{ql}{(ql)_{кр}}}, \quad \text{где } (ql)_{кр} = \frac{7,83\, EI}{l^2}.$$

Приведенная нагрузка $P_{пр}$ определяется из условия

$$\frac{P_{пр}\, l^3}{\frac{14}{5}EI} = 0,123\frac{ql^4}{EI}, \quad P_{пр} = 0,344\, ql.$$

С учетом двух членов ряда для частот первой и второй формы получим:

$$\omega_1=\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{20{,}135-0{,}609\alpha-\sqrt{366{,}2-21{,}109\alpha+0{,}294\alpha^2}};$$

$$\omega_2=\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{0{,}51-0{,}084\alpha-\sqrt{0{,}237-0{,}014\alpha+0{,}0002\alpha^2}}.$$

3. Стержень с одним заделанным и другим опертым концами

Фундаментальные функции $Z_i(x)$ имеют вид [3]:

$$Z_i(x)=\operatorname{ch}\mu_i\frac{x}{l}-\cos\mu_i\frac{x}{l}-\frac{\operatorname{ch}\mu_i-\cos\mu_i}{\operatorname{sh}\mu_i+\sin\mu_i}\left(\operatorname{sh}\mu_i\frac{x}{l}-\sin\mu_i\frac{x}{l}\right),$$

где $\mu_1=3{,}93$, $\mu_2=7{,}07$.

Для Δ_{ij} имеем:

$$\Delta_{11}=328\,l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]-8281\,q;$$

$$\Delta_{12}=5611\,l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]-13405q;$$

$$\Delta_{21}=5611\,l\left[EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]-10884q;$$

$$\Delta_{22}=48184\,l\left[EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]-1427989\,q.$$

С учетом одного члена ряда (9) получим

$$\omega=\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}}\sqrt{1-5{,}51\frac{ql}{(ql)_{\text{кр}}}},\quad \text{где } (ql)_{\text{кр}}=\frac{52{,}5\,EI}{l^2}.$$

Приведенную нагрузку определим из условия [1]

$$\frac{P_{\text{пр}}\,l^2}{EI\pi^2}=0{,}105\frac{ql^3}{EI},$$

$$P_{\text{пр}}=1{,}05\,ql.$$

4. Стержень с заделанными концами

Для фундаментальных функций $Z_i(x)$ имеем [3]:

$$Z_i(x)=\operatorname{ch}\mu_i\frac{x}{l}-\cos\mu_i\frac{x}{l}-\frac{\operatorname{ch}\mu_i-\cos\mu_i}{\operatorname{sh}\mu_i-\sin\mu_i}\cdot\left(\operatorname{sh}\mu_i\frac{x}{l}-\sin\mu_i\frac{x}{l}\right),$$

$\mu_1=4{,}79$, $\mu_2=7{,}85$.

Для Δ_{ij} имеем:

$$\Delta_{11}=1{,}108\,l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]-29{,}92q;$$

$$\Delta_{12}=-0{,}314\,l\left[EI\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^4-\frac{q}{g}\omega^2\right]+2703q;$$

$$\Delta_{21} = -0{,}314\, l \left| EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^4 - \frac{q}{g}\,\omega^2 \right| + 8101q;$$

$$\Delta_{22} = 1{,}128\, l \left| EI\left(\frac{\mu_2}{l}\right)^2 - \frac{q}{g}\,\omega^2 \right| - 11630q.$$

Частоты колебаний с учетом одного и двух членов ряда (9) соответственно будут

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}} \sqrt{1 - 0{,}054\,\frac{ql^3}{EI}}$$

или

$$\omega = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}} \sqrt{1 - 4{,}87\,\frac{ql}{(ql)_{\text{кр}}}}, \quad \text{где} \quad (ql)_{\text{кр}} = 73{,}6\,\frac{EI}{l^2};$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}} \sqrt{4{,}29 - 8{,}26\alpha - \sqrt{10{,}84 + 0{,}117\alpha + 14{,}31\alpha^2}};$$

$$\omega_2 = \left(\frac{\mu_2}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}} \sqrt{0{,}565 - 1{,}09\alpha + \sqrt{0{,}188 - 0{,}002\alpha + 10^{-4}\alpha^2}}.$$

Аналогичным образом можно определить частоты колебаний и при других закреплениях.

Зная значения Δ_{ij}, можно определить и форму колебания. При учете двух членов ряда (9) для формы колебания будем иметь

$$Y(x) = Z_1(x) + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}\, Z_2(x).$$

При вынужденных колебаниях уравнение движения имеет вид

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} + \overline{m}\,\frac{d^2y}{dt^2} + S(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dS(x)}{dx}\,\frac{dy}{dx} = f(x,\ t). \qquad (13)$$

Ищем решение уравнения (13) в виде

$$y(x,\ t) = \sum_{k=1} Y_k(x)\, T_k(t), \qquad (14)$$

где $Y_k(x)$ — решения второго уравнения (6). Подставляя (14) в (13) и учитывая (6), получим

$$\sum_{k=1} \overline{m}\, Y_k\,(\ddot{T}_k + \omega_k^2 T_k) = f(x,\ t). \qquad (15)$$

Если функции $Y_k(x)$ ортогональны, т. е.

$$\int_0^l Y_k(x)\, Y_i(x)\, dx = 0 \qquad \text{при } k \neq i, \qquad (16)$$

то для функций $T_k(t)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$T_k'' + \omega^2 T_k = \frac{\int\limits_0^l f(x, t) Y_k(x)\, dx}{\overline{m} \int\limits_0^l Y_k^2(x)\, dx} = F(t). \tag{17}$$

Следовательно, общее решение уравнения (13) имеет вид

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x) [A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t) +$$
$$+ \frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t F(\tau) \sin \omega_k (t - \tau)\, d\tau, \tag{18}$$

где A_k и B_k определяются из начальных условий.

Теперь выясним при каких условиях имеет место условие ортогональности (16).

Имеем

$$EIY_k^{IV} = -S(x) Y_k'' - S'(x) Y_k' + \overline{m}\omega_k^2 Y_k;$$
$$EIY_i^{IV} = -S(x) Y_i'' - S'(x) Y_i' + \overline{m}\omega_i^2 Y_i. \tag{19}$$

Умножая первое уравнение системы (19) на Y_i, а второе — на Y_k, вычитывая из первого второе и интегрируя в интервале $[0, l]$, получим

$$\overline{m}(\omega_k^2 - \omega_i^2) \int\limits_0^l Y_k Y_i\, dx = EI \int\limits_0^l (Y_k^{IV} Y_i - Y_k Y_i^{IV})\, dx +$$
$$+ \int\limits_0^l S(x) [Y_k'' Y_i - Y_k Y_i''] + \int\limits_0^l S'(x) [Y_k' Y_i - Y_k Y_i']\, dx. \tag{20}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\overline{m}(\omega_k^2 - \omega_i)^2 \int\limits_0^l Y_k Y_i dx = EI\ [Y_k''' Y_i - Y_k Y_i''' +$$
$$+ Y_k' Y_i'' - Y_i' Y_k''] \Big|_0^l + S(x) [Y_k' Y_i - Y_k Y_i'] \Big|_0^l. \tag{21}$$

Первый член выражения (21) равен нулю при любых граничных условиях, а второй член только для стержней шарнирно опертых или защемленных на концах. Однако для других случаев, например, для консольного стержня, если под $S(x)$ понимать нагрузку от собственного веса, можно, таким образом, выбирать начало координат, чтобы при $x = l$, $S(x) = 0$.

Таким образом, условия ортогональности (16) выполняются для всех рассмотренных нами четырех случаев и общее решение задачи для них выразится формулой (18).

АИСМ Поступило 12.IV.1966.

Է. Ե. ԽԱՉԻՅԱՆ, Լ. Ս. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

ՍԵՓԱԿԱՆ ԿՇՌԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ ՈՒՂՂԱՁԻԳ ՁՈՂԵՐԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում են ձողերի ընդլայնական տատանումները փոփոխական երկայնական ուժերի ազդեցության դեպքում:

Սեփական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումն ստացված է [4] ընդհանուր տեսքով, որտեղ երկայնական ուժի փոփոխական լինելն արտահայտվում է հավասարության վերջին անդամով: Որպես փոփոխական ուժ ընդունելով ձողի սեփական կշիռը, ստացված է փոփոխական գործակիցներով [7] հավասարումը, որի լուծումը փնտրվում է Գալյորկինի հայտնի մեթոդով: Քննված են հոդակապային և կոշտ ամրակցումներ ունեցող ձողերի տատանումների հաճախականությունները: Ստացված արդյունքները համեմատված են առանց սեփական կշռի հաշվառմամբ ստացված արդյունքների հետ: Դիտարկված օրինակների համար ստացված են համարժեք հաստատուն երկայնական ուժերի արժեքները, որոնց կիրառման դեպքում կստացվեին նույն հաճախականությունները, ինչպիսիք ստացվում են փոփոխական ուժի դեպքում:

Ստիպողական տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումն ստացված է (13) տեսքով, որի լուծումն ընտրվում է (14) տեսքով: Ապացուցելով, որ հիմնական (ֆունդամենտալ) ֆունկցիաների համար տեղի ունի օրթոգոնալության (21) պայմանը, խնդրի ընդհանուր լուծումը տրվում է (18) տեսքով, որտեղ A_k և B_k գործակիցները որոշվում են նախնական պայմաններից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Динамика сооружений. Госстройиздат, М., 1963.
2. *Снитко Н. К.* Динамика сооружений. Госстройиздат, Л.—М., 1960.
3. *Филиппов А. П.* Колебания упругих систем. АН УССР, Киев, 1956.