

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. С. СОГОЯН

О СВЯЗИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ ДЛЯ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА СТРОГО ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Вопросу определения упругих постоянных ориентированных стеклопластиков через упругие постоянные волокон и связующего посвящены работы А. Л. Филтшинского, Г. А. Ван Фо Фы, А. Л. Рабиновича, Г. Н. Брызгалина, Р. М. Раппопорт, А. М. Скундры, В. М. Гольфарба, А. В. Степанова, З. Хашина, Р. Хилла и др. Некоторые вопросы теории упругости однородных тел, имеющих разные модули упругости при растяжении и сжатии, рассмотрены С. П. Тимошенко, Г. К. Клейном, Л. А. Каном, С. А. Амбарцумяном, А. А. Хачатуряном, Г. С. Шапиро и др.

В настоящей работе на основании определенной модели [1, 2, 3] в зависимости от механических характеристик составляющих материала и процента армирования устанавливаются приближенные зависимости между осредненными деформациями и напряжениями в композиционном материале строго однонаправленной структуры, исходя из того, что если волокно в композиционном материале испытывает напряжение сжатия, то, как показывают эксперименты, оно теряет прямолинейную форму и оказывает сопротивление меньше, чем при растягивающих напряжениях [4].

Принимая гипотезу, что при сжимающих напряжениях модуль упругости волокна в продольном направлении уменьшается, в связях между осредненными деформациями и напряжениями это явление учитывается умножением модуля упругости E_1 на коэффициент K :

$$E_1^* = KE_1, \quad (1)$$

Очевидно, коэффициент K зависит от поперечных размеров волокна, от упругих свойств материала волокна и связующего, от процента армирования и может быть определен при помощи экспериментальных данных. Теоретическое определение точного значения K связано с определенными трудностями.

На основании существующих экспериментальных данных [5], как это можно было ожидать, сжатие и растяжение волокна не влияет на осредненный модуль сдвига как в плоскостях, проходящих через волокно, так и в плоскостях, перпендикулярных к нему.

В рассматриваемом однонаправленном композиционном материале волокна строго упорядочены рядами. Сечение волокон принимаем квадратным со стороной $2a$. Расстояние между волокнами в направлении y обозначаем $2b$, в направлении z — $2c$. Ось x направляем вдоль волокон (рис. 1, рис. 2).

1. Рассмотрим элемент композиционного материала, содержащий четверть волокна, как показано на рис. 1, 2, 3. Сечение этого

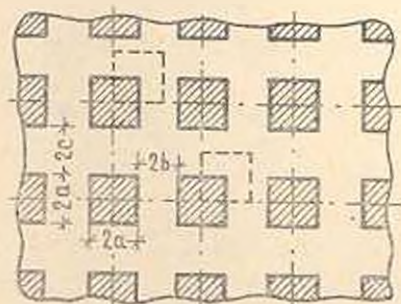


Рис. 1.

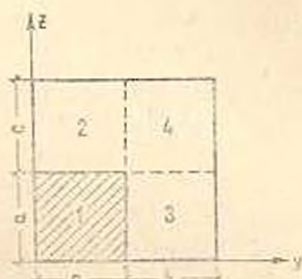


Рис. 2.

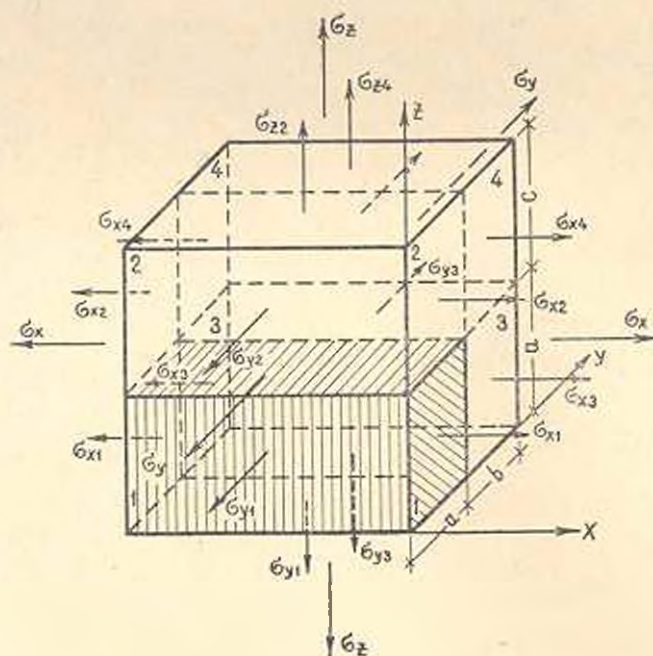


Рис. 3.

элемента разбиваем на четыре области (рис. 2, рис. 3). напряжения и деформации в этих областях будем обозначать соответствующими числовыми индексами (рис. 3). Рассмотрим работу этого элемента, подвергнутого только нормальным напряжениям. Через σ_x , σ_y , σ_z будем обозначать осредненные нормальные напряжения:

$$\sigma_x = \frac{a^2 \sigma_{x1} + ac \sigma_{x2} + ab \sigma_{x3} + bc \sigma_{x4}}{(a+b)(a+c)} \quad (2)$$

$$\tau_y = \frac{a\sigma_{y1} + b\sigma_{y2}}{a + c}; \quad \sigma_y = \frac{a\tau_{y1} + b\tau_{y2}}{a + b} \quad (2)$$

При определении деформации принимаем, что

$$\tau_{y1} = \sigma_{y3}, \tau_{z1} = \sigma_{z1}, \sigma_{z3} = \sigma_{z4}, \sigma_{y2} = \tau_{y4}. \quad (3)$$

Это предположение эквивалентно тому, что элемент сопротивляется напряжениям τ_y и σ_z по определенной схеме, в которой возможны разрывы напряжений и деформаций в местах контакта областей.

Предполагая материалы волокна и связующего упругими, будем иметь следующие соотношения между деформациями и напряжениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x1} &= \frac{\sigma_{x1}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{y1} + \sigma_{z1}); & \varepsilon_{y3} &= \frac{\sigma_{y3}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{x3} + \sigma_{z3}); \\ \varepsilon_{x2} &= \frac{\sigma_{x2}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{y2} + \sigma_{z2}); & \varepsilon_{y4} &= \frac{\sigma_{y4}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{x4} + \sigma_{z4}); \\ \varepsilon_{x3} &= \frac{\sigma_{x3}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{y3} + \sigma_{z3}); & \varepsilon_{z1} &= \frac{\sigma_{z1}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}); \\ \varepsilon_{x4} &= \frac{\sigma_{x4}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{y4} + \sigma_{z4}); & \varepsilon_{z3} &= \frac{\sigma_{z3}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{x3} + \sigma_{y3}); \\ \varepsilon_{y1} &= \frac{\sigma_{y1}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{x1} + \sigma_{z1}); & \varepsilon_{z2} &= \frac{\sigma_{z2}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{x2} + \sigma_{y2}); \\ \varepsilon_{y2} &= \frac{\sigma_{y2}}{E_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{x2} + \sigma_{z2}); & \varepsilon_{z4} &= \frac{\sigma_{z4}}{E_2} - \frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_{x4} + \sigma_{y4}). \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из условия непрерывности перемещений и вводя осредненные относительные удлинения по направлениям y и z , находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = \varepsilon_{x3} = \varepsilon_{x4}; \\ \varepsilon_y &= \frac{a\sigma_{y1} + b\sigma_{y3}}{a + b} = \frac{a\sigma_{y2} + b\sigma_{y4}}{a + b}; \\ \varepsilon_z &= \frac{a\sigma_{z1} + c\sigma_{z2}}{a + c} = \frac{a\sigma_{z3} + c\sigma_{z4}}{a + c}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (2)–(5) позволяет исключить τ_{y1} и τ_{y2} ($i = x, y, z, j = 1, 2, 3, 4$) и получить соотношения между осредненными относительными удлинениями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и осредненными нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Систему уравнений (2)–(5) после исключения некоторых неизвестных можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} g\nu_1\sigma_{x1} - \nu_2\sigma_{x2} + \beta\nu_2\sigma_{x3} - \beta\nu_2\sigma_{x4} - (g + \beta)\sigma_{y1} + (1 + \beta)\sigma_{y2} + (g\nu_1 - \nu_2)\sigma_{z1} &= 0; \\ g\nu_1\sigma_{x1} + \gamma\nu_2\sigma_{x2} - \nu_2\sigma_{x3} - \gamma\nu_2\sigma_{x4} + (g\nu_1 - \nu_2)\sigma_{y1} - (g + \gamma)\sigma_{z1} + (1 + \gamma)\sigma_{z3} &= 0; \\ g\sigma_{x1} - \sigma_{x2} - g\nu_1\sigma_{y1} + \nu_2\sigma_{y2} - (g\nu_1 - \nu_2)\sigma_{z1} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x2} - \sigma_{x1} - \nu_2 \sigma_{x1} + \nu_2 \sigma_{x3} &= 0; \\
 \sigma_{x3} - \sigma_{x1} - \nu_2 \sigma_{y1} + \nu_2 \sigma_{y2} &= 0; \\
 \sigma_{y1} + \gamma \sigma_{y2} &= (1 + \gamma) \sigma_y; \\
 \sigma_{z1} + \beta \sigma_{z3} &= (1 + \beta) \sigma_z; \\
 \sigma_{x1} + \gamma \sigma_{x2} + \beta \sigma_{x3} + \gamma \beta \sigma_{x1} &= (1 + \gamma)(1 + \beta) \sigma_x; \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{E_2}{E_1}; \quad \gamma = \frac{c}{a}; \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

Определяя из этой системы σ_i и подставляя в соотношение (5), находим искомую связь между осредненными деформациями и напряжениями. В каждом конкретном случае систему этих уравнений можно решить численно.

Принимая в уравнениях (6) $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$ или при отсутствии связывающего ($b = c = 0$), или, наконец, при полном отсутствии армирования ($a = 0$) на основании [4, 5, 6] между относительными удлинениями и нормальными напряжениями, получаем закон Гука для однородного изотропного материала.

2. Принимаем схему, указанную на рисунках 4 и 5 для определения сдвигов элемента в плоскости, перпендикулярной к волокнам. Ка-

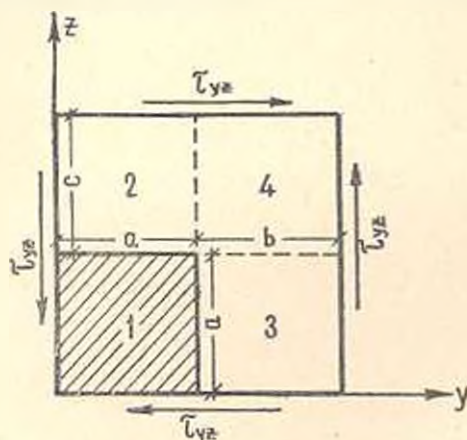


Рис. 4.

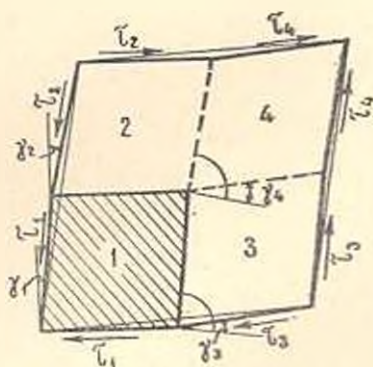


Рис. 5.

сательные напряжения на гранях рассматриваемого элемента распределяем так, чтобы исключить разрывы перемещений на границах областей. Согласно обозначениям и закону Гука для сдвигов имеем следующие соотношения:

$$\gamma_1 = \frac{\tau_1}{G_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G_2}; \quad \gamma_3 = \frac{\tau_3}{G_3}; \quad \gamma_4 = \frac{\tau_4}{G_4}. \quad (7)$$

Вводя осредненное касательное напряжение τ_{yz} , имеем:

$$\begin{aligned}
 a\tau_1 + c\tau_2 &= a\tau_3 + c\tau_4 = (a + c) \tau_{yz}; \\
 a\tau_3 + b\tau_1 &= a\tau_1 + b\tau_3 = (a + b) \tau_{yz}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Легко заметить, что условия равновесия, рассматриваемого элемента соотношениями (8), удовлетворены. Условие неразрывности между деформациями сдвигов в различных областях связующего рассматриваемого элемента обеспечивается соотношением:

$$\gamma_4 = \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_1. \quad (9)$$

Как видно из рис. 5, для осредненного сдвига имеем выражение

$$\gamma_{yz} = \frac{a\gamma_1 + c\gamma_2}{a+c} + \frac{b(\gamma_3 - \gamma_1)}{a+b}. \quad (10)$$

Система уравнений (7)–(10) позволяет выразить γ_{yz} через γ_{xz}

$$\gamma_{yz} = \frac{a(b+c) + (a^2 + bc) \frac{G_2}{G_1}}{a(a+b+c) + bc \frac{G_2}{G_1}} \cdot \frac{\gamma_{xz}}{G_1}. \quad (11)$$

Отметим, что из четырех уравнений (8) независимыми являются только три. Рассмотрим сдвиг элемента композиционного материала

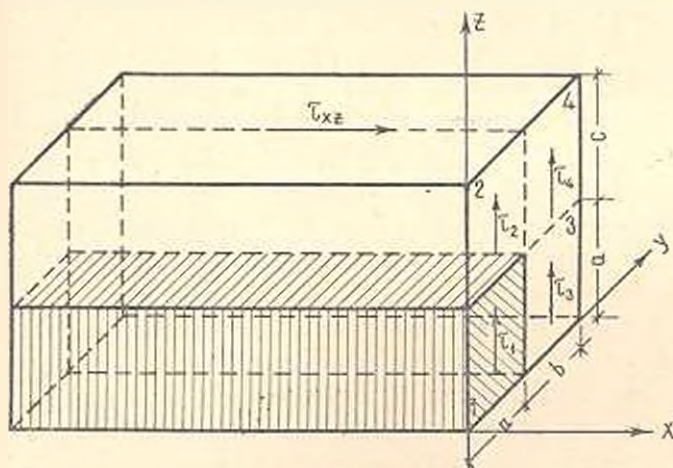


Рис. 6.

в плоскости xz (рис. 6, 7). В этом случае сдвиги в областях 2 и 4, а также в областях 1 и 3 принимаем приближенно равными:

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \frac{\tau_0}{G_2} = \frac{\tau_{xz}}{G_2}; \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \frac{\tau_1}{G_1} = \frac{\tau_3}{G_3}. \quad (12)$$

Из условия равновесия находим

$$a\tau_1 + b\tau_3 = (a+b)\tau_{xz}. \quad (13)$$

Осредненный сдвиг будет

$$\gamma_{xz} = \frac{a\tau_1 + c\tau_2}{a+c}. \quad (14)$$

Уравнения (12), (13) и (14) позволяют γ_{xz} выразить через τ_{xz}

$$\gamma_{xz} = \frac{a^2 + ab + bc + ac \frac{G_1}{G_2}}{(a+c) \left(a + b \frac{G_2}{G_1} \right)} \cdot \frac{\tau_{xz}}{G_1}. \quad (15)$$

Аналогичным путем получаем:

$$\gamma_{xy} = \frac{a^2 + ac + bc + ab \frac{G_1}{G_2}}{(a+b) \left(a + c \frac{G_2}{G_1} \right)} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{G_1} \quad (16)$$

Таким образом, полученные соотношения (6), (11), (15), (16) позволяют установить связь между осредненными деформациями и напряжениями, когда известны упругие характеристики волокон и связующего, процент армирования и геометрическая структура композиционного материала.

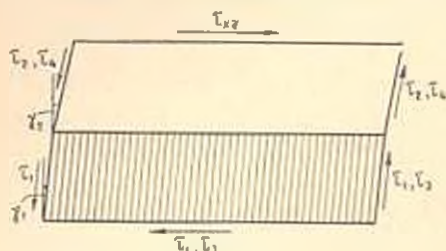


Рис. 7.

Когда поперечное сечение волокна в окрестности данной точки композиционного материала испытывает сжимающее напряжение, величина E_1 в соотношениях (4), (5), (6), как уже говорилось, умножается на экспериментальный коэффициент K_1 . В случае, когда $G_1 = G_2$ из соотношений (11), (15), (16) получаем закон Гука при сдвиге для изотропного материала. То же самое получаем, когда отсутствуют волокна ($a=0$) или отсутствует связующее ($b=c=0$). В случае, когда $b=0$ (или $c=0$) получаем композиционный материал, армированный тонкими параллельными пластинками. Этот случай был рассмотрен в [3], причем полученные соотношения (5), (6) несколько уточняют формулу (4) в работе [3]. Сказанное справедливо, когда поперечные сечения волокон испытывают растягивающие напряжения, т. е. $\sigma_{x1} > 0$. В случае, когда волокна испытывают сжимающие напряжения, в окончательной связи E_1 должен быть заменен на KE_1 .

Таким образом, если в рассматриваемом композиционном теле напряжение волокна σ_{x1} меняет знак, то тело будет работать как составленное из двух различных ортотропных материалов и граница между ними будет определяться из условия, что при переходе границы напряжения меняют знак, так как на границе $\sigma_{x1} = 0$. Очевидно, на граничной поверхности должны быть выполнены условия непрерывности перемещений и условия статики.

Таким образом, по ходу решения задач теории упругости для композиционного тела необходимо определить также граничную поверхность, разделяющую тело на области, в которых σ_{x1} имеет различные знаки.

Если тело армировано в трех взаимноперпендикулярных направлениях, число этих областей может увеличиваться до восьми ($\pm \sigma_{x1}, \pm \sigma_{x2}, \pm \sigma_{x3}, \pm \sigma_{y1}, \pm \sigma_{y2}, \pm \sigma_{y3}, \pm \sigma_{z1}, \pm \sigma_{z2}, \pm \sigma_{z3}$).

Если материалы связующего и волокна обладают линейной ползучестью во всех полученных связях между деформациями и напряжениями, все упругие постоянные могут быть рассмотрены как линейные временные операторы ползучести. Заменяя в окончательных

выражениях осредненных деформаций упругие постоянные соответствующими линейными операторами ползучести и расшифровывая эти операторы, находим, что связь ползучести между осредненными деформациями и напряжениями также будет линейной [6]. Линейность зависимости деформации ползучести от напряжения, когда материалы связующего и волокна обладают линейной ползучестью, на основании вышеизложенного получается теоретически.

3. На основании экспериментальных данных [3] для стеклянных волокон и бутвар-фенольного связывающего можно принять:

$$E_1 = 750 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; E_2 = 30 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; G_1 = 300 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2;$$

$$G_2 = 12 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; \nu_1 = \nu_2 = 0,25,$$

полагая $\gamma = \beta = 0,5$.

Используя эти данные и решая систему уравнений (6) на основании (5), получим следующие зависимости между деформациями и напряжениями для композиционного материала, в случае, когда $\sigma_{x1} > 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (0,028571 \sigma_x - 0,007143 \sigma_y - 0,007143 \sigma_z) \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_y &= (-0,007143 \sigma_x + 0,138249 \sigma_y - 0,02971 \sigma_z) \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_z &= (-0,007143 \sigma_x - 0,02971 \sigma_y + 0,138249 \sigma_z) \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (17)$$

Заменяя в уравнениях (6) g на $g_1 = \frac{E_1}{KE_1} = \frac{g}{K}$ и решая систему уравнений (5) и (6), получаем искомые неизвестные, зависящие от k . Подставляя эти значения напряжений в выражения (5) для ε_x , при ε_x получим

$$\frac{1}{E_x^{сж}} = \frac{4,5}{2K + 0,1} \cdot \frac{1}{75 \cdot 10^3} \quad (18)$$

Соотношение (18) может быть рассмотрено как уравнение относительно K , если из эксперимента имеем значение $E_x^{сж}$. Принимая $E_x^{сж} = 290 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$ из (18), получим $K = 0,79$.

Используя это значение K в выражениях (5) и (6), получаем следующие зависимости между деформациями и напряжениями, когда $\sigma_{x1} < 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (0,035715 \sigma_x - 0,008928 \sigma_y - 0,008029 \sigma_z) \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_y &= (-0,008929 \sigma_x + 0,141277 \sigma_y - 0,030771 \sigma_z) \cdot 10^{-4}; \\ \varepsilon_z &= (-0,008929 \sigma_x - 0,030771 \sigma_y + 0,141277 \sigma_z) \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Связь между относительными деформациями и касательными напряжениями получается на основании (11), (15) и (16):

$$\gamma_{yz} = 0,4353 \cdot 10^{-4} \cdot \tau_{yz}; \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0,312309 \cdot 10^{-4} \cdot \tau_{xz}.$$

Пользуясь случаем автор выражает свою благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Ա. Ս. ՍՈՂԱՅԱՆ

ԽԵՍՏ ՄԻԱՌՈՂՂԱՄԵ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻ ԵՎ ԶԳՄԱՆ ՈՒ ՍԵՂՄՄԱՆ ՏԱՐՔԵՐ
ԴԻՄԱԳՐՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ
ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՊԻ ՎԵՐԱՆԵՐՅԱԼ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Աշխատանքում որոշակի մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում է մի ուղ-
ղությամբ թելերով ամրացված կոմպոզիցիոն նյութի համար լարումների և
ղեֆորմացիաների միջև մոտավոր կապը: Ենթադրվում է, որ թելիկի դիմա-
դրությունը սեղմվելիս ավելի փոքր է, քան ձգվելիս, որը պայմանավորված է
սեղմվելիս թելիկի ուղղազգծային ձևի խախտմամբ:

Ստացված հավասարումների սխեմները նախալորություն է տալիս, դի-
տենսիոն թելիկների և լիցրի առաձգական հատկությունները և ամրացման
տեղերը, գտնել կոմպոզիցիոն նյութի առաձգականության մոդուլները:

Ապակեթելերով և բուսվար-ֆենոլային կապակցիչով նյութի համար կա-
տարված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Брызгалов Г. И. К расчету внутренних усилий и деформаций в стеклопластике типа АГ-1С. Пластические массы, № 7, М., 1964.
2. Shaffer B. W. Stress-Strain Relations of Reinforced Plastics Parallel and Normal to Their Internal Filaments, AIAA, Journ., v. 2, № 2, 1964.
3. Рабинович А. Я., Верховский И. А. Об упругих постоянных, ориентированных стеклопластиков. Инженерный журнал, т. IV, вып. 1, 1964.
4. Огибалов П. М., Суворова Ю. В. Механика армированных пластиков. Изд. МГУ, 1965.
5. Леонтьев И. Л. Упругие деформации древесины, Л., 1952.
6. Работнов Ю. И. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, т. 12, вып. I, 1948.