ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XIX, № 5, 1966 Серия технических наук

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Н. П. РУССКИХ

О ФЛУКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ЕМКОСТНОГО ПАРАМЕТРОНА, РАБОТАЮЩЕГО В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

В статье рассматриваются флуктуации амплитуды и фазы, вызванные собственными шумами параметрона. Эти собственные шумы представляются как нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $\frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1)$. Такое представление базируется на предположении, что источником собственных шумов являются тепловые шумы сопротивлений схемы и дробовый шум запертого $p-n$ перехода. Одноконтурная параметронная ячейка может быть представлена эквивалентной схемой, показанной на рис. 1. Здесь C_k — дифференциальная емкость $p-n$ перехода, величина которой определяется соотношением

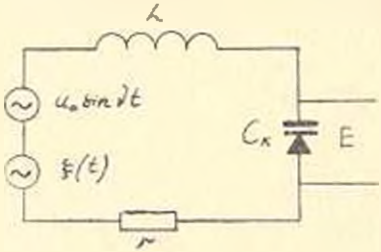

Рис. 1. Эквивалентная схема одноконтурной параметронной ячейки.

$$C_k=\frac{C_0}{\sqrt{1-\frac{u}{\varphi_k-E}}}, \tag{1}$$

где C_0 — емкость при отсутствии внешнего напряжения;

φ_k — контактная разность потенциалов;

u — напряжение на емкости, обусловленное параметрическим возбуждением;

E — постоянное напряжение смещения в рабочей точке.

Дифференциальное уравнение контура с учетом воздействия на него флуктуационного колебания имеет следующий вид:

$$Li' + ri - u = u_0 \sin \nu t + \xi(t), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ — белый шум с функцией корреляции

$$<\xi(t_1)\xi(t_2)> = \frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1).$$

При подстановке в уравнение (2) соотношения для тока через напряжение, разлагая в ряд подкоренное выражение в (1), получим следующее дифференциальное уравнение контура в относительных величинах

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -2\delta\dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2}(1+x) + \omega^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8}\right) +$$
$$+ x_0\omega^2\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right)\cos\nu t + \omega^2\eta(t)\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right), \tag{3}$$

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ — резонансная частота контура в рабочей точке;

$\delta = \frac{r}{2L}$ — затухание контура;

$x = \frac{u}{\varphi_k - E}$ — относительная величина амплитуды переменного напряжения на $p-n$ переходе;

$x_0 = \frac{u_0}{\varphi_k - E}$ — относительная величина амплитуды напряжения накачки;

ν — частота накачки;

$\eta(t) = \frac{\xi(t)}{\varphi_k - E}$ — относительная величина флуктуационного напряжения.

Нелинейное дифференциальное уравнение (3), содержащее случайную функцию времени $\eta(t)$, решается для главного демультипликационного резонанса по методу Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. В первом приближении решение ищется в виде $x = A\cos\psi$,

где $\psi = \frac{\nu}{2}t + \vartheta$.

Амплитуда и фаза колебаний основной частоты, отсчитываемая от фазы колебаний накачки, характеризуются следующей системой укороченных уравнений в стандартной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{2\omega}{\nu}\delta A + \dfrac{x_0\omega^2 A}{4\nu}\left(1 + \dfrac{A^2}{16}\right)\sin 2\vartheta - \omega\eta(t)\left(1 - \dfrac{A^2}{16} + \dfrac{A^2}{32}\right)\sin\psi \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{\omega^2 - \left(\dfrac{\nu}{2}\right)^2}{\nu} + \dfrac{A^2\omega^2}{32\nu} + \dfrac{x_0\omega^2}{4\nu}\left(1 + \dfrac{A^2}{8}\right)\cos 2\vartheta - \end{cases}$$
$$-\omega\eta(t)\left(\frac{1}{A} + \frac{3}{32}A\right) - \omega\eta(t)\left(\frac{3}{128}A^2 + \frac{1}{4}\right). \tag{4}$$

Пульсации из флуктуационной части стандартных уравнений не исключались, были лишь отброшены для первого приближения члены, имеющие при себе сомножители $\sin 2\psi$, $\cos 2\psi$, $\sin 3\psi$, $\cos 3\psi$ и т. д. Очевидно, что собственные шумы параметрона вызывают малые отклонения амплитуды и фазы от их стационарных значений. Поэтому для оценки флуктуаций амплитуды и фазы можно применить метод линеаризации уравнений (4) в окрестности стационарного состояния.

Обозначим флуктуации амплитуды и фазы, вызванные шумом, через

$$a = A - A_{cm};\ \varphi = \vartheta - \vartheta_{cm},$$

где A_{cm} и ϑ_{cm} — стационарные значения амплитуды и фазы. Линеаризованные уравнения относительно флуктуаций амплитуды и фазы имеют следующий вид:

$$\left|\begin{aligned} &\frac{da}{dt} + Ba = -\eta(t)\,\omega\sin\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_{cm}\right); \\ &\frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = -Fa - \frac{\omega}{A_{cm}}\eta(t)\cos\left(\frac{\nu}{2}t + \vartheta_{cm}\right) + \eta(t)\frac{\omega}{4}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

где

$$B = \frac{2\omega}{\nu}\delta - \frac{x_0\omega^2}{4\nu}\sin 2\vartheta_{cm} - \frac{3x_0\omega^2}{64\nu}A_{cm}^2\sin 2\vartheta_{cm};$$

$$D = \frac{x_0\omega^2}{2\nu}\sin 2\vartheta_{cm} + \frac{x_0\omega^2}{16\nu}A_{cm}^2\sin 2\vartheta_{cm};$$

$$F = \frac{\omega^2}{16\nu}A_{cm} + \frac{x_0\omega^2}{16\nu}A_{cm}\cos 2\vartheta_{cm}.$$

Первое выражение в (5) является линейным дифференциальным уравнением и имеет решение

$$a(t) = -\omega\int_{-\infty}^{t} e^{-B(t-y)}\eta(y)\sin\left(\frac{\nu}{2}y + \vartheta_{cm}\right)dy, \tag{6}$$

которое ищется таким образом, чтобы $a(t)$ являлось стационарным случайным процессом, начавшимся в далеком прошлом.

Из второго так же линейного уравнения (5) находим флуктуационный набег фазы за время T

$$\Delta\varphi(T) = \varphi(t_0 + T) - \varphi(t_0) = F\omega e^{-DT}\int_0^T e^{-(B-D)t}dt\int_{-\infty}^{t} e^{By}\eta(y)\sin\left(\frac{\nu}{2}y + \vartheta_{cm}\right)dy + \frac{\omega}{A_{cm}}e^{-DT}\int_0^T e^{Dy}\eta(y)\cos\left(\frac{\nu}{2}y + \vartheta_{cm}\right)dy + \frac{\omega}{4}e^{-DT}\int_0^T e^{Dy}\eta(y)\,dy.$$

Последнее выражение для случайного набега фазы упрощается переходом от двойных интегралов к одинарным. Обозначим через

$$f(y) = e^{By}\eta(y)\sin\left(\frac{\nu}{2}y + \vartheta_{cm}\right)$$

и положим

$$\int_0^T\int_a^t e^{-(B-D)t} f(y)\,dy = F(T). \tag{7}$$

Тогда можно показать, что $F(T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F'' + (B-D)F' = e^{-(B-D)T} f(T). \tag{8}$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий

$$F(0) = 0 \text{ и } e^{(B-D)T}F'(T) \to 0 \text{ при } T \to -\infty$$

может быть записано в виде

$$F(T) = \frac{1}{B-D}\left|\int_0^T \left(e^{-(B-D)t} - e^{-(B-D)T}\right) f(t)\,dt + \right.$$

$$+ \left(1 - e^{-(B-D)T}\right)\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt. \tag{9}$$

Тогда для $\Delta\theta(T)$ имеем;

$$\Delta\theta(T) = \frac{F\omega}{B-D}e^{-DT}\int_0^T e^{Dt_1}\eta(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 -$$

$$-\frac{F\omega}{B-D}e^{-BT}\int_0^T e^{Bt}\eta(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 +$$

$$+\frac{F\omega}{B-D}\left(1 - e^{-(B-D)T}\right)\int_{-\infty}^0 e^{Bt_1}\eta(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 +$$

$$+\frac{\omega}{A_{cm}}e^{-DT}\int_0^T e^{Dt_1}\eta(t_1)\cos\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 + \frac{\omega}{4}e^{-DT}\int_0^T e^{Dt_1}\eta(t_1)\,dt_1. \tag{10}$$

Выражения (6) и (7) определяют флуктуации амплитуды и фазы, которые являются нормальными случайными процессами, полученными из нормальных флуктуаций $\eta(t)$ путем линейных преобразований.

Для вычисления дисперсии флуктуаций амплитуды найдем корреляционную функцию

$$\langle a(t)a(t+\tau)\rangle = \omega^2 \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-B(2t+\tau-t_1-t_2)} \langle \eta_1(t_1)\eta_1(t_2)\rangle \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_2 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 dt_2, \tag{11}$$

где

$$\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_2 + \vartheta_{cm}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\nu}{2}\left(t_1 - t_2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \frac{\nu}{2}t_2 + 2\vartheta_{cm}\right).$$

Автор интересовался плавными изменениями амплитуды и фазы, вызванными шумом, поэтому вибрационные члены частоты $2\cdot\frac{\nu}{2}$ отбрасывались, произведя усреднение за период частоты $\frac{\nu}{2}$.

Произведя в (8) замену переменных интегрирования

$$t_1 = \frac{\sigma - \tau + 2s}{2}; \quad t_2 = \frac{\tau - \sigma + 2s}{2};$$

получим

$$\langle a(t)a(t+\tau)\rangle = \frac{\omega^2}{2}e^{-B(2t+\tau)}\left[\int_{-\infty}^{0}\langle \eta_1\eta_{1\sigma-\tau}\rangle\cos\frac{\nu}{2}(\sigma-\tau)\,d\sigma\int_{-\infty}^{t+\frac{\sigma}{2}+\frac{\tau}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times e^{2Bs}\,ds + \int_{0}^{\infty}\langle \eta_1\eta_{1\sigma-\tau}\rangle\cos\frac{\nu}{2}(\sigma-\tau)\,d\sigma\int_{-\infty}^{t+\frac{\tau}{2}-\frac{\sigma}{2}}e^{2Bs}\,ds\right]. \tag{12}$$

Проинтегрировав (9) по s, еще раз заменив переменную интегрирования $\sigma - \tau = \rho$ и учитывая, что $\eta_1(t)$ является белым шумом с функцией корреляции $\langle \eta_1(t_1)\eta_1(t_2)\rangle = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)$,

получим

$$\langle a(t)a(t+\tau)\rangle = \frac{\omega^2 N_0}{8B}e^{-B\tau}. \tag{13}$$

При $\tau = 0$ определяется дисперсия флуктуаций амплитуды

$$\sigma_a^2 = \frac{\omega^2 N_0}{8B}. \tag{14}$$

Корреляционная функция для случайного набега фазы в самом общем виде записывается следующим образом

$$\langle \theta(T)\theta(T+\tau)\rangle = \left\langle\left[\frac{F\omega}{B-D}e^{-DT}\int_0^T e^{Dt_1}\eta_1(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1 + \vartheta_{cm}\right)dt_1 - \right.\right.$$

$$-\frac{F\omega}{B-D}e^{-BT}\int\limits_0^T e^{Bt_1}\eta(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}t_1+\vartheta_{cm}\right)dt_1+\frac{F\omega}{B-D}\left(1-e^{-(B-D)T}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^0 e^{Bt_1}\eta(t_1)\sin\left(\frac{\nu}{2}\,t_1+\vartheta_{cm}\right)dt_1+\frac{\omega}{A_{cm}}e^{-DT}\int\limits_0^T e^{Dt_1}\eta(t_1)\cos\Big(\frac{\nu}{2}t_1+$$

$$+\vartheta_{cm}\Big)dt_1+\frac{\omega}{4}e^{-DT}\int\limits_0^T e^{Dt_1}\eta(t_1)\,dt_1\Bigg]\times\Bigg[\frac{F\omega}{B}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^{T+\tau} e^{Dt_2}\eta(t_2)\sin\times$$

$$\times\left(\frac{\nu}{2}t_2+\vartheta_{cm}\right)dt_2-\frac{F\omega}{B}\,e^{-B(T+\tau)}\int\limits_0^{T+\tau} e^{Bt_2}\eta(t_2)\sin)\left(\frac{\nu}{2}\,t_2+\vartheta_{cm}\right)dt_2+$$

$$+\frac{F\omega}{B}\left(1-e^{-(B-D)(T+\tau)}\right)\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{Bt_2}\eta(t_2)\sin\Big(\frac{\nu}{2}t_2+$$

$$+\vartheta_{cm}\Big)dt_2+\frac{\omega}{A_{cm}}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^{T+\tau} e^{Dt_2}\eta(t_2)\cos\left(\frac{\nu}{2}t_2+\vartheta_{cm}\right)dt_2+$$

$$+\frac{\omega}{4}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^{T+\tau} e^{Dt_2}\eta(t_2)\,dt_2\Bigg]\Bigg\rangle. \qquad (15)$$

Учитывая, что мы интересуемся плавными изменениями фазы и свойствами дельта-функции, выпишем после соответствующих преобразований для $\langle\theta(T)\,\theta(T+\tau)\rangle$ только те интегралы, которые в этом случае необходимо просчитывать

$$\langle\theta(T)\,\theta(T+\tau)\rangle=\frac{F^2\omega^2}{2(B-D)^2}\Bigg[e^{-DT}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau}e^{D(t_1+t_2)}\langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle\times$$

$$\times\cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1\,dt_2-e^{-BT}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau}e^{Bt_1}e^{Dt_2}\langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle\times$$

$$\times\cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2+(1-e^{-(B-D)T})\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^{T+\tau}e^{Bt_1}\times$$

$$\times e^{Dt_2}\langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle\cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2-e^{-(B+D)T}e^{-DT}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau}\times$$

$$\times e^{Dt_1}e^{Bt_1}\langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle\cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2+e^{-B(2T+\tau)}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau}e^{B(t_1+t_2)}\times$$

$$\times\langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle\cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2-e^{-B(T+\tau)}(1-e^{-(B-D)T})\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^{T+\tau}\times$$

$$\times e^{B(t_1+t_2)} \langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle \cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2 + e^{-DT}(1-e^{-(B-D)(T+\tau)})\times$$

$$\times\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{Dt_1}e^{Bt_2}\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle \cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2 -$$

$$-e^{-BT}(1-e^{-(B-D)(T+\tau)})\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{B(t_1-t_2)}\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle \cos\frac{\nu}{2}(t_1-$$

$$-t_2)\,dt_1dt_2 + (1-e^{-(B-D)T})(1-e^{-(B-D)(T+\tau)})\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{B(t_1+t_2)}\times$$

$$\times\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle \cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2\Bigg] + \frac{\omega^2}{16}e^{-DT}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau} e^{D(t_1+t_2)}dt_1dt_2 +$$

$$+\frac{\omega^2}{2A_{cm}^2}e^{-DT}e^{-D(T+\tau)}\int\limits_0^T\int\limits_0^{T+\tau} e^{D(t_1+t_2)}\langle \eta(t_1)\eta(t_2)\rangle \cos\frac{\nu}{2}(t_1-t_2)\,dt_1dt_2. \tag{16}$$

Производя в (11) замену переменных интегрирования

$$t_1=\frac{\sigma-\tau+2s}{2};\; t_2=\frac{\tau-\sigma+2s}{2}$$

и проинтегрировав его, полагая в окончательном выражении для $\langle\theta(T)\theta(T+\tau)\rangle$, $\tau=0$, получим следующее соотношение для дисперсии случайного набега фазы

$$\sigma_\theta^2=\frac{F^2\omega^2}{(B-D)^2}\frac{N_0}{4}\left[\frac{1}{2D}(1-e^{-2DT})-\frac{2}{B+D}(1-e^{-(B+D)T})+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2B}(1-e^{-2BT})\right]+\frac{\omega^2}{8D}N_0(1-e^{-2DT})\left[\frac{1}{A_{cm}^2}+\frac{1}{8}\right]. \tag{17}$$

Из анализа (16) следует, что дисперсия фазы установившихся в параметроне колебаний при малых $T\left(T\ll\dfrac{1}{B+D}\right)$ растет пропорционально T, а при больших T не зависит от времени наблюдения. Коэффициенты B и D являются временными постоянными, определяющими скорость изменения амплитуды и фазы со временем.

При $T\to\infty$ для случайного набега фазы имеем выражение

$$\sigma_\theta^2=\frac{\omega^2}{8D}N_0\left(\frac{F^2}{B(B+D)}+\frac{1}{A_{cm}^2}+\frac{1}{8}\right). \tag{18}$$

То же самое выражение можно было получить, если в решении второго из дифференциальных уравнений (5) искать флуктуации фазы как стационарный случайный процесс, начавшийся в далеком прошлом.

Заключение

В работе дается решение новой задачи о флуктуациях параметрически возбуждаемой системы под действием случайной нагрузки, результаты которой могут быть использованы при исследовании радиотехнических и механических систем с конечным числом степеней свободы. Получены статистические характеристики амплитуды и фазы емкостного параметрона методом линеаризации уравнений первого приближения. В выражении (18) для дисперсии фазы член $\frac{\omega^2 F^2}{8BD(B+D)}\cdot N_0$ отражает влияние флуктуаций амплитуды на флуктуации фазы.

МАИ им. С. Орджоникидзе

Поступило 26.V.1966.

Ն. Պ. ՌՈՒՍԻՆ

ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՌԵԺԻՄՈՒՄ ԱՇԽԱՏՈՂ ՈՒՆԱԿԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՆԻ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅԻ ԵՎ ՖԱԶԱՅԻ ՖԼՈՒԿՏՈՒԱՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում առաջին մոտավորությամբ հավասարումների գծայնացման միջոցով ստացված են ունակային պարամետրոնի ամպլիտուդայի և ֆազայի ստատիստիկ բնութագրերը: Ենթադրված է, որ պարամետրոնի ամպլիտուդայի և ֆազայի ֆլուկտուացիաները պայմանավորված են նրա սեփական աղմուկներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Советское радио, 1961.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963.