

В. К. БРУТЯН

ВЛИЯНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В СИСТЕМЕ  
 РАЗВЕТВЛЕННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ НА ОПТИМАЛЬНОЕ  
 УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОТУРБИНЫ

Одной из интересных задач в сложной системе трубопроводов является оптимизация гидравлического удара. Оптимальные процессы с одним запаздывающим аргументом уже рассматривались в работах [1, 2]. В работе [3] результаты [1, 2] применены для исследования волновых явлений в напорном трубопроводе.

Нами выведено необходимое условие оптимальности для уравнений с тремя запаздываниями, когда два агрегата питаются из главного подводящего трубопровода, имеющего разветвление на определенном расстоянии (рис. 1) и приведен порядок исследований. До начала управления расход и давление воды постоянны и равны соответственно  $Q_1(P, 0)$  и  $H_1(P, 0)$ \*.

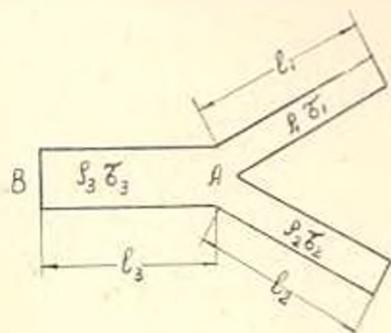


Рис. 1.

Вследствие управления в начальный момент времени, стационарный режим движения воды нарушается, скорость и давление становятся некоторыми функциями времени и координат

сечения трубопроводов, т. е.  $Q_i = Q_i(P, l_i)$  и  $H_i = H_i(P, l_i)$ . Для каждого участка трубопроводов справедливы следующие соотношения [5]:

$$H_i(P, l_i) = H_i(P, 0) \operatorname{ch} \frac{P \tau_i}{2} - \tau_i Q_i(P, 0) \operatorname{sh} \frac{P \tau_i}{2};$$

$$Q_i(P, l_i) = Q_i(P, 0) \operatorname{ch} \frac{P \tau_i}{2} - \frac{1}{\tau_i} H_i(P, 0) \operatorname{sh} \frac{P \tau_i}{2}. \quad (1)$$

где  $\tau_i$  — ударная характеристика трубопровода,  $\tau_i$  — фаза гидравлического удара,  $l_i$  — длина участка.

Для упрощения дальнейших выкладок будем считать трубопровод симметричным, что практически всегда имеет место [6]. Очевид-

\* Для расчета разветвленного трубопровода целесообразно применить операционный метод [4].

но, что граничные условия при данной постановке задачи распадаются на два вида. Во-первых, это уравнение неразрывности расхода, которое принимается справедливым и для нестационарного режима. Во-вторых, пренебрегая потерями напора в разветвленной системе, получаем условие одинакового давления в узле  $A$  для всех трубопроводов

$$Q_1(P, l_1) = Q_1(P, 0) + Q_2(P, 0); H_1(P, 0) = H_2(P, 0) = H_3(P, l_2).$$

Учитывая еще, что обычно  $H_3(P, 0)$ , можно получить общее выражение для нестационарного процесса давления перед турбинами в зависимости от изменений расходов:

$$H_1(P, l_1) = -\frac{\rho}{2} \left[ \operatorname{th} \frac{P(\tau' + \tau_3)}{2} + \operatorname{th} \frac{P\tau'}{2} \right] Q_1(P, l_1) - \\ - \frac{\rho}{2} \left[ \operatorname{th} \frac{P(\tau' + \tau_3)}{2} - \operatorname{th} \frac{P\tau'}{2} \right] Q_2(P, l_2); \quad (2)$$

$$H_2(P, l_2) = -\frac{\rho}{2} \left[ \operatorname{th} \frac{P(\tau' + \tau_3)}{2} + \operatorname{th} \frac{P\tau'}{2} \right] Q_2(P, l_2) - \\ - \frac{\rho}{2} \left[ \operatorname{th} \frac{P(\tau' + \tau_3)}{2} - \operatorname{th} \frac{P\tau'}{2} \right] Q_1(P, l_1). \quad (3)$$

Если оба агрегата работают в режиме группового управления, то

$$Q_1(P, l_1) = Q_2(P, l_2) = Q(P, l); H_1(P, l_1) = H_2(P, l_2) = H(P, l), \quad (4)$$

где

$$H(P, l) = -\rho \operatorname{th} \frac{P(\tau' + \tau_3)}{2} Q(P, l). \quad (5)$$

Если в (2) и (3) вернуться от изображения к оригиналу, то получим:

$$h_1(t_1) + h_1(t_1 - \tau') + h_1(t_1 - \tau' - \tau_3) + h_1(t_1 - 2\tau' - \tau_3) = -\rho [q_1(t_1) - \\ - q_1(t_1 - 2\tau' - \tau_3) + q_2(t_1 - \tau') - q_2(t_1 - \tau' - \tau_3)]; \quad (6)$$

$$h_2(t_1) + h_2(t_1 - \tau') + h_2(t_1 - \tau' - \tau_3) + h_2(t_1 - 2\tau' - \tau_3) = -\rho [q_1(t_1 - \\ - \tau') - q_1(t_1 - \tau' - \tau_3) + q_2(t_1) - q_2(t_1 - 2\tau' - \tau_3)].$$

Таким образом, основная особенность рассматриваемой системы состоит в том, что динамические изменения и давления расхода обеих турбин взаимно влияют друг на друга, и процесс регулирования одной из них отражается на режиме второй.

При оптимизации влияния гидравлического удара необходимы следующие уравнения регулирования гидротурбины, которые выводятся в [7].

Уравнение машины

$$T_i \dot{\varphi}_i = a_{i1} \mu + a_{i2} h_i + a_{i3} \varphi_i, \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

Уравнение главных сервомеханизмов

$$T_j \dot{\mu}_i = z_i \quad (i=1, 2; j=3, 4). \quad (8)$$

Условия расхода воды поступающей в турбины

$$q_i = b_{11} \mu_i + \left( b_{12} + \frac{1}{2} \right) h_i + b_{13} z_i. \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

Здесь  $\varphi_i$ ,  $\mu_i$ ,  $h_i$ ,  $q_i$  и  $z_i$  — относительные изменения соответственно: угловой скорости, смещения поршня сервомотора, давления, скорости потоков и главных золотников.

Сводим все уравнения в систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) - a_1^1 x_2(t) + a_2^1 x_3(t) + a_3^1 x_4(t), \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t), \\ a_4^1 x_3(t) + a_5^1 x_4(t) + b_1^2 x_4(t - \tau_1) + c_1^2 x_4(t - \tau_2) + d_1^2 x_4(t - \tau_3) + \\ + b_2^3 x_4(t - \tau_1) + c_2^3 x_4(t - \tau_2) + d_2^3 x_4(t - \tau_3) = 0; \\ a_1^4 x_1(t) + a_2^4 x_2(t) + a_3^4 x_3(t) + a_4^4 x_4(t) = 0; \\ \dot{x}_5(t) = a_5^5 x_5(t) + a_6^5 x_6(t) + a_7^5 x_7(t); \\ \dot{x}_6(t) = u_2(t), \\ a_7^5 x_7(t) + a_8^5 x_8(t) + b_7^6 x_8(t - \tau_1) + c_7^6 x_8(t - \tau_2) + d_7^6 x_8(t - \tau_3) + \\ + b_8^6 x_8(t - \tau_1) + c_8^6 x_8(t - \tau_2) + d_8^6 x_8(t - \tau_3) = 0; \\ a_5^8 x_5(t) + a_6^8 x_6(t) + a_7^8 x_7(t) + a_8^8 x_8(t) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При нулевых начальных условиях. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_1 = z_1; \quad x_2 = \mu_2; \quad x_3 = h_1; \quad x_4 = q_1; \quad x_5 = z_2; \quad x_6 = \mu_2; \quad x_7 = h_1; \quad x_8 = q_1; \\ a_1^4 = a_{12}; \quad a_2^4 = a_{21}; \quad a_3^4 = a_{12}; \quad a_4^4 = b_{11}; \quad a_5^4 = b_{12} + \frac{1}{2}; \quad a_6^4 = b_{13}; \quad a_7^4 = a_{21}; \\ a_5^8 = a_{21}; \quad a_6^8 = a_{22}; \quad a_7^8 = b_{22}; \quad a_8^8 = b_{21}; \quad a_9^8 = b_{22} + \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$t = \frac{t_1}{T_1}; \quad \tau_1 = \frac{\tau_1'}{T_1}; \quad \tau_2 = \frac{\tau_2' + \tau_3'}{T_1}; \quad \tau_3 = \frac{2\tau_1' + \tau_3'}{T_1}; \quad u_1 = \frac{T_1}{T_2} \tau_1; \quad u_2 = \frac{T_2}{T_4} \tau_2.$$

Перейдем к необходимым условиям оптимальности для такой системы. Систему уравнений (10) представим в общем случае в следующем виде:

$$\dot{x}_i(t) = f_i | x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), x(t - \tau_3), u(t) | \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (11)$$

с условиями  $x_i(0) = 0$ , причем без ограничения общности можем считать, что  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Случай, когда  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ , всегда можно свести к строгому неравенству заменой переменных и вводом новой функции. Пусть  $x(t)$  при  $t \in [t_0, t_1]$  решение уравнения [11], соответствующее допустимому управлению  $u$  и условию  $x_i(0) = 0$ . Для того, чтобы допустимое управление было оптимальным, необходимо, чтобы

скалярное произведение  $H = \langle \psi, f \rangle$  достигло максимального значения. При применении принципа максимума необходимо знать лишь  $\psi_i(t)$ . Чтобы его найти нужно решить сопряжены уравнения:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha(t) \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial x_i} \quad (12)$$

Интегрируя систему (11) с нулевыми начальными условиями и, учитывая (12) нетрудно показать, что функцию  $\psi$  можно сформулировать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & - \left| \int_{t_0}^{t+\tau_1} \left[ \frac{\partial f_\alpha(v)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_1)}{\partial y_{11}} + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_2)}{\partial y_{21}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_3)}{\partial y_{31}} \right] \psi_\alpha(v) dv + \int_{t_0}^{t+\tau_2} \left[ \frac{\partial f_\alpha(v)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_1)}{\partial y_{11}} + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_2)}{\partial y_{21}} \right] \psi_\alpha(v) dv + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^{t+\tau_3} \left[ \frac{\partial f_\alpha(v)}{\partial x_i} + \frac{\partial f_\alpha(v+\tau_1)}{\partial y_{11}} \right] \psi_\alpha(v) dv + \int_{t_0}^t \frac{\partial f_\alpha(v)}{\partial x_i} \psi_\alpha(v) dv + \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial u_i} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $y_{j1} = x_i(t - \tau_j)$  ( $j=1, 2, 3$ ).

Уравнение (13) позволяет, эффективно применяя методы последовательных приближений, выводить необходимое условие оптимальности для уравнений с тремя запаздывающими аргументами. Оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} = & - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial x_i} \psi_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_1)}{\partial y_{11}} \psi_\alpha(t+\tau_1) - \\ & - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_2)}{\partial y_{21}} \psi_\alpha(t+\tau_2) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_3)}{\partial y_{31}} \psi_\alpha(t+\tau_3) \text{ при } t \in [t_k, t_k - \tau_3]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} = & - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial x_i} \psi_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_1)}{\partial y_{11}} \psi_\alpha(t+\tau_1) - \\ & - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_2)}{\partial y_{21}} \psi_\alpha(t+\tau_2) \text{ при } t \in [t_k - \tau_2, t_k - \tau_3]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_i(t)}{dt} = & - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial x_i} \psi_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t+\tau_1)}{\partial y_{11}} \psi_\alpha(t+\tau_1), \\ & \text{при } t \in [t_k - \tau_1, t_k - \tau_3]; \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha(t)}{\partial x_i} \psi_\alpha(t) \text{ при } t \in [t_k - \tau_3, t_k],$$

$$\psi(t_0) = 0.$$

Выведенное необходимое условие позволяет переходить к определению сопряженных уравнений для оптимального управления гидротурбины с учетом гидравлического удара. Пользуясь (10), можно показать, что система уравнений для  $\psi_1(t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^8 a_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t) - \sum_{\alpha=1}^8 b_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_2) - \sum_{\alpha=1}^8 c_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_3) - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^8 d_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_3) \text{ при } t \in [t_n, t_k - \tau_3]; \\ \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^8 a_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t) - \sum_{\alpha=1}^8 b_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_1) - \sum_{\alpha=1}^8 c_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_2) \\ &\quad \text{при } t \in [t_k - \tau_3, t_k - \tau_2]; \\ \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^8 a_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t) - \sum_{\alpha=1}^8 b_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t + \tau_1) \text{ при } t \in [t_k - \tau_2, t_k - \tau_1]; \\ \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= -\sum_{\alpha=1}^8 a_{\alpha}^1 \psi_{\alpha}(t) \text{ при } t \in [t_k - \tau_1, t_k]. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно принципа максимума оптимальному процессу по воздействию отвечают такие  $u_i(t)$ , при которых будет максимальной величина [2, 3]

$$H = \sum_{m=1}^8 \psi_m \cdot \sum_{l=1}^r C_l^m u_l(t). \quad (16)$$

Для рассматриваемой задачи максимум  $H$  будет иметь место при

$$\max \psi_2 u_2 + \max \psi_6 u_6. \quad (17)$$

В частном случае очевидно, что если оба агрегата работают одновременно и в режиме группового управления, то решения сопряженных функций одинаковы. Это означает, что

$$u_1 = u_2 = \text{sign } \psi_2(t) = \text{sign } \psi_6(t).$$

Этот случай подробно исследован в работе [3].

В формуле (17) подборы величины  $u_1$  и  $u_2$  максимизирующего  $H$  приводит к выражениям

$$u_1 = \text{sign } \psi_2(t); \quad u_2 = \text{sign } \psi_6(t).$$

Законы переключения  $u_i(t)$  найдем, зная, поведение  $\psi_2(t)$  и  $\psi_6(t)$ . Ниже приводится пример иллюстрирующий порядок исследования. Основные данные:

$$\begin{aligned} a_1^1 &= -1 \quad a_2^1 = 1 \quad a_3^1 = 1,5 \quad a_4^1 = 0,4 \quad a_5^1 = 0,3 \quad a_6^1 = 0,2 \\ a_7^1 &= b_7^1 = c_7^1 = d_7^1 = a_7^2 = b_7^2 = c_7^2 = d_7^2 = 1. \\ a_4^2 &= a_8^2 = 1, \quad a_1^2 = b_1^2 = c_1^2 = d_1^2 = a_8^2 = b_8^2 = c_8^2 = d_8^2 = \rho = 1, \quad 2. \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет исследование влияния гидравлического удара на оптимальное управление при закрытии одной турбины, когда другая работает с полным открытием. Поэтому находим решение систем уравнений при разных начальных условиях, так как они определяют состояние гидравлического удара в разных трубопроводах. Решения сопряженных уравнений, когда  $\tau_1=0,2$ ;  $\tau_2=0,4$ ;

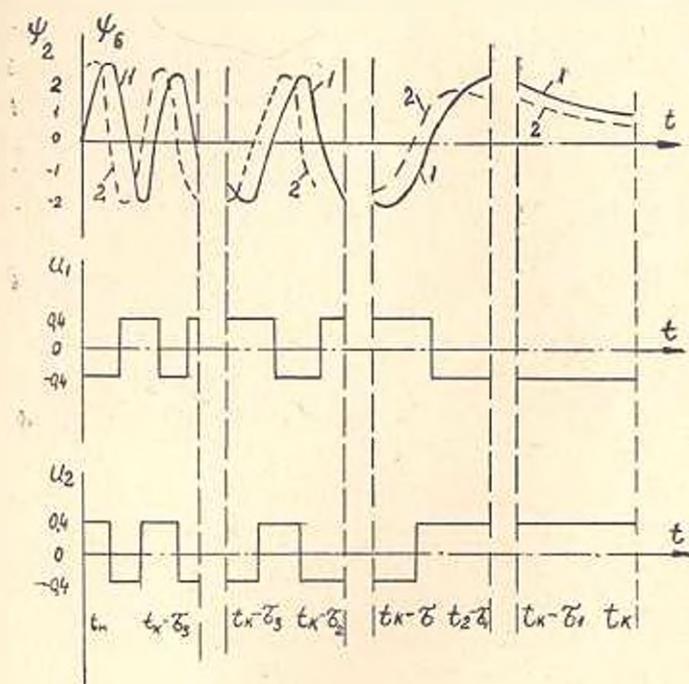


Рис. 2.

$\tau_2=0,6$ , приведены в виде кривых на рис. 2. Из этих кривых видно что  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  меняют знаки в интервале  $t^* \leq t \leq t_k - \tau_2$  не более трех раз, в интервале  $t_k - \tau_2 \leq t \leq t_k - \tau_1$  два раза, в интервале  $t_k - \tau_1 \leq t \leq t_k$  не более одного раза. Решения сопряженных уравнений в интервале  $t_k - \tau_2 \leq t \leq t_k$  представляют собой монотонно убывающие функции.

Таким образом, полученные соотношения означают, что процесс оптимального управления состоит из  $3+2+1$  интервалов для первого трубопровода и стольких же интервалов для второго трубопровода, в каждом из которых  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  принимают свои предельные значения. Отметим, что точки пересечения кривых с осью  $t$  зависят только от начальных условий, т. е. от состояния наброса и сброса нагрузки гидротурбины. Законы изменения регулирующего органа  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , соответствующие оптимальному процессу также показаны на рис. 2. Системы уравнений, определяющие сопряженные функции решены в ВЦ АН АрмССР и ЕГУ.

## Վ. Ե. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

ՃՅՈՒՂԱՎՈՐՎԱԾ ԽՈՂՈՎԱԿԱՏԱՐՆԵՐՈՒՄ ՀԻՒՐԱՎԻԿԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԻ  
ԱԶԳԵՅՑՈՒԹՅՈՒՆԵՐ ՀԻՒՐՈՏՈՒՐՈՒՆԵՆԵՐԻ ԼԱՎԱԿՈՒՅՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՎՐԱ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Արտակարգ հետաքրքիր խնդիր է իրենից ներկայացնում հիդրավիկական հարվածի ազդեցության լավագույն ղեկավարումը: Այս աշխատանքում զիտարկված են այդ ազդեցության լավագույն ղեկավարման որոշ հարցեր, խողովակատարների բարդ սխառեմում: Լավագույն ղեկավարման խնդիրը բարդանում է նրանով, որ հիդրոտուրբինների կարգավորման հավասարումները իրենցից ներկայացնում են փոխադարձորեն կապված սխառեմ: Եույց է տրված, որ այդ սխառեմը իրենից ներկայացնում է շեղվող (ուշացող) արգումենտներով դիֆֆերենցիալ հավասարումների մի ամբողջություն: Ապացուցված է այն անհրամաձայտ պայմանը, որին պետք է բաժանորեն լավագույն ղեկավարող մեծությունների արժեքները և ցույց է տրված հետազոտման մեթոդը:

Այս աշխատանքը կատարելիս հեղինակը օգտագործել է լավագույն ղեկավարման Լ. Ս. Պանտրյագինի մշակած մաթեմատիկական թևորիան:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961.
2. Харатишвили Г. Л. ДАН СССР, 136, 39, 1961.
3. Арнович Г. В. Изв. ВУЗ, Радиофизика, т. 5, 2, 1962.
4. Крылов Ю. В. Сборник МВТУ им. Баумана, 1955.
5. Электродинамическое моделирование энергетических систем. Под редакцией М. И. Костенко. Издание АН СССР. М.—Л., 1959.
6. П. Башин О. И., Посыпкина Н. П., Семенов В. В. Сб. «Системы управления и передачи информации в электроэнергетике». Изд. «Наука», М.—Л., 1966.
7. Гинзбург И. Уч. зап. ЛГУ, Механика, 217, 144, 1957.