ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XIX, № 1, 1966 Серия технических наук

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Н. Т. ХАЧАТРЯН

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ ОСЦИЛЛЯТОРУ

В статье приводится способ использования теоремы акад. С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах [1] для приближенного исследования некоторых нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$\ddot{x} + k^2 x - \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0 \tag{0.1}$$

$$x = x_0,\ \dot{x} = \dot{x}_0 \ \text{при}\ t = 0, \tag{0.2}$$

где k и ε постоянные, ε — малая величина.

1. Умножив уравнение (0.1) на $dx = \dot{x}dt$ и интегрируя в пределах от $t = 0$ до t, получим уравнение удвоенного баланса энергии системы

$$\dot{x}^2 + k^2 x^2 - \dot{x}_0^2 - k^2 x_0^2 - 2\varepsilon \int_0^t \dot{x} f(x, \dot{x})\, dt = 0. \tag{1.1}$$

Введем вспомогательный параметр ω и перепишем (1.1) в таком виде

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 - \dot{x}_0^2 - \omega^2 x_0^2 + Q = 0, \tag{1.2}$$

где

$$Q = (\omega^2 - k^2)(x_0^2 - x^2) - 2\varepsilon \int_0^t \dot{x} f(x, \dot{x})\, dt. \tag{1.3}$$

Интегрируя уравнение (1.2) методом последовательных приближений, полагая $Q = 0$, получим уравнение первого приближения с интегралом $x = z_1$

$$z_1 = a \sin(\omega t + \alpha), \tag{1.4}$$

где амплитуда a и начальная фаза α первого приближения определяются через начальные условия (0.2) формулами

$$a^2 = x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \tag{1.5}$$

Внеся z_1 в (1.3) вместо x, и полученное значение Q в (1.2), будем иметь уточненное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 a^2 - Q(\omega, t), \tag{1.6}$$

где

$$Q(\omega, t) = (\omega^2 - k^2)(x_0^2 - z_1^2) - 2\varepsilon \int_0^t \dot{z}_1 f(z_1, \dot{z}_1)\, dt. \tag{1.7}$$

Интегрируя (1.6) при тех же начальных условиях, находим решение во втором приближении $x = z_2$ в виде суммы двух слагаемых — главного члена (1.4) и члена корректива, учитывающего поправку от влияния $Q(\omega, t)$

$$z_2 = f(\omega, t) = z_1 + z(Q). \tag{1.8}$$

Подберем ω так, чтобы решение (1.8) было близко к точному интегралу исходного уравнения (0.1). Для этого пользуемся теоремой С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, которая в рассматриваемой задаче утверждает следующее положение. Если $Q(\omega, t) > 0$, то при всех t, не превосходящих определенного предела $t = \tau$, решение первого приближения (1.4) будет верхней границей для интеграла уравнения (0.1) и наоборот, если $Q(\omega, t) < 0$, то z_1 будет нижней границей. Обозначим через ω_1 и ω_2 значения параметра ω, которые обеспечивают выполнение неравенств

$$Q(\omega_1, t) > 0;\ Q(\omega_2, t) > 0. \tag{1.9}$$

Поскольку правая часть уравнения (1.6) должна быть всегда положительна, необходимо наложить на ω_1 дополнительное условие

$$Q(\omega_1, t) < \omega_1^2 a^2. \tag{1.10}$$

При $Q = 0$ будем иметь гармонический осциллятор с частотой ω и балансом энергии, равным энергии рассматриваемой нелинейной системы. Если нам удастся подобрать параметры ω_1 и ω_2 так, чтобы наряду с выполнением неравенств (1.9) и (1.10) абсолютные величины $Q(\omega_1, t)$ и $Q(\omega_2, t)$ были бы малыми, то очевидно, что при этом вилка между верхней и нижней границами будет сужена. Наличие малого параметра ε в выражении (1.7) позволяет всегда подобрать нужные значения для ω_1 и ω_2, если только интеграл, входящий в (1.7), будет ограниченной величиной на всем интервале времени t. Полагая, что названный интеграл этому условию удовлетворяет, уточненное решение задачи во втором приближении можно получить по одной из следующих формул

$$x = z_2 = f(\omega, t);\ \text{где}\ \omega = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot(\omega_1^2 + \omega_2^2)}; \tag{1.11}$$

$$x = z_2 f(\omega, t),\ \text{где}\ \omega = \frac{1}{2}\cdot(\omega_1 + \omega_2); \tag{1.12}$$

$$x = z_2 = \frac{1}{2}\,[f(\omega_1, t) + f(\omega_2, t)]. \tag{1.13}$$

Из этих трех вариантов представления решения во втором приближении в большинстве случаев предпочтительным является вариант (1.11).

Объясняется это тем. что в дифференциальном уравнении (1.6) главными слагаемыми, определяющими x^2, будут $\omega^2 x^2$ и $\omega^2 a^2$, а слагаемое $Q(\omega, t)$ дает член корректива, который будет малой величиной. Таким образом, задача об исследовании нелинейных систем, описываемых уравнением (0.1) приводится к определению параметров ω_1 и ω_2 из неравенств (1.9) и (1.10) и к интегрированию уравнения (1.6) при заданном $Q(\omega, t)$. Последний вопрос особого труда не представляет, поскольку уравнение (1.6) хорошо изучено [2]. Кроме этого, в практических расчетах часто представляет интерес не вид функциональной зависимости $x = x(t)$, а наибольшая амплитуда $A = x_{max}$, которая может быть определена без интегрирования уравнения (1.6) по следующей формуле

$$A^2 = x_{max}^2 = \left| a^2 - \frac{1}{\omega^2} Q(\omega, t) \right|_{max}. \qquad (1.14)$$

Что же касается вопроса выбора значений параметров ω_1 и ω_2, то его решение обусловлено видом функции $f(x, \dot{x})$, входящей в уравнение (0.1). В ряде случаев выбором одной пары значений ω_1 и ω_2 можно получить вполне удовлетворительное решение, пригодное для всего интервала времени от $t=0$ до $t=\infty$. В других задачах приходиться интервал времени разбить на частичные интервалы $0 < t < t_1$, $t_1 < t < t_2$ и т. д. и для каждого из них подобрать свои параметры ω_1 и ω_2. В таких случаях малый параметр ε благоприятствует выбору частичных интервалов в меньшем количестве.

2. В качестве приложения изложенного метода рассмотрим задачу математического маятника.

Имеем уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (2.1)$$

и начальные условия $x_0 = a < \pi$, $\dot{x}_0 = 0$.

Из (1.4) и (1.5) находим решение в первом приближении

$$z_1 = a \cos \omega t. \qquad (2.2)$$

Из (1.7) и (2.2) получаем выражение для $Q(\omega, t)$

$$Q(\omega, t) = \omega^2 (a^2 - z_1^2) - 2\omega_0^2 (\cos z_1 - \cos a). \qquad (2.3)$$

Из (1.9) и (2.3) имеем

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} > 2 \frac{\cos z_1 - \cos a}{a^2 - z_1^2}; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} < 2 \frac{\cos z_1 - \cos a}{a^2 - z_1^2}. \qquad (2.4)$$

Эти неравенства должны иметь место на всем интервале от $z_1 = -a$ до $z_1 = +a$. Отсюда следует, что ω_1^2/ω_0^2 и ω_2^2/ω_0^2 мы должны выбрать равными соответственно максимуму и минимуму правых частей (2.4). Получаем

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = 2 \frac{1 - \cos a}{a^2}; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} = \frac{\sin a}{a}. \qquad (2.5)$$

Согласно (1.11) в качестве расчетного принимаем

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1-\cos a}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{\sin a}{a}. \tag{2.6}$$

Внеся (2.3) в правую часть (1.6) получаем уточненное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 z_1^2 + 2\omega_0^2 (\cos z_1 - \cos a),$$

в котором ω имеет значение (2.6).

Максимальная амплитуда маятника во втором приближении согласно (1.14) определяется формулой

$$A^2 = \left| z_1^2 + 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} (\cos z_1 - \cos a) \right|_{max}. \tag{2.7}$$

Получаем следующую расчетную формулу

$$A^2 = \varphi^2 + 2\varphi \frac{\cos\varphi - \cos a}{\sin\varphi}, \tag{2.8}$$

где φ есть корень уравнения

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (\varphi < \pi). \tag{2.9}$$

Неравенство (1.10) в данном случае также выполняется. В приведенной ниже таблице помещены значения $\omega:\omega_0$ и A, вычисленные по формулам (2.6) и (2.8) для ряда значений $z_{1\,max} = a$. Для сравнения, в столбцах $(-)_{точн.}$ и $(-)_{II}$ приведены заимствованные из работы [3] результаты точного расчета и расчета по методу Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского (во втором приближении) при тех же значениях $z_{1\,max} = a$.

a	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{точн.}$	$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)_{II}$	A	$A_{точн.}$	A_{II}
0,2	0,9975	0,9957	0,9975	0,2000	0,2000	0,2000
0,4	0,9901	0,9900	0,9900	0,4000	0,3997	0,3997
0,6	0,9776	0,9776	0,9776	0,5995	0,5989	0,5988
0,8	0,9611	0,9604	0,9604	0,7961	0,7973	0,7972
1,0	0,9402	0,9385	0,9385	0,9959	0,9946	0,9944
1,2	0,9129	0,9120	0,9120	1,1974	1,1956	1,1900
1,4	0,8807	0,8811	0,8812	1,3914	1,3846	1,3835
1,6	0,8452	0,8461	0,8463	1,5865	1,5763	1,5743
1,8	0,8058	0,8072	0,8076	1,7794	1,7650	1,7610
2,0	0,7625	0,7646	0,7654	1,9692	1,9510	1,9430
2,2	0,7174	0,7185	0,7200	2,1550	2,1320	2,1180
2,4	0,6674	0,6698	0,6719	2,3330	2,3070	2,2830
2,6	0,6115	0,6198	0,6216	2,5052	2,4760	2,4320
2,8	0,5546	0,5610	0,5699	2,6618	2,6350	2,5580
3,0	0,4947	0,5023	0,5179	2,7920	2,7630	2,6420

Как видно из этой таблицы приближенные формулы (2.6) и (2.8) определяют частоту и амплитуду маятника с высокой степенью точности при всех углах отклонения, начиная с малых и до $A \approx 2,8 = 160^\circ$.

Армянский НИИ
энергетики

Поступило 30.IX.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1950.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1950.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.

А. И. КОРЧАГИН

ВЛИЯНИЕ СКОПЛЕНИЙ ДИСЛОКАЦИЙ НА ХАРАКТЕР РАЗРУШЕНИЯ У ГРАНИЦ ЗЕРЕН

Известно, что хрупкие трещины не развиваются в наклепанных материалах со многими системами скольжения, по крайней мере, если дислокации в них не блокируются старением в процессе наклепа или после него. Причина этого заключается в пластической релаксации любой значительной концентрации напряжений и пластическое притупление любой зарождающейся трещины [1а]. Тем не менее имеются экспериментальные данные для скола в железе, указывающие на существование механизма, при котором распространение трещины возможно за счет пластической деформации у ее вершины. Независимо от того, как появились следы деформации вдоль трещины в зерне поликристалла, они, очевидно, возникли в процессе распространения трещины [рис. 4, 1в]. Это указывает, что распространяющаяся трещина расширяется скорее за счет пластической деформации вблизи ее вершины, чем чисто упругим сколом. Согласно этому механизму, предложенному Орованом впервые для NaCl, KCl, касательные напряжения (при растяжении) вокруг вершины трещины (находящейся на поверхности образца и не удовлетворяющей условию Гриффитса), таковы, что протягивают краевые дислокации и препятствуют их движению далее вершины трещины, создавая таким образом скопление дислокаций. Когда расстояние между вершиной трещины и скоплением дислокаций становится достаточно мало, то между ними может произойти скол, удлиняющий трещину. Следовательно, концентрация напряжений, создаваемая самой трещиной, способствует движению дислокаций, что может вызвать распространение трещины.

Если механизм Орована действует в металлах, то, по крайней мере в наклепанном состоянии, вблизи скоплений дислокаций при разрушении строение излома должно отличаться от общего. Например, если вершина надреза приближается к границе зерна, у которой имеется мощное скопление дислокаций, то на небольшом расстоянии между ними может произойти скол; во всяком случае, пересечение фронтом распространяющегося надреза скопления дислокаций должно изменить характер излома в этом месте.