

С. К. БОХЯН

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ ИНДУКЦИОННОГО ГЕНЕРАТОРА

Определение граничных значений сопротивлений генератора, при которых имеет место самовозбуждение, производится исследованием устойчивости решения однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, к которым приводятся уравнения равновесия напряжений симметричного индукционного генератора. Уяснение же закономерностей и условий, лежащих в основе самовозбуждения колебаний, побуждает при исследовании исходить из физических предпосылок их возникновения и развития, не применяя формальных математических преобразований, упрощающих анализ, но и затеняющих природу явления.

Многофазный индукционный генератор с вполне симметричным ротором, при пренебрежении зубчатостью в воздушном зазоре, представляет собой систему с переменной взаимоиндуктивностью контуров статора и ротора, причем в режиме установившихся колебаний, период полного изменения взаимоиндуктивности соответствует повороту на 2π электрических радиан. В процессе нарастания амплитуды колебаний в якоре, возникает несимметрия магнитной системы, связанная с наличием замкнутых контуров ротора по оси, совпадающей с направлением результирующего вектора вращающегося магнитного поля. При совпадении вектора с осью фазы обмотки якоря, ее индуктивное сопротивление минимально. Поворот вектора на $\frac{\pi}{2}$ электрических радиан, очевидно, будет соответствовать максимальному сопротивлению фазы, определяемому полной самоиндуктивностью.

Таким образом, в процессе самовозбуждения, вращению вектора результирующего магнитного поля с угловой скоростью ω соответствует частота 2ω изменения эквивалентной индуктивности фазы. При отличии от нуля активном сопротивлении реальных контуров ротора, экранирующие переходные токи, наведенные в них, затухают с постоянной времени T_2 в связи с чем возникающая несимметрия по осям сглаживается с течением времени.

Обозначая минимальное, максимальное и среднее значения индуктивности фазы, соответственно, через L_1 , L_2 и L_0 , считая за начало отсчета времени момент прохождения индуктивности через минимальное значение, имеем для эквивалентной индуктивности:

$$L_1(t) = L(1 - m \cos 2\omega t), \quad (1)$$

где

$$L = L_1 - (L_1 - L_0) e^{-\frac{\pi}{4\pi T_1}}; \quad (2)$$

$$m = m_0 \frac{1}{1 + \gamma (e^{\frac{\pi}{4\pi T_1}} - 1)}; \quad (3)$$

представляют собой выражения для среднего значения переходной индуктивности и глубины переходной модуляции индуктивности в момент наибольшей скорости ее увеличения $t = \frac{T_1}{8} = \frac{T_2}{4}$.

Здесь, T_1 ; T_2 — периоды колебаний тока и изменения индуктивности;

$\gamma = \frac{2}{1 + \frac{L_2}{L_1}}$ — постоянный коэффициент, численное значение которого

колеблется в пределах 1,2—1,9;

m_0 — максимальная глубина переходной модуляции, не превышающая в быстроходных индукционных генераторах повышенной частоты среднего значения 0,55.

Следовательно, индукционный генератор с емкостью обобщенно может быть представлен в виде колебательного контура rLC , где индуктивность является периодической функцией времени (1). Ограничиваясь исследованием условий возникновения и развития самовозбуждения, будем считать индукционный генератор совершенно ненапряженным, в связи с чем индуктивность L_1 принимается величиной постоянной.

При пренебрежении явлением гистерезиса в активном железе генератора, после повышения порядка, учитывая (1), уравнение равновесия напряжений в контуре rLC запишется в виде:

$$(1 - m \cos 2\omega t) i'' + \left(\frac{r}{L} + 4m\omega \sin 2\omega t \right) i' + + \omega^2 (\omega_0^2 + 4m \cos 2\omega t) i = 0, \quad (4)$$

представляющем собой полное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами.

Здесь, $\omega_0^2 = \frac{1}{\omega^2 LC}$ — безразмерная частота.

Решение и анализ таких уравнений могут быть произведены путем приведения их к уравнению Матье [1].

В канонической форме уравнение Матье записывается в виде:

$$i'' + (a + 2q \cos 2\tau) i = 0. \quad (5)$$

При $q = 0$ уравнение (5) преобразуется в классическое уравнение струны с парами периодических решений $\pm \sin \sqrt{a} \tau$, $\pm \cos \sqrt{a} \tau$, где

a принимает значения бесконечной последовательности действительности чисел.

Физике процесса самовозбуждения индукционного генератора должны соответствовать неустойчивые решения уравнения (5) с периодом 2π без постоянной слагающей. Кроме этого частоты генерируемых колебаний оказываются кратными половине частоты периодического изменения индуктивности $-\omega_0$.

При заданном значении q существуют два т. н. собственных значения функции Матье:

$$a_{\pm} = n^2 \pm a_1 q + a_2 q^2 \pm a_3 q^3 + \dots, \quad (6)$$

которым соответствуют устойчивые периодические решения в виде тригонометрических рядов косинуса и синуса.

Собственные значения (6) на плоскости $a - q$ определяют точки граничных кривых областей неустойчивых периодических решений уравнения (5) порядка n .

Приведя уравнение (4) к канонической форме (5), выразим a, q через параметры колебательного контура. Пренебрегая в первом приближении активными потерями в контуре, представим уравнение (4) в виде:

$$-m \cos 2\tau \cdot i'' + 4m \sin 2\tau \cdot i' + 4m \cos 2\tau \cdot i + i'' + \omega_0^2 \cdot i = 0, \quad (7)$$

где $\tau = \omega t$.

Уравнение (7) при $m=0$ представляет собой упомянутое выше уравнение струны, обращающееся в ноль при $i = \pm \sin \omega_0 t = \cos \omega_0 t$.

Подставляя значения t в уравнение (7), приравнявая порознь нулю члены с $\cos 2\tau$ и $\sin 2\tau$ приходим к уравнению

$$i'' (a + 2q \cdot \cos 2\tau) i = 0$$

при малом m .

Здесь обозначены $a = \omega_0^2$, $q = 2m$. Решениями уравнения (5) являются

$$i_n = se_{(2\nu+1)}(t, m) + ce_{(2\nu+1)}(t, m) = \pm \sin n\omega t \pm \cos n\omega t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} D_{(2k+1)} \sin (2k+1)\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{(2k+1)} \cos (2k+1)\omega t; \quad (8)$$

$$\text{при } n = 2\nu + 1, \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$i_n = se_{2\nu}(t, m) + ce_{2\nu}(t, m) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k} \sin 2k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \cos 2k\omega t; \quad (9)$$

при $n = 2\nu, \nu = 1, 2, 3, \dots$

Бесконечные суммы в решениях (8), (9) обусловлены наличием периодических коэффициентов в уравнениях (4–7) при $m \neq 0$.

Подстановкой решений (8) и (9) и собственного значения функции (6) в уравнение (5) определяются коэффициенты рядов C, D и x . Табулирование функций Матье и их собственных значений произведено Е. Айнсом [2].

Для функции первого порядка $n = 1$ на границе устойчивости:

$$se_1(t, m) = \pm \sin \omega t \pm \frac{m}{4} \sin 3\omega t \pm \frac{m^2}{16} \left(\sin 3\omega t \pm \frac{1}{3} \sin 5\omega t \right) \pm \dots \quad (10)$$

$$ce_1(t, m) = \pm \cos \omega t \pm \frac{m}{4} \cos 3\omega t \pm \frac{m^2}{16} \left(-\cos 3\omega t - \frac{1}{3} \cos 5\omega t \right) \pm \dots \quad (11)$$

Уравнение границ области неустойчивости

$$a_0^2 = \omega_0^2 = 1 \pm q - \frac{1}{8} q^2 \pm \frac{1}{8^2} q^3 - \dots \quad (12)$$

При $n > 2$ собственное значение, с точностью до третьего приближения:

$$a_n^2 = n^2 + \frac{q^2}{2(n^2-1)} \pm \frac{q^3}{2^2(n^2-1)} \pm \dots \quad (13)$$

На рис. 1 показаны в равных масштабах области неустойчивости периодических колебаний первого и третьего порядков. При учете активного сопротивления колебательного контура области неустойчивых колебаний уменьшаются [3]. Для колебаний первого порядка функциональная связь $\omega_0^2 = q$, с точностью первого приближения, выражается равенством

$$\omega_0^2 = 1 - \sqrt{q^2 - 4k_1^2}, \quad (14)$$

где $k_1 = \frac{r}{\omega L}$ — коэффициент потерь.

По равенству (14) вершина области неустойчивости сдвигается на участок $q = 2k_1$ (пунктирные линии на рис. 1). При значении $k_1 = m = k_{1k}$ область неустойчивости стягивается в точку $\omega_0^2 = 1$, $q = 2m$. Значения коэффициента потерь, при которых область неустойчивых колебаний высших порядков замещается точкой, можно получить из

уравнений (14 и 13) учитывая, что $k_n = \frac{k_1}{n}$

$$k_{nk} = \frac{1}{n^2-1} m^2. \quad (15)$$

Равенству $k_{1k} = m$ может быть поставлено в соответствие условие

$$m > \frac{r}{\omega L}. \quad (16)$$

С учетом выражений (2) и (3) условие (16) может быть представлено в виде двух неравенств:

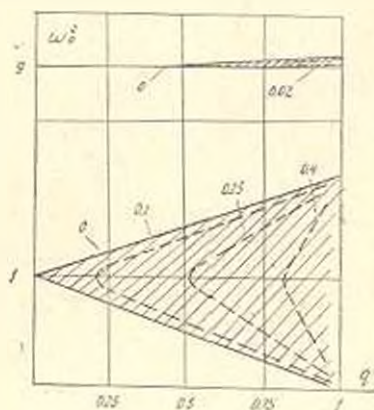


Рис. 1. Области неустойчивых колебаний основного и третьего порядков при различных значениях коэффициента потерь. Границы области основного порядка построены по первому приближению.

$$m_0 > \frac{r}{\omega L_0}, \quad (17)$$

связывающего параметры контура в момент $t=0$ и

$$m_0 > \frac{r}{\omega L} \left[1 + \gamma \left(e^{\frac{\pi}{4\omega T_2}} - 1 \right) \right], \quad (18)$$

учитывающего затухание переходной модуляции и момент наибольшей скорости увеличения индуктивности. Неравенства (17) и (18) представляют собой, таким образом, необходимые и достаточные условия возникновения и развития самовозбуждения индукционного генератора. Для определения условий самовозбуждения может быть использована иная форма решения уравнения (4).

С учетом активного сопротивления уравнение (4) можно представить в виде:

$$i'' + 2\kappa i' + (a + 2q \cos 2\tau) i = 0, \quad (19)$$

$$\text{где } \kappa = \frac{r}{2\omega L}.$$

Вводя новую переменную $i = e^{-\kappa\tau} z(\tau)$ преобразуем уравнение (19) в каноническую форму уравнения Матье

$$z'' + (a_1 + 2q \cos 2\tau) z = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } a_1 = a - \kappa^2.$$

Для случая неустойчивости периодическое решение уравнения (19) находится в виде:

$$i_{1n} = e^{(\mu - \kappa)\tau} \cdot ce_{2\nu}(\tau, q) + e^{-(\mu - \kappa)\tau} \cdot ce_{2\nu}(-\tau, q),$$

при $n = 2\nu$, $\nu = 1, 2, 3 \dots$

$$i_{2n} = e^{(\mu - \kappa)\tau} \cdot ce_{2\nu+1}(\tau, q) + e^{-(\mu - \kappa)\tau} \cdot ce_{2\nu+1}(-\tau, q), \quad (21)$$

при $n = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, 2, 3 \dots$

В решениях (8), (9) и (21) постоянные интегрирования приняты равными единице.

Здесь $ce(\tau, q)$ и $ce(-\tau, q)$ независимые решения (20), μ — характеристический показатель $\mu > 0$.

Имея в виду $\kappa > 0$, неустойчивости решений (21) отвечает условие

$$\mu \geq \kappa \quad (22)$$

В первом приближении характеристический показатель равен:

$$\mu = \frac{1}{4n} \sqrt{q^2 - \frac{1}{64} q^4} \approx \pm \frac{q}{4n}. \quad (23)$$

Полагая для колебаний первого порядка $n=1$, отбрасывая отрицательное значение, имеем

$$\mu = \frac{m}{2}. \quad (24)$$

Условие (22) записывается в виде

$$m \geq \frac{r}{\omega L} \quad (25)$$

что совпадает с выражением (16).

Предложенный анализ применим также для исследования самовозбуждения полнополюсных и возбуждаемых в продольно-поперечных осях (асинхронизированных) синхронных генераторов с емкостями.

ВНИИКЭ

Поступило 20.VII 1965

И. Г. РОНЦОВ

ՄԱՏՅԵՍԻ ԼԱԿԱՍԱՐՄԱՆ ԿԵՐԱՌՈՒՄԸ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՆ ԴԵՆԵՐԱՏՈՐԻ ԻՆՔՆԱԳՐԳԻՄԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԵՋ

Ա. Վ. Փ. Ռ. Փ. Օ. Վ.

Ինդուկցիոն դեներատորի, որին միացված են կոնգենսատորներ, ինքնազրգուժան ծաղման և զարգացման խեղրի որոշումը բերվում է ամբողջական կարգի Մատյեի հավասարման անկայուն պարբերական լուծման հետադոտմանը:

Լուծման հետադոտումը անկայունության սահմանի վրա թույլ է տալիս կառուցել ցանկացած n կարգի անկայուն տատանման տարածությունը:

Դրա հետ մեկտեղ [3] հետևությունների օգտագործումը թույլ է տալիս կառուցել անկայուն տարածությունները, ինկուտի ունենալով տատանումների մարումը: Անկայուն տատանումների դեպքի համար Մատյեի հավասարման լուծումը որոշում է ինդուկցիոն դեներատորի ինքնազրգուժան անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функции Матъе. ГИИЛ, 1953.
2. Айне Е. Таблица функций эллиптического цилиндра PHS. Эдинбург, 1932.
3. Горелик Г. С. Резонансные явления в линейных системах с периодически изменяемыми параметрами. ЖТФ, вып. 10, 1934, вып. 2—3, 1935.