

И. Г. КРИСТОСТУРЯН

РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ БУРНОГО ТЕЧЕНИЯ  
 НА РАСШИРЯЮЩЕМСЯ УЧАСТКЕ КАНАЛА

Настоящая работа посвящается расчету волны полуска на расширяющемся участке канала. Основными уравнениями для решения указанной задачи являются уравнения неустановившегося движения и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \left( i_0 - \frac{U^2}{c^2 R} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (UF)}{\partial x} = 0,$$

где  $h$  — глубина потока,  $U$  — средняя по сечению скорость течения,  $i_0$  — продольный уклон дна канала,  $R$  — гидравлический радиус,  $C$  — коэффициент Шези,  $F$  — площадь живого сечения канала.

Рассматривается расширяющийся канал с трапециoidalным поперечным сечением, для которого

$$F = (b_0 + kx + mh) h,$$

Здесь  $b_0$  — ширина канала по дну в начале расширения,  $k$  — коэффициент расширения,  $m$  — коэффициент откосов. Как известно скорость распространения волны выражается зависимостью:

$$\omega = \sqrt{\frac{gF}{B}}, \quad (2)$$

где  $B = b_0 + kx + mh$  — ширина канала поверху.

На основании (1) и (2) учитывая, что  $B = \frac{\partial F}{\partial h}$  [3], [4] получим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega^2 k}{b_0 + kx + 2mh} = g \left( i_0 - \frac{U^2}{C^2 R} - \frac{kh}{b_0 + kx + 2mh} \right) \quad (3)$$

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + 2U \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{U \omega k}{b_0 + kx + 2mh} + \omega \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Сложением и вычитанием этих уравнений получим следующую систему [1]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \pm \omega) \frac{\partial U}{\partial x} = 2 \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + (U \pm \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] =$$

$$= g \left[ i_0 - \frac{U^2}{c^2 R} - \frac{kh}{b_0 + kx + 2mh} - \frac{k\omega (U \pm \omega)}{b_0 + kx + 2mh} \right]. \quad (4)$$

Начальным условием задачи является вид свободной поверхности при установившемся течении, заданный в виде функции

$$h = h(x).$$

Граничное условие задается в начальном сечении канала. Таким образом, задача сводится к решению системы (4) при вышеуказанных граничных и начальных условиях. Задача решается методом сеток. При выборе сетки учитывается режим течения. При решении этим методом как и при других приближенных методах решения, необходимо учесть с какой точностью конечно-разностные уравнения аппроксимируют данную систему, и каковы условия, обеспечивающие сходимость приближенного решения к точному (условие устойчивости) [1], [2], [5].

Условие устойчивости заключается в выборе соотношения шагов сетки  $\Delta t$  и  $\Delta x$ . Это осуществляется использованием некоторых свойств характеристик системы (4).

Уравнения характеристик системы (4) имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \omega.$$

Известно, что значения  $U$  и  $\omega$  в произвольной точке  $P(x, t)$  внутри области существования решения в случае докритического потока ( $U < \omega$ ), определяются единственным образом, начальными значениями, заданными на отрезке оси  $x$ , определяемом двумя характеристиками выходящими из точки  $P(x, t)$  (область зависимости точки  $P(x, t)$ ).

В этом случае точки прямоугольной сетки на плоскости  $(x, t)$  строятся следующим образом: при фиксированном  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  выбирается так, чтобы область зависимости узловой точки сетки  $P(x, t)$ , целиком помещалась на рассматриваемом отрезке  $2\Delta x$  (рис. 1). Это и есть условие устойчивости, заключающееся в одновременном выполнении неравенств:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{U_{0,0} + \omega_{0,0}}, \quad \Delta t < \frac{-\Delta x}{U_{2,0} - \omega_{2,0}}.$$

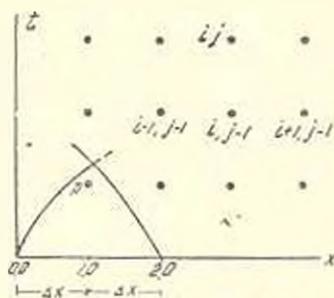


Рис. 1

Далее в системе (3) производные заменяются отношением разностей. Имеем в обоих уравнениях:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta t},$$

в первом уравнении

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i,j-1} - U_{i-1,j-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega_{i,j-1} - \omega_{i-1,j-1}}{\Delta x};$$

во втором уравнении



уравнения системы (3) в конечных разностях относительно точки  $C_{i-2,j}$ . При фиксированном  $\Delta t$  для  $\Delta x$  удовлетворяются условия

$$\Delta x < 2\Delta t (U_A - \omega_A), \quad \Delta x > \Delta t (U_C - \omega_C) \quad (6)$$

Производные по  $t$  в первом уравнении системы (3), заменяются отношением разностей следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i-1,j}}{\Delta t};$$

а во втором уравнении

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j-1}}{\Delta t}.$$

Производные по  $x$  в обоих уравнениях имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i,j-1} - U_{i-1,j-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega_{i,j-1} - \omega_{i-1,j-1}}{\Delta x}.$$

Подставляя значения производных в соответствии уравнения системы (4) и, решая относительно  $U_{i,j}$  и  $\omega_{i,j}$ , получим:

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} = & U_{i-2,j+1} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \left\{ \frac{g\Delta t U_{i-1,j}}{2(U_{i-1,j}^2 - \omega_{i-1,j}^2)} \left[ I_0 - \frac{U_{i-1,j}^2}{C_{i-1,j}^2 R_{i-1,j}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k h_{i-1,j}}{b_{i-1} + 2h_{i-1,j}} \right] - \frac{\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i-1,j}}{U_{i-1,j} + \omega_{i-1,j}} + \frac{\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j-1}}{U_{i-1,j} - \omega_{i-1,j}} - \right. \\ & \left. - \frac{U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j}}{2(U_{i-1,j} + \omega_{i-1,j})} - \frac{U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}}{2(U_{i-1,j} - \omega_{i-1,j})} \right\}; \\ \omega_{i,j+1} = & \omega_{i-1,j+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \left\{ \frac{U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j}}{4(U_{i-1,j} + \omega_{i-1,j})} + \frac{\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i-1,j}}{2(U_{i-1,j} + \omega_{i-1,j})} - \right. \\ & - \frac{U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}}{4(U_{i-1,j} - \omega_{i-1,j})} + \frac{\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j-1}}{2(U_{i-1,j} - \omega_{i-1,j})} + \frac{g\Delta t \omega_{i-1,j}}{4(U_{i-1,j}^2 - \omega_{i-1,j}^2)} \times \\ & \left. \times \left[ I_0 - \frac{U_{i-1,j}^2}{C_{i-1,j}^2 R_{i-1,j}} + \frac{k h_{i-1,j}}{b_{i-1} + 2h_{i-1,j}} \right] + \frac{k \omega_{i-1,j} \Delta t}{4(b_{i-1} + 2h_{i-1,j})} \right\}. \end{aligned}$$

Пример расчета. Рассмотрим прямолинейный канал с трапециевидным поперечным сечением длиной 10 м, в конце которого имеется расширяющийся участок длиной 1 м.

Гидравлические характеристики канала следующие:

$I_0 = 0,002$ ;  $b_0 = 0,30$  м;  $k = 0,30$ ;  $m = 1,0$ ;  $n = 0,010$ ;  $Q = 12$  л/сек;  $\Delta Q = 8$  л/сек.

На рис. 3 показана кривая свободной поверхности при невозмущенном движении, которая служит начальным условием и получена экспериментально.

Граничное условие задается функцией  $h = h(t)$  (рис. 4), в начале канала (и створе  $x = -9$  м). Вид функции получен с по-

мощью записи изменения глубины в створе  $x = -9$  м. при прохождении волнового расхода  $\Delta Q = 8$  л/сек через этот створ. Начало координат расположено в створе, где начинается расширяющийся участок (на десятом метре от начала канала). До створа  $x = -1$  поток спокойный, а далее и на протяжении всего расширяющегося участка сверхкритический. В призматической части, до створа  $x = -1$  расчет произведен по формулам, соответствующим спокойному течению [6].

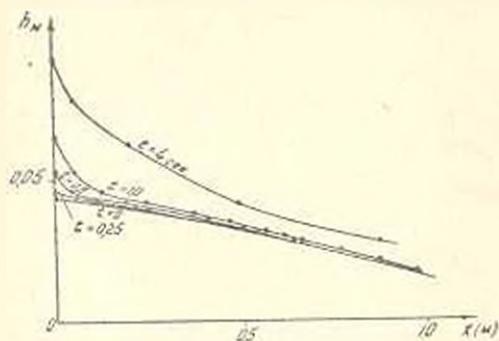


Рис. 3.

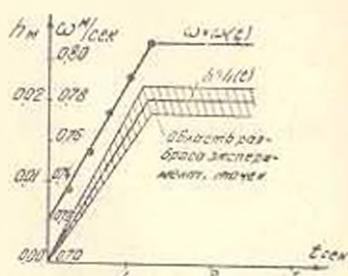


Рис. 4.

В сечениях  $x = -1$  и  $x = 0$  расчеты произведены на основании системы (3), в которой производные заменены отношениями разностей по формулам (5).

Таким образом, в сечении  $x = 0$  получены изменения глубины  $h$  и скорости  $U$  с течением времени, которые служат граничным условиям при расчетах на расширяющемся участке.

При  $\Delta t = 0.5$  сек, соответствующие граничному условию значения скоростей помещены в таблице:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$U_0, \text{ м/сек}$	0,735	0,736	0,758	0,777	0,831	0,846	0,872	0,870	0,870
$\omega_0, \text{ м/сек}$	0,636	0,650	0,676	0,706	0,739	0,764	0,777	0,788	0,790

Дальнейшие расчеты показали, что на протяжении всего расширяющегося участка, при фиксированном  $\Delta t = 0,5$  сек условие устойчивости (6) дает для  $\Delta x$  значения колеблющиеся между  $\Delta x = 0,05$  м и  $\Delta x = 0,07$  м. В полученных таким образом точках сетки вычислены скорости  $U$  и  $\omega$  на основании формулы (7), и получен вид свободной поверхности для момента  $t = 1,0$  сек. Из того же условия (6) для последующих моментов времени, при том же значении  $\Delta t = 0,5$  сек,  $\Delta x$  меняется в более широких пределах. Например, при расчете скорости  $U$  и свободной поверхности в момент  $t = 2$  сек, получается, что в начале участка  $\Delta x = 0,05$  м, а далее  $\Delta x = 0,15$  м или  $0,20$  м. В момент  $t = 3$  сек, при  $\Delta t = 0,5$  сек для  $\Delta x$  получаются значения вначале расширения  $\Delta x = 0,15$  м, а далее  $\Delta x = 0,30$  м,  $\Delta x = 0,45$  м. Через 4 секунды после прохождения волны попуска поток устлавливается. Вид

свободной поверхности для всех четырех моментов показан на рис. 3. Приведенная схема расчета позволяет при фиксированном значении  $\Delta t$ , с течением времени увеличить размер шага  $\Delta x$  при соблюдении условия устойчивости, что уменьшает объем вычислений. Для проверки точности вычислений рассчитаны значения расходов в начале и в конце расширяющегося участка при установившемся течении после прохождения волны попуски. В обоих сечениях расход получается одинаковый. С этой же целью по той же самой схеме произведены расчеты с более мелким шагом. При  $\Delta t = 0,25$  сек получен вид свободной поверхности в моменты  $t = 0,25$  сек,  $t = 0,5$  сек и  $t = 1,0$  сек.

АрмИИГМ

Поступило 20.IV. 1964

Ս. Գ. ԲՐԻՍՏՈՍՅԱՆԻԱՆ

## ՉՉԱՍՏԱՏՎԱԾ ԲՈՒԻՔԻ ՀՈՍԱՆԻ ԶԱՇՎԱՐՈՒՄԸ ԶՐԱՏԱՐԻ ԼՈՅՆԱՅՈՂ ՄԱՍՈՒՄ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Քողրի ալիքի արանաֆորմացիան ուսումնասիրելու համար, որպես հիմք վերցվում է շհասատված շարժման հավասարումների սխեմներ, որը որոշ ձևափոխություններից հետո բերվում է այնպիսի տեսքի, որտեղ որպես անհայտներ մտնում են  $U$  — հոսանքի միջին արագությունը և  $\omega$  — ալիքի տարածման արագությունը:

Ստացված հավասարումների սխեմներ լուծվում է ցանցի մեթոդով, որի ընտրության ժամանակ օգտագործվում են վերոհիշյալ հավասարումների խառնատերիստիկների որոշ հատկություններ: Քանի որ բուռն հոսանքի դեպքում և ուղիղ և հակադարձ խարակահրատիկները ուղղված են  $X$  առանցքի դրական ուղղությամբ, ապա  $t$  առանցքի կամ նրան զուգահեռ ուղղի վրա վերցրած որևէ կետից դուրս եկող հակադարձ խարակահրատիկը անպայման կհասնի նրանից ալիքի վեր գտնվող կետից դուրս եկող ուղիղ խարակահրատիկի հետ. առաջացնելով մի էականչյուն տիրույթ: Որպեսզի կայունության պայմանը պահպանվի, ցանցի կետը պետք է ընտրել այդ տիրույթում այնպես, որ նրա կախման տիրույթը լրիվ պահվի  $2\Delta t$  երկարությամբ վերցված հատվածում:

Ածանցյալները համապատասխան ձևով վերջավոր աճերով փոխարինելուց հետո, ստացված հավասարումները լուծվում են  $U$ -ի և  $\omega$ -ի նկատմամբ: Վերջինի արժեքների միջոցով հնարավոր է ստանալ ազատ մակերևույթի տեսքը թողքի ալիքի անցման ժամանակ, ջրատարի ուսումնասիրվելիք հատվածի երկարությամբ, ցանկացած մոմենտում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Стакер Дж. Волны на воде. М., 1959.
2. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач.
3. Мелещенко Н. Т., Якубов М. С. Методика расчета прерывной волны в призматическом русле. Изв. ВНИГ, № 38, 1948.
4. Мелещенко Н. Т., Якубов М. С. Методика расчета неустановившегося движения в открытых руслах по методу С. А. Христиановича. Изв. ВНИИГ, № 38, 1948.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1, М., 1962.
6. Назарян А. Г., Кристоступни И. Г. К расчету трансформации волны попуска в канале с ответвлением. Аннотации научно-исследовательских работ по гидротехнике ВНИИГ, М., 1963.