ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XVIII, № 5, 1965 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

А. С. СОГОЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЕРЕВЯННОЙ БАЛКИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

В работе исследуется напряженное состояние деревянной балки при чистом изгибе, исходя из представления о древесине, как о материале, обладающем одновременно свойством ползучести и изменяемости модуля упругости, в результате изменения влажности древесины в эксплуатационных условиях конструкции. При этом рассматриваются различия модулей упругости $E(\tau)$ и мер ползучести $C(t, \tau)$ древесины в растянутой и сжатой зонах с учетом влияния влажности во времени по заданному закону. В исследовании вопроса допускается, что:

1. Между деформациями ползучести и напряжениями имеется линейная зависимость, справедливая при значениях напряжений ниже предела долговременного сопротивления;

2. При деформации ползучести древесины имеет место закон наложения.

Закон изменения меры ползучести, в общем случае для бетона, представлен выражением вида [1]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right], \text{ где } \varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}; \tag{1}$$

$C(t, \tau)$ — (мера ползучести) — деформация ползучести к моменту времени t от единичного напряжения;

C_0 — предельное значение меры ползучести для данного материала;

A_1, γ — постоянные.

Изменение модуля упругости во времени в процессе высыхания древесины происходит по следующему закону [2]:

$$E(\tau) = E_{15} - (E_{15} - E_w)\, e^{-\alpha\tau}, \tag{2}$$

где E_w — модуль упругости древесины к началу исследования, при $\tau = 0$;

E_{15} — модуль упругости при 15% влажности древесины;

τ — время, которому соответствует определенный процент влажности древесины; α — постоянная.

Если указанное выражение $C(t, \tau)$ для бетона отражает основные свойства ползучести бетона во времени, то аналогичное выраже-

ние для древесины отражает основные свойства деформации ползучести древесины с учетом изменения ее влажности во времени [3]. Такое семейство кривых деформаций ползучести $C(t, \tau)$ построено для древесины тополя, при растяжении и при сжатии с учетом процесса высыхания древесины, причем при разных влажностях к моменту загружения (рис. 1). Семейство кривых $C(t, \tau)$ хорошо описывается

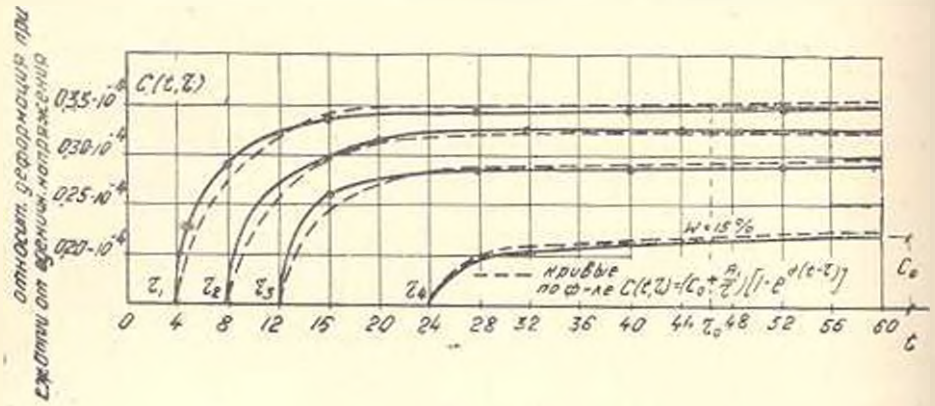

Рис. 1.

уравнением (1), причем коэффициенты A_1 и γ подобраны таким образом, чтобы кривые ползучести хорошо совпали с данными опыта.

Считая справедливым гипотезу плоских сечений и для деформа-

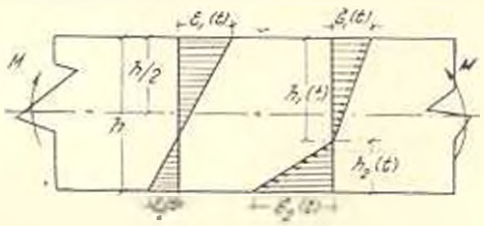

Рис. 2.

ций ползучести, получим следующее геометрическое соотношение (рис. 2)

$$\varepsilon_2(t) = \frac{h_2(t)}{h_1(t)}\,\varepsilon_1(t),\quad h_1(t) + h_2(t) = h, \tag{3}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ — соответствующие величины, определяющие положение нейтральной оси во времени;

$\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ — полные относительные деформации в сжатой и растянутой зонах.

Согласно принятой теории ползучести [1]:

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_1(t)}{E_1(t)} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma_1(\tau)\, K_1(t, \tau)\, d\tau; \tag{4}$$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\sigma_2(t)}{E_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_2(\tau)\, K_2(t, \tau)\, d\tau, \qquad (5)$$

где

$$K_1(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E_1(\tau)} + C_1(t)\right]; \quad K_2(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C_2(t, \tau)\right];$$

$\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ — максимальные напряжения в сжатой и растянутой зонах;

$E_1(t)$, $E_2(t)$, — модуль упругости древесины при растяжении и сжатии.

Из условия равновесия имеем:

$$\sigma_1(t) = \frac{3M}{bhh_1(t)}; \quad \sigma_2(t) = \frac{3M}{bhh_2(t)}. \qquad (6)$$

Из выражения (3) получим

$$\varepsilon_2(t) = \frac{1-\varphi(t)}{\varphi(t)} \cdot \varepsilon_1(t), \text{ где } \varphi(t) = \frac{h_1(t)}{h}. \qquad (7)$$

Подставляя значения $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ из уравнений (4), (5) в уравнение (7) получим нелинейное интегральное уравнение следующего вида

$$\frac{1-\varphi(t)}{\varphi(t)} - \lambda(t)\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = \int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{1-\varphi(t)}{\varphi(\tau)} K_1^*(t, \tau) - \frac{\varphi(t)}{1-\varphi(\tau)} K_2^*(t, \tau)\right\} d\tau, \qquad (8)$$

где

$$\lambda(t) = -\frac{E_1(t)}{E_2(t)}; \quad K_1^*(t, \tau) = E_2(t) K_1(t, \tau); \quad K_2^*(t, \tau) = E_1(t) K_2(t, \tau). \qquad (9)$$

Введем следующее обозначение

$$\frac{1-\varphi(t)}{\varphi(t)} - \lambda(t)\frac{\varphi(t)}{1-\varphi(t)} = \psi(t). \qquad (10)$$

Решая уравнение (10) относительно $\varphi(t)$, после преобразований получим:

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t) + 2 - \sqrt{\psi^2(t) + 4\lambda(t)}}{2[\psi(t) + 1 - \lambda(t)]}. \qquad (11)$$

Подставляя это значение $\varphi(t)$ в уравнение (8), получаем нелинейное интегральное уравнение следующего вида, точное решение которого не известно:

$$\psi(t) = \int_{\tau_1}^{t}\left\{\frac{\psi(t) - 2\lambda(t) + \sqrt{\psi^2(t) + 4\lambda(t)}}{\psi(t) + 1 - \lambda(t)} \cdot \frac{\psi(\tau) + 1 - \lambda(\tau)}{\psi(\tau) + 2 - \sqrt{\psi^2(\tau) + 4\lambda(\tau)}} K_1^*(t, \tau) - \frac{\psi(t) + 2 - \sqrt{\psi^2(t) + 4\lambda(t)}}{\psi(t) + 1 - \lambda(t)}\right.$$

$$\cdot \frac{\varphi(\tau)+1-\lambda(\tau)}{\varphi(\tau)-2\lambda(\tau)+1\sqrt{\varphi^2(\tau)+4\lambda(\tau)}} \cdot K_2^*(t,\tau)\Big\}d\tau.$$

Решая уравнение (11) методом последовательного приближения получим

$$\varphi_n = \int_0^t \Big\{\frac{\varphi_{n-1}-2\lambda(t)+\sqrt{\varphi_{n-1}^2(t)+4\lambda(t)}}{\varphi_{n-1}(\tau)-2-\sqrt{\varphi_{n-1}^2(\tau)+3\lambda(\tau)}} \cdot K_1^*(t,\tau) -$$

$$-\frac{\varphi_{n-1}(t)+2\sqrt{\varphi_{n-1}^2(t)+4\lambda(t)}}{\varphi_{n-1}(\tau)-2\lambda(t)+1\sqrt{\varphi_{n-1}^2(\tau)+4\lambda(\tau)}} \cdot K_2^*(t,\tau)\Big\} \frac{\varphi_{n-1}(\tau)+1-\lambda(\tau)}{\varphi_{n-1}(t)+1-\lambda(t)} d\tau \quad (12)$$

В качестве нулевого приближения возьмем начальное значение $\varphi(t)$, когда $t=\tau_1$. При этом условии $\varphi_0(t)=\varphi(\tau_1)=0$.

Для упрощения решения задачи примем $E_1(t)=E_1$, $E_2(t)=E_2$, т. е. постоянными. Согласно принятому имеем:

$$\frac{1-\tau_0}{\tau_0}-\lambda\frac{\tau_0}{1-\tau_0}=0, \quad \text{где } \lambda=\frac{E_1}{E_2}. \quad (13)$$

Отсюда

$$\tau_0=\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}}. \quad (14)$$

Из выражения (12), при $n=1$, после интегрирования получим

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\lambda}\,[E_2C_2(t,\tau_1)-E_1C_1(t,\tau_1)] \quad (15)$$

В силу (12) и (15) получим:

$$\tau_1(t)=$$

$$=\frac{2+\sqrt{\lambda}\,[E_2C_2(t,\tau_1)-E_1C_1(t,\tau_1)]-\sqrt{\lambda}\,\sqrt{[E_2C_2(t,\tau_1)-E_1C_1(t,\tau_1)]^2+4}}{2\{1-\lambda+\sqrt{\lambda}\,[E_2C_2(t,\tau_1)-E_1C_1(t,\tau_1)]\}} \quad (16)$$

где

$$C_1(t,\tau_1)=B_1(1-e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}); \; C_2(t-\tau_1)=B_2(1-e^{-\gamma_2(t-\tau_1)}). \quad (17)$$

По известному значению $\varphi_1(t)$, из уравнения (7) получим

$$h_1(t)=h\,\varphi_1(t); \; h_2(t)=h\,[1-\varphi(t)].$$

Как видно из (17) при $t=\infty$; $C_1(\infty,\tau_1)=B_1$; $C_2(\infty,\tau)=B_2$, тогда

$$\varphi_1(\infty)=\frac{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}-E_2B_2-E_1B_1-\sqrt{[E_2B_2-E_1B_1]^2+4}}{2\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}-\sqrt{\lambda}+E_2B_2-E_1B_1\right|} \quad (18)$$

Если

$$E_2B_2-E_1B_1=0, \quad (19)$$

то

$$B_2=\frac{E_1}{E_2}B_1. \quad (20)$$

Условие (19) справедливо, если $B_1 = B_2 = 0$, т. е. для начального момента $t = \tau_1$, когда ползучести нет и меры ползучести в растянутой и сжатой зонах связаны соотношением (20).

В силу (19), из уравнения (18) получим значение $\varphi_1(t)$ соответствующее только упругому решению, подобное уравнению (14):

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{J}{\lambda}}. \qquad (21)$$

В частном случае, если $E_1 = E_2$, то $\varphi_1(0) = \frac{h}{2}$, а $h_1(0) = \frac{1}{2}$. Имея значения $h_1(t)$ и $h_2(t)$, можем вычислить максимальные краевые напряжения согласно выражению (6).

Полученные результаты были проверены экспериментально. Были исследованы балки на чистый изгиб под длительно действующей постоянной нагрузкой для частного случая, когда влажность древесины в период эксперимента оставалась постоянной, следовательно и модуль упругости древесины не менялся $E_1(\tau) = E_1$, $E_2(\tau) = E_2$, а мера ползучести являлась функцией только разности аргументов, т. е. $C_1(t-\tau_1)$, $C_2(t-\tau_1)$. Испытание на изгиб производилось в тангентальном направлении на балках натуральных размеров из древесины тополя сечением 8×20 *см* по схеме указанной на рис. 3. Были испыта-

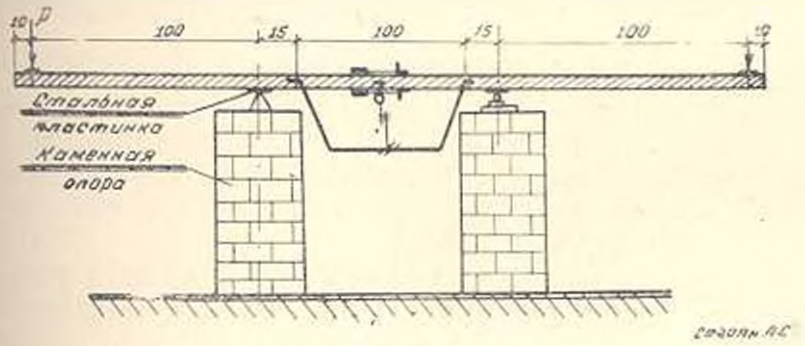

Рис. 3.

ны три балки. Для образцов была взята прямослойная древесина без сучков при влажности $W = 15\%$, при $E_1 = 10 \cdot 10^3$ *кг/см²*, $E_2 = 1{,}2 \cdot 10$ *кг/см²*, при $t = \infty$, $C_1(t-\tau_1) = B_1 = 0{,}21 \cdot 10^{-4}$ *см²/кг* $C_2(t-\tau_1) = 0{,}12 \cdot 10^{-4}$ *см²/кг*.

Чтобы сохранить влажность древесины постоянной, с целью исключения влияния ее колебания на деформацию ползучести и обеспечить модуль упругости древесины постоянным на протяжении всего исследования, концы балок покрывались парафином, а балки по всей длине плотно обертывались бумагой, края которой заклеивались. Затем поверх бумаги в два слоя наносился битум, растворенный в бензине, после чего производилось обертывание вторым слоем бумаги и вновь наносился раствор битума. Для измерения деформации краевых волокон на верхнюю и нижнюю плоскости балки были установлены индикаторы с удлиненными штифтами, а также тензометры (рис. 4).

Прогибы измерялись в середине пролета балок с помощью индикаторов укрепленных к металлической раме. Измерение мгновенной деформации производилось тотчас по приложению нагрузки. Последующие приращения деформации ползучести измерялись через каждые 24 часа в течение двух месяцев.

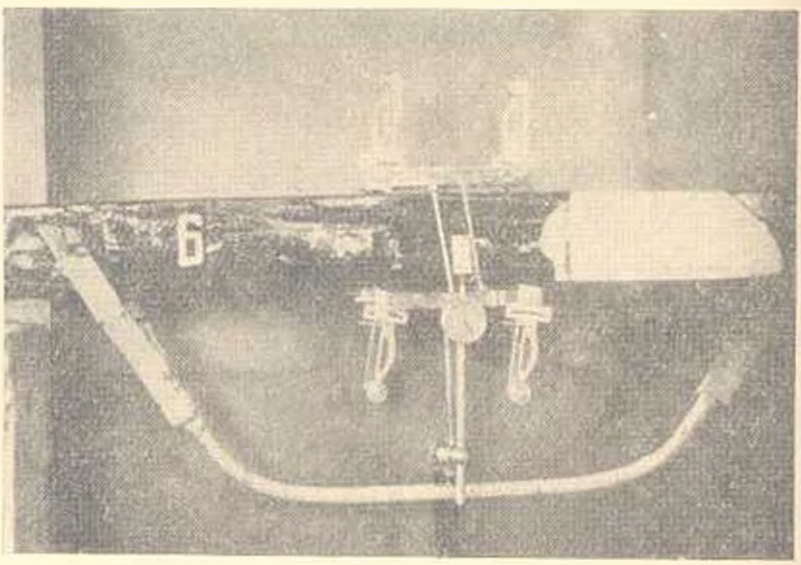

Рис. 4.

Прямые измерения деформаций краевых волокон и деформаций волокон в середине высоты балки при чистом изгибе показывают, что как при мгновенных деформациях, так и в процессе затухающей ползучести, сечения балки остаются плоскими, а нейтральная ось смещается в сторону растянутой зоны.

Из рис. 5 показан закон изменения $h\ (t)$ во времени. Как видно из рисунка, расчетная кривая отклоняется от экспериментальной не более 8%.

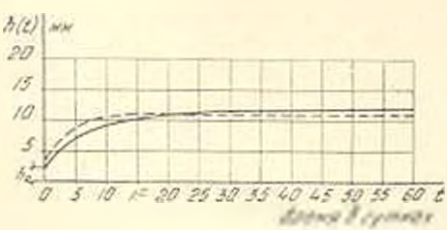

Рис. 5.

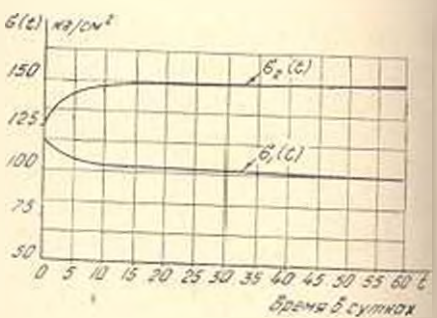

Рис. 6

На рис. 6 изображены кривые изменения напряжения $\sigma_1\ (t)$ и $\sigma_2(t)$. В растянутой зоне увеличение напряжения $\sigma_2\ (t)$ к концу исследования

составляет 20% от начального значения, а в сжатой зоне происходит падение напряжения на 13%.

На рис. 7 сопоставлены теоретические и экспериментальные значения $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_4(t)$. Теоретические кривые вычислялись по формулам

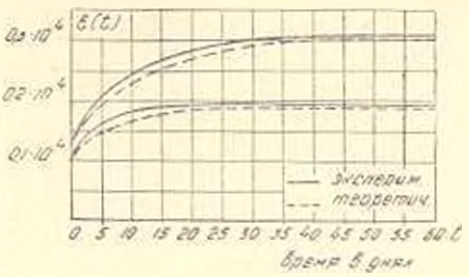

Рис 7.

(3) и (4), пользуясь приближенным методом интегрирования. Судя по кривым рис. 7 сходимость теоретических данных с опытными удовлетворительная.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 11.IV.1965

Ա. Ս. ՍՈՂՈՅԱՆ

ՓԱՅԱՏԵ ՀԵՆՎԱԾԻ ՄԱՔՈՒՐ ՇԻՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՍՈՂՔԻ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է մաքուր ծռման դեպքում փայտե հենծանի լարվածային վիճակը, հիմնվելով այն նախադրյալից, որ փայտանյութը կոնստրուկցիայի մեջ տեղադրելուց հետո խոնավության փոխման հետևանքով ենթակա է սողքի և ժամանակի ընթացքում առաձգականության մոդուլի փոփոխության։ Դիտվում է ձգված և սեղմված գոտիներում փայտանյութի առաձգականության մոդուլի $E(\tau)$-ի և սողքի չափի $C(t,\tau)$-ի տարբերություններ։ Ըստ որում, տրված օրինքով հաշվի է առնված խոնավության փոփոխության ազդեցությունը բուն ժամանակին, որը հանգեցնում է հենծանի լարվածային վիճակի փոփոխությանը։

Խնդրի լուծման համար օգտագործված է բնատնէ և երկաթբետոնե կոնստրուկցիաների էլեմենտների սողքի հաշվման Ն. Խ. Հարությունյանի տեսությունը [1], որի հիմքում ընկած հիմնական ընդունելությունները և նախադրյալները համապատասխան էքսպերիմենտալ ստուգումից հետո տարածվել են փայտանյութի վրա։ Ստացվել է (8) ոչգծային ինտեգրալ հավասարումը, որը մոտավոր ձևով լուծվել է $h_1(t)$-ի նկատմամբ. վերջինս բնորոշում է չեզոք առանցքի դիրքը բուն ժամանակին։ Խնդրի տեսական լուծման արդյունքների համեմատություններ բարդինու փայտանյութից բնական չափերի հենծանների վրա դրված փորձերից ստացված տվյալների հետ տվել է լավ համընկնում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.–Л., 1952.
2. *Согоян Л. С.* О некоторых характеристиках древесины тополя. „Известия АН Армянской ССР", серия технич. наук, т. X, № 3, 1957.
3. *Согоян А. С.* Исследование напряженного состояния деревянной шпренгельной балки с учетом ползучести древесины. „Известия АН Армянской ССР", серия технич. наук, т. XVII, № 2, 1965.