

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

С. М. ИСААКЯН, А. М. ГАСПАРЯН

О МЕХАНИЗМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ
С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

Сообщение 1.

Решение некоторых практически важных вопросов гидродинамики двухфазного потока требует выяснения механизма взаимодействия твердых частиц и жидкости при их совместном движении. Работа Гаспаряна А. М. и Заминяна А. А. [1] посвящена предварительному исследованию этих вопросов. В этом сообщении рассмотрено совместное падение двух одинаковых шариков в вязкой жидкости при ламинарном режиме.

1. Рассмотрим вопрос взаимодействия одного шарика с вязкой жидкостью при их относительном движении. Известное решение задачи Стокса о падении одного шарика в вязкой жидкости, полученное посредством интегрирования линеаризированных уравнений (без инерционных членов) Навье-Стокса для бесконечной области вокруг твердого непроницаемого шарика, приводит к полю скоростей, выраженному компонентами v_r , v_θ следующим образом (обозначения приведены в конце статьи):

$$v_r = \frac{1}{2} U_0 \cos \theta \left(\frac{a^3}{r^3} - 3 \frac{a}{r} \right); \quad (1)$$

$$v_\theta = \frac{1}{4} U_0 \sin \theta \left(\frac{a^3}{r^3} + 3 \frac{a}{r} \right), \quad (2)$$

графическое представление которых (рис. 1а) показывает кинематику движения жидкости вокруг шара при его ламинарном падении. По этому решению имеет место: а) полная симметрия абсолютных величин скоростей относительно экваториальной плоскости шарика; б) падение этих скоростей с удалением от него. Эюры нормальных составляющих скоростей (v_r) показывают притягивание жидкости к шару выше его экваториальной плоскости и отталкивание от него ниже этой плоскости. На экваторе жидкость не притягивается и не отталкивается шаром. Касательные же составляющие скорости (v_θ) получают максимальное значение в экваториальной плоскости, а в полюсах превращаются в ноль.

Нормальные и касательные напряжения, соответственно получа-
ют значения

$$p_{rr} = 3\mu \frac{U_0 \cos \theta}{r} \left(\frac{3}{2} \frac{a}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right), \quad (3)$$

$$p_{\theta\theta} = -\frac{3}{2} \mu \frac{U_0 \sin \theta}{r} \cdot \frac{a^3}{r^3}. \quad (4)$$

Если давление считать положительным по положительному направлению r , то выражение нормальных напряжений показывает давление жидкости на шар с лобовой стороны шарика и, разрежение — в

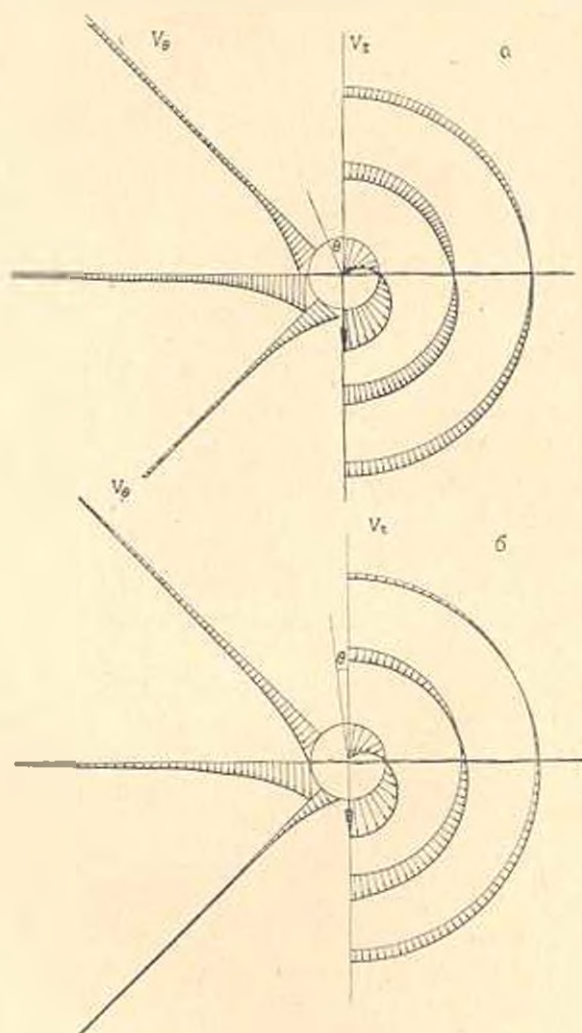


Рис. 1. Элюры скоростей по Стоксу и Озсену

его тыловой части. В экваториальном сечении, как и нужно было ожидать (рис. 1), шарик не испытывает нормального напряжения. Тангенциальные напряжения, направленные против движения шарика, имеют максимальное значение в экваториальной плоскости и, нулевые значения в полюсах. Сопротивление жидкости движению шара, представляющее значения на поверхности шара проекций на направление

движения нормальных и тангенциальных напряжений, имеет постоянное значение $W_{\text{зс}} = \frac{3}{2} \mu \frac{U_0}{a}$ на единице поверхности шара. Сумма сопротивлений по поверхности шара

$$W_0 = 2\pi a^2 \left(\int_0^\pi p_{rr} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta - \int_0^\pi p_{\theta\theta} \sin^2 \theta d\theta \right) = \\ = 2\pi \mu U_0 a + 4\pi \mu U_0 a = 6\pi \mu U_0 a. \quad (5)$$

Две трети этой величины образуются от трения и одна треть от давления жидкости на шар. Это обобщенный закон сопротивления Стокса.

Качественно новый результат получается при решении уравнений Навье-Стокса с сохранением одного из инерционных членов, как это сделал Озеен в 1910 г. В этом случае воздействие жидкости на шар получается несимметричным относительно экваториальной плоскости. Оно сильнее выражено в лобовой части шарика и, слабее — в тыловой части. На рис. 1б представлено поле скоростей вокруг падающего шарика, полученное Озееном: слева тангенциальные, справа нормальные составляющие скорости. Как видно из рис. 1б, в отличие от решения Стокса, в экваториальном сечении имеются нормальные скорости и соответствующие напряжения. Причем, нормальная скорость в переднем полусе имеет большее значение, чем в заднем.

Сопротивление шара, вычисленное по Озееном

$$W_0 = 6\pi \mu U_0 a \left(1 + \frac{3}{8} Re \right), \quad (6)$$

в отличие от решения Стокса, зависит также от числа Рейнольдса. Здесь, как и в решении Стокса, две трети сопротивления образуются от сил трения, одна треть от давления.

Движение двух шариков в вязкой жидкости, рассмотрено также приведенными двумя методами: Стокса (Смолуховский [2], Факсен, Даль [3], Стимсон и Джефри [4], Кинч [5]) и Озеена [3]. Сложность удовлетворения граничных условий в этом случае заставляла авторов прибегнуть к методу отражения, как это сделал Ламб при решении задачи об обтекании двух шариков идеальной жидкостью. В зависимости от числа отражений, примененных разными авторами при решении этой задачи, оно доведено до определенной точности.

Так как решения первой группы авторов в основном являются уточнением решения Смолуховского с помощью увеличения числа отражений, то приводим здесь только результаты, полученные Смолуховским [2].

Сопротивление шарика 1 в присутствии шарика 2 по Смолуховскому выражается следующим образом:

$$W_1 = 6\pi\eta Ua \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a_2}{l} \left(1 + \frac{l_2^2}{l} \right) + \frac{9}{16} \frac{a_1 a_2}{l^2} \left(1 + 3 \frac{l_2^2}{l^2} \right) \right]. \quad (7)$$

Тогда, при параллельном движении ($l_2 = 0$) двух одинаковых шариков ($a_1 = a_2 = a$) сопротивление каждого из них

$$W = 6\pi\eta Ua \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} + \frac{9}{4} \frac{a^2}{l^2} \right). \quad (8)$$

При движении шариков друг за другом ($l_2 = l$) сопротивление каждого из них

$$W = 6\pi\eta Ua \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} - \frac{9}{4} \frac{a^2}{l^2} \right). \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что в (8) и (9) множитель в скобках всегда меньше единицы, поэтому в обоих случаях сопротивление шарика при наличии второго уменьшается. Причем, когда они падают друг за другом сопротивление каждого из них меньше, чем при их параллельном падении, и, при параллельном падении меньше, чем при свободном падении ($l = \infty$).

Имея ввиду, что при установившемся падении шариков их сопротивление уравновешивается силой тяжести, являющейся постоянной величиной, сказанное выше означает, что скорость совместного падения шариков соответствующим образом больше скорости свободного падения.

Вычисленный Смолюховским действующий на шарик 1 момент вращения от присутствия шарика 2, если движение происходит по оси x (при $a_1 = a_2 = a$) будет равен:

$$M = 4\pi\eta U \frac{a^2}{l^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} \right) \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (10)$$

где x, y, z координаты центра второго шарика, когда начало координат в центре первого. Тогда, при параллельном движении двух шариков ($x = 0$) в плоскости x, y ($z = 0, y = l$) момент вращения, действующий на каждый шарик:

$$M = 4\pi\eta U \frac{a^2}{l^2}. \quad (11)$$

В случае, когда второй шарик находится на одной вертикали с первым ($x = l, y = z = 0$) момент вращения, действующий на шарик равен нулю.

Следовательно, при совместном падении двух одинаковых шариков всегда имеет место вращение шариков вместе с поступательным движением, кроме случая их движения друг за другом. Поэтому, решения задачи о поступательном движении двух шариков без учета их вращения могут быть рассмотрены только применительно к случаю движения двух шариков друг за другом.

Вычислив для этого случая сопротивление каждого из двух совместно падающих шариков в зависимости от расстояния их центров по методам Смолуховского, Даля, Факсена, Стимсона и Джеффрипри-

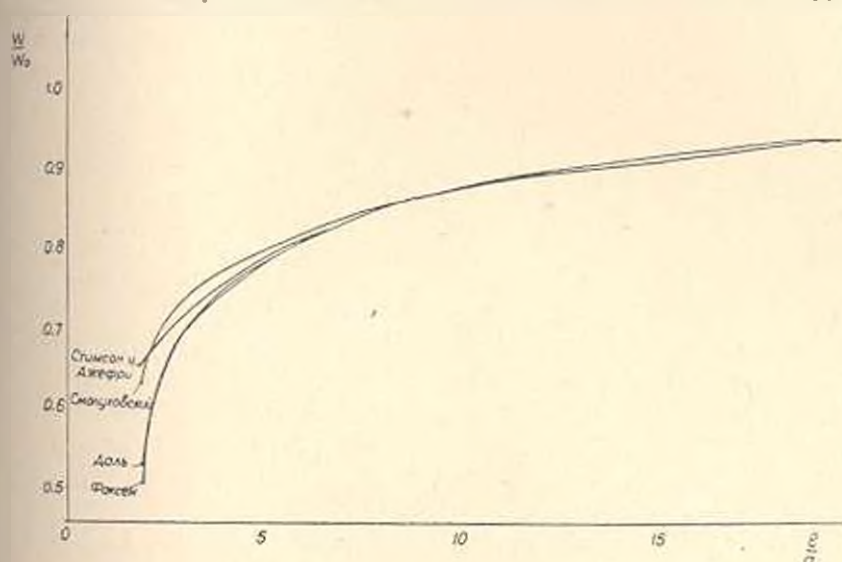


Рис. 2. Сравнительный график зависимостей сопротивления двух шариков от их расстояния, полученных разными авторами интегрированием линеаризованных уравнений Навье-Стокса.

водим их величины в графической зависимости $\frac{W}{W_0} = f\left(\frac{l}{a}\right)$, приведенной на рис. 2.

Сопоставление решений этих авторов показывает их удовлетворительную согласованность за пределами $\frac{l}{a} = 10$ и расхождение, до-

ходящее до 30%, при $\frac{l}{a} = 2$. Эти же кривые на рис. 2 показывают,

что сопротивление шарика при совместном движении может уменьшиться до двух раз по сравнению с таковым при его свободном движении ($\frac{l}{a} \approx 2$) и, почти исчезает влияние второго шарика, когда

$\frac{l}{a} = 20-30$. Подытоживая решения авторов, пользовавшихся методом

Стокса отметим, что по этим решениям совместное падение двух одинаковых шариков совершается с одинаковой скоростью, следовательно, без изменения расстояния между ними — как в жесткой системе.

Другой результат получил Озеел [3] при рассмотрении задачи поступательного движения двух шариков с учетом одного инерционного члена в уравнениях Навье-Стокса.

Как было установлено анализом решения Смолуховского, совместно падающие два шарика движутся поступательно только при их

расположении на одной вертикали (момент вращения равен 0). Поэтому решение Озеена рассматривается для такого-же случая, считая это наиболее соответствующим постановке задачи Озеена. При этом сопротивление шарика, движущегося спереди по Озеену, получает значение:

$$W = 6\pi\mu U_1 a \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{l} e^{-2\pi l/a} \right), \quad (12)$$

а для следующего шарика:

$$W = 6\pi\mu U_2 a \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{l} \right). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что при одинаковых сопротивлениях шариков скорость впереди движущегося шарика всегда меньше, чем второго шарика и, чем больше число Рейнольдса, тем больше эта разница.

Так, например, при $Re \rightarrow 0$ $U_1 = U_2$; при $Re = 0,01$ $\frac{U_2 - U_1}{U_2} = 1,01$; при

$Re = 1$ это отношение равно 1,25, при $\frac{a}{l} = 0,5$ и 1,02, при $\frac{a}{l} = 0,1$.

Следовательно, согласно (12) и (13) два шарика должны двигаться с убывающим расстоянием между ними.

Резюмируя изложенное отметим, что имеется противоречие между постановкой задачи и результатом рассмотренных решений линейризованных уравнений Навье-Стокса, выраженное в неучете при поступательном движении вращательного момента, наличие которого установлено этими же решениями. Кроме этого в решении Озеена (при учете одного инерционного члена) появляется второе противоречие: неучет нестационарности движения шариков, вытекающий из результата решения.

Единственным критерием для оценки имеющихся решений остается эксперимент. Однако, в существующих экспериментальных работах данные неполные и выводы противоречивы. Вследствие визуальных поставленных опытов одни авторы [5, 6] подтверждают правильность теоретических решений первой группы авторов, другие [7] утверждают противоположное.

2. Для экспериментирования авторами был избран случай ламинарного падения шариков по одной вертикали.

Опыты были проведены с тщательно отобранными по весу и размерам ($\gamma = 7,76 \text{ г/см}^3$, $d = 1 \text{ мм}$) двумя стальными шариками, падающими по оси цилиндра диаметром 88 мм и длиной 600 мм, заполненного глицерином, или его водными растворами разных концентраций. Пуск шариков совершался расположенным на оси цилиндра медицинским шприцем, снабженным наконечником, позволяющим регулировать расстояние шариков перед пуском в среду, а также поддерживать шарик, или освободить их по необходимости. Во избежание прилипания пузырьков воздуха шарик предварительно отмачивался средой, а также хранились и переносились всегда в среде. В целях

термостатирования измерительный цилиндр помещался в кожух из органического стекла диаметром в 110 мм, по которому циркулировала вода, подаваемая из ультратермостата. Опыты начинались после достижения заданной постоянной температуры содержимого цилиндра. В течение одной серии опытов колебания температуры не превышали 0,05°С. Рядом с измерительной установкой прикреплялся секундомер с ценой делений в 0,1 сек. Для увеличения точности чтения его показаний пользовались увеличительной лупой, покрывающей всю поверхность циферблата. Во избежание излишней вычислительной работы при обработке экспериментального материала, линейный масштаб на оси цилиндра был перенесен в наружу с учетом оптических эффектов среды и стен установки. В нижней части цилиндра было два последовательно соединенных стеклянных крана, с помощью которых можно было доставать шарики со дна цилиндра после каждого опыта, без потери жидкости и без возмущения среды.

На описанной выше экспериментальной установке можно было получить непрерывную зависимость скоростей шариков от расстояния между ними с фиксацией всей траектории их совместного падения вместе со временем, киноаппаратом.

Определив скорости падения шариков по разностям координат и времени в последующих кадрах с их 15-кратным увеличением при обработке, авторы пришли к выводу о колебательном характере скорости падения как двух шариков, так и одного шарика.

Последовательным проектированием на бумагу всех кадров опыта при падении одного шарика был выявлен характер движения шарика по винтовой траектории. Это дало возможность объяснить наблюдаемое нами ранее периодическое сближение и удаление двух шариков при их совместном падении.

В свете изложенного и, во избежание громоздкой статистической обработки экспериментального материала, был применен осредненный метод измерения скоростей шариков посредством фотографирования положений шариков и стрелок секундомера в начале и в конце рабочего участка, что осуществлялось следующим образом. Шарик набирался в наконечник шприца и устанавливался в нем на определенном расстоянии друг от друга. При готовности пускателя и фотоаппарата шарики отправлялись в цилиндр, затем фиксировались время и их положение в начале и в конце рабочего участка (длиной 20—25 см) фотографированием. Полученные два снимка по одному опыту изображали картину при нахождении шариков в некотором начальном положении, и в конечном. Причем, в начале шарики бывали на большем расстоянии друг от друга, чем в конце. Обработка такого экспериментального материала заключалась в чтении времени и координат шариков в увеличенном масштабе, доведенном до натуральной величины.

При точности чтения координат $\pm 0,5$ мм и времени $\pm 0,05$ сек была достигнута точность определения скорости падения шариков $\pm 0,5\%$.

Было проведено 30 серий опытов в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,0035 до 0,5. Каждая серия состояла из 10–15 измерений по совместному падению двух шариков с различными начальными расстояниями между ними и, нескольких измерений скоростей падения одиночного шарика, принимаемой за скорость свободного падения в условиях данной серии опытов. В целях контроля, скорости свободного падения обоих шариков определялись в начале, в середине и в конце серии. В табл. 1 приведены, в качестве примера, результаты одной серии опытов, соответствующих $Re = 0,037$.

Таблица 1

 $Re = 0,037, U_0 = 1,465 \text{ см/сек}$

№	l_1 см	l_2 см	l_{12} см	L_1 см	L_2 см	U_1 см/сек	U_2 см/сек	U_1 U_0	U_2 U_0	$\frac{U_1 - U_2}{U_0}$
1	—	—	—	17,8	—	1,471	—	—	—	—
2	0,35	0,15	0,20	12,05	12,25	1,827	1,858	1,247	1,268	0,021
3	0,55	0,20	0,375	19,6	19,95	1,735	1,735	1,163	1,184	0,021
4	0,60	0,25	0,425	20,15	20,50	1,688	1,695	1,137	1,157	0,020
5	0,80	0,50	0,650	20,10	20,40	1,559	1,580	1,063	1,079	0,016
6	0,90	0,65	0,765	19,85	20,12	1,590	1,610	1,065	1,099	0,014
7	1,00	0,70	0,850	18,35	18,65	1,610	1,635	1,099	1,115	0,016
8	1,45	0,20	1,325	20,25	20,40	1,522	1,535	1,039	1,048	0,009
—	—	—	—	30,0	—	1,490	—	—	—	—
—	—	—	—	19,6	—	1,462	—	—	—	—
1	1,00	0,700	0,850	19,85	20,15	1,582	1,585	1,067	1,081	0,014
2	1,14	0,85	0,995	14,54	14,85	1,65	1,595	1,069	1,089	0,020
3	1,25	0,90	0,075	20,20	20,55	1,519	1,545	1,036	1,051	0,016
4	1,50	1,25	1,375	20,10	20,35	1,490	1,508	1,017	1,028	0,011
5	1,73	1,45	1,59	19,52	19,8	1,495	1,515	1,020	1,033	0,013
—	—	—	—	19,1	—	1,472	—	—	—	—
—	—	—	—	19,1	—	1,459	—	—	—	—

Анализ экспериментального материала показывает независимость относительной скорости верхнего шарика от числа Рейнольдса. С достаточной точностью она аппроксимируется функцией от расстояния шариков по формуле:

$$\frac{U_1}{U_0} = 1 - 2 \left(\frac{a}{l} \right)^{1,38}, \quad (14)$$

показанной сплошной кривой на рис. 3. Относительная скорость нижнего шарика является функцией как расстояния шариков, так и числа Рейнольдса (см. рис. 4а, 4б). Анализ экспериментального материала привел авторов к выводу о целесообразности представления этой зависимости линейной функцией $\frac{l}{a}$ вида

$$\frac{U_2 - U_1}{U_0} = b_0 + K \frac{l}{a}, \quad (15)$$

где

$$b_0 = 0,261 Re^{0,238};$$

$$K = -5,37 \cdot 10^{-3} Re^{0,8}, \quad (16)$$

Каждая из экспериментальных точек на рис. 4 представляет результат целой серии опытов с заданной величиной Re , поэтому наблюдаемый разброс точек относительно кривых (16) невелик. В свете изложенного и в силу (15) и (16) получаем:

$$\frac{U_2 - U_1}{U_0} = 0,261 \cdot Re^{0,728} - 5,37 \cdot 10^{-3} Re^{0,8}. \quad (17)$$

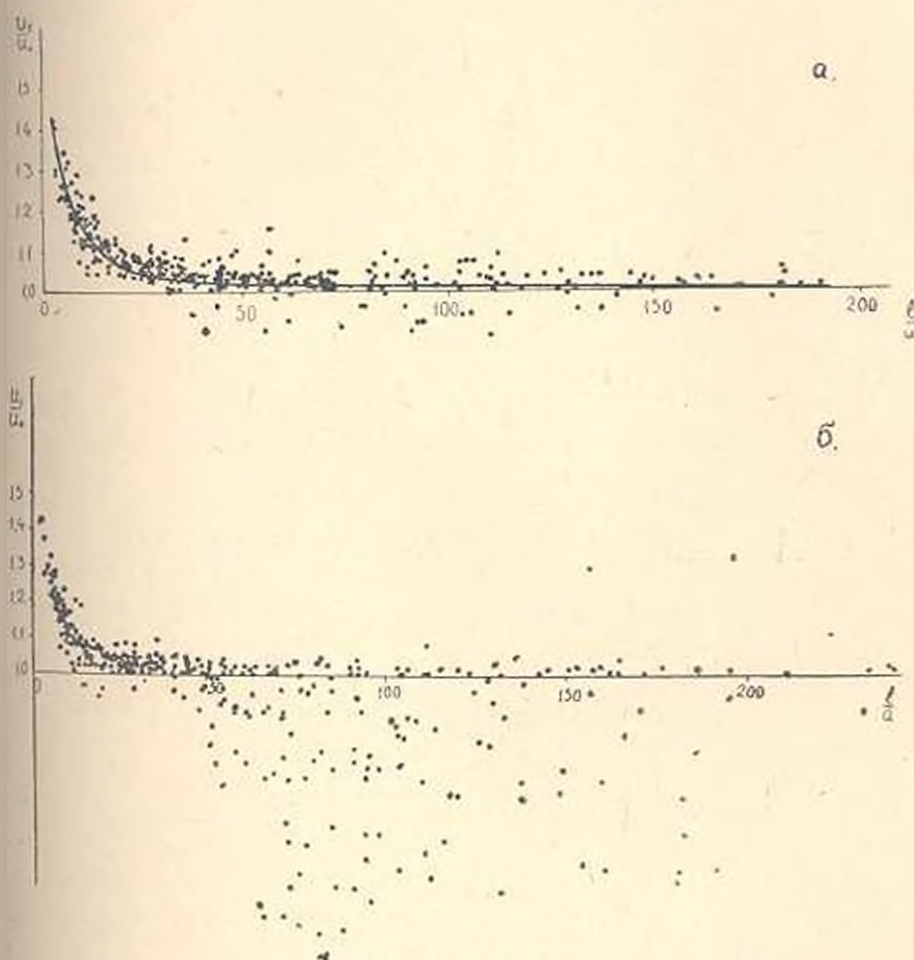


Рис. 3. Зависимость $\frac{U_1}{U_0} = f\left(\frac{l}{a}\right)$ и $\frac{U_2 - U_1}{U_0} = f\left(\frac{l}{a}\right)$ для всех опытов.

В отличие от формулы (14), формула (17) предлагается применять в области $\frac{l}{a} \leq 50$. При $\frac{l}{a} = 200$ скорость обоих шариков стремится к значению скорости свободного падения. Обе формулы (14) и (17) являются обобщением опытов в области $Re = 0,037 \div 0,5$.

3. Анализ результатов 536 опытов, показывает, что при совместном падении двух одинаковых шариков по одной вертикали имеет

место сокращение расстояния между ними. Этот вывод опровергает результаты решения, полученных методом Стокса и качественно подтверждает правильность решения Озеена. Величины относительных скоростей верхнего и нижнего шариков по решению Озеена и по формуле (17) приводятся в табл. 2.

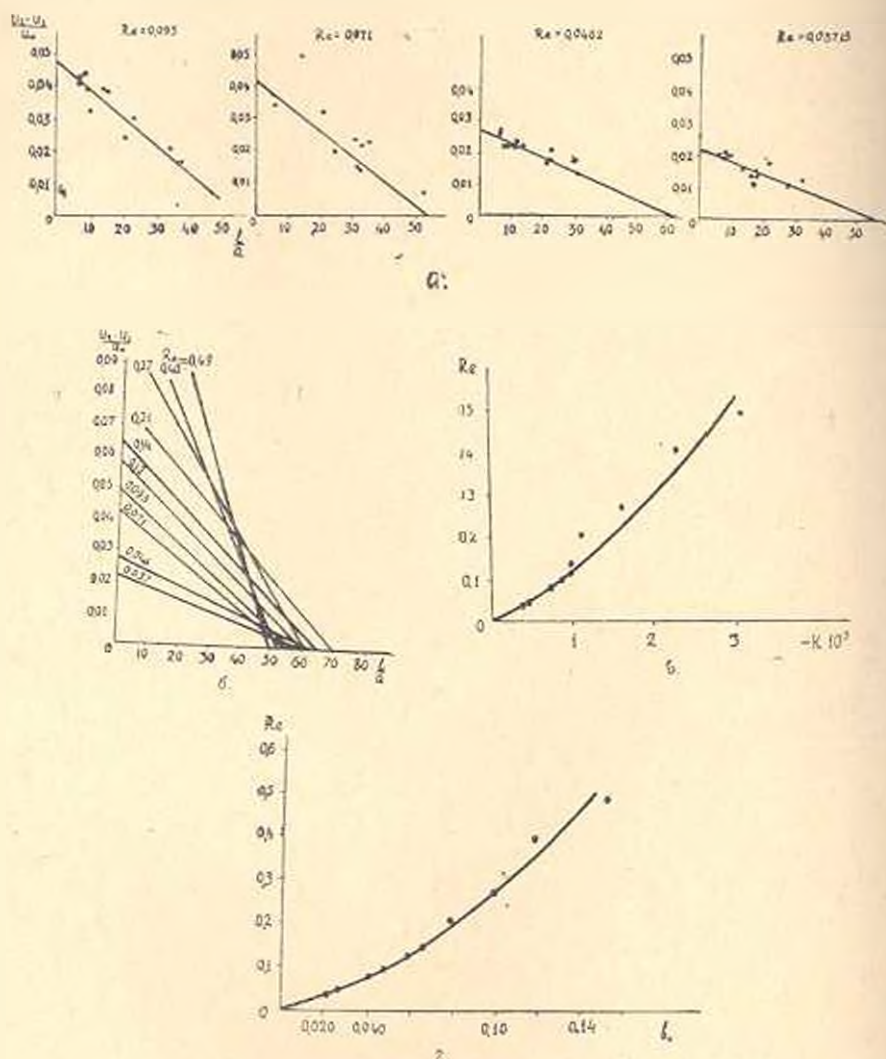


Рис. 4. а) Графические зависимости $\frac{U_2 - U_1}{U_a} = f\left(\frac{l}{a}\right)$ при разных значениях Re ;

б) Зависимость $\frac{U_2 - U_1}{U_a} = f\left(\frac{l}{a}, Re\right)$ в параметрической форме;

в) $K = -5,37 \cdot 10^{-3} \cdot Re^{0,8}$; г) $b_0 = 0,261 \cdot Re^{0,728}$.

Из табл. 2 видно, что при малых величинах числа Рейнольдса решение Озеена дает завышенные значения скоростей двух шариков; по сравнению с формулой (17), а при больших значениях числа Рейнольдса наблюдается обратная картина. Это свидетельствует о том,

Таблица 2

Re	0,05				0,5			
	5	10	25	50	5	10	25	50
$\frac{l}{a}$ по (17)	0,0267	0,0243	0,0170	0,0047	0,1421	0,1267	0,0805	0,0035
$\frac{l}{a}$ по Озеена	0,045	0,032	0,0213	0,013	0,0880	0,0800	0,025	0,015

что влияние числа Рейнольдса в теоретическом решении Озеена отражено слабо.

Рассматривая изменение тех-же величин с изменением расстояния шариков от $\frac{l}{a} = 5$ до $\frac{l}{a} = 50$ замечаем, что оно также слабее выражено в решении Озеена, чем в результатах эксперимента. Это особенно сильно выражено при $\frac{l}{a} > 50$, когда падение нижнего шарика в присутствии верхнего шарика происходит медленнее по сравнению со свободным падением. Этот качественный результат не находится в соответствии с существующими теоретическими решениями.

Возможность такого случая может быть выявлена из исследования Кинча [5] о совместном падении трех и более шариков, согласно которым при числе шариков, больше двух, падение совершается со стремлением сближения шариков по вертикали.

В ы в о ы

1. Экспериментальными исследованиями авторов показано, что во всей ламинарной области два одинаковых шарика падая по одной вертикали, приближаются друг к другу. Скорости их падения зависят от взаимного расстояния и от числа Рейнольдса и, в области экспериментов с $Re = 0,037 + 0,5$, $\frac{l}{a} = 3 + 50$ выражаются эмпирическими формулами (14) и (17).

Этот вывод опровергает теоретические решения задачи о двух шариках методом Стокса и качественно подтверждает решение Озеена. При этом выявляется количественно слабое отражение в последнем как влияния числа Рейнольдса, так и отдаления шариков, на разность скоростей падения двух шариков.

2. Обнаружено, что в пределах $\frac{l}{a} = 50 + 150$ имеет место торможение нижнего шарика верхним по сравнению со скоростью сво-

бодного падения, тогда как верхний шарик всегда падает быстрее скорости свободного падения. Этот вывод не вытекает из существующих теоретических решений задачи о двух шариках.

3. Подтверждено, что шарики падают по одной вертикали одновременно вращаясь.

4. Показано наличие двух внутренних противоречий в решении Озеена (неучет в постановке задачи нестационарности движения шариков и момента вращения).

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ρ, ρ_0 — плотность материала шарика и жидкости;

$$\rho^* = \rho - \rho_0$$

γ, μ — кинетический и динамический коэффициенты вязкости жидкости;

a, d — радиус и диаметр шарика;

a_1, a_2 — радиусы первого и второго шариков;

l — расстояние центров двух шариков;

l_z — проекция l по направлению движения шариков;

r, θ — полярные координаты при расположении начала системы в центре шара;

l_0 — начальное расстояние шариков;

l_∞ — конечное расстояние шариков;

$$l_{cp} = \frac{l_0 + l_\infty}{2} \text{ — среднее расстояние шариков;}$$

U_0 — скорость свободного падения шара;

U_1, U_2 — скорости совместного падения нижнего и верхнего шариков;

$$\Delta U = U_2 - U_1;$$

U — скорость совместного падения шариков;

V_r, V_θ — компоненты поля скоростей жидкости вокруг падающего шарика;

$p_{nn}, p_{\tau\tau}$ — нормальное и касательное напряжения в жидкости при падении в ней шара;

W — сопротивление жидкости падению шара при совместном падении двух шаров;

W_0 — сопротивление при свободном падении одного шара;

M — момент вращения, действующий на шар от присутствия второго;

$$Re = \frac{aU}{\gamma} \text{ — число Рейнольдса, отнесенное к радиусу шара;}$$

$$Re_l = \frac{lU}{\gamma} = \frac{l}{a} Re \text{ — число Рейнольдса, отнесенное к расстоянию шариков.}$$

U. S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE: 1964 O - 340-401-341.

ԵՐԿՅԱԶ ՀՈՒՍՆԵՐՈՒՄ ՊԵՆԻ ՄԱՌՆԻԿՆԵՐԻ ԵՎ ՄԱՅՈՒՅԻՎ ՀԵՂՈՒԴԻ
ՓՈՆԱԶԻԿՑՈՒԹՅԱՆ ՄԵՆԱՅԻԶՄԻ ՄԱՍԻՆ

၁၂၈၇ ခုနှစ် ဇူလိုင်လ ၁ ရက်နေ့

[illegible]

Երկու գնդիկների համատեղ շարժման խնդիրը մաթոցիկ միջավայրում
դիտված է մի շարք հեղինակների կողմից, որոնցից մեծ մասը (Սմոլուխովս-
կի [2], Չախյան, Դալ [3], Ռոբման և Զեֆրի [4], Կինչ [5]) հիմք է ընդունել
Ստոքսի հավասարումները։ Տարբեր մոտախրուսթյուններով ինտեգրելով,
Նրանք $Re \ll 1$ տիրույթի համար ստացել են, որ, ա) անկախ իրենց փոխա-
դարձ դիրքից, Երկու համաստր գնդիկներն ունեն համաստր դիմագրուսթյուն
բ) Համընթաց ուղղագիծ շարժման ժամանակ միջավայրի կողմից դնդիկների
վրա ազդում է պտտող մոմենտ, որը դրս է միայն, Երբ դնդիկներն ընկնում
են նույն ուղղահայացով։

Յուզգ Դ. արված, որ (ւս)-ն բխում է հուշն մեկնողով ստացված մեկ գնդիկի անկման խնդրի լուծումից, որի համաձայն գնդիկի հասարակածային հաս-վածքի նկատմամբ արագությունները ու շարվածությունները դաշտը սիմետ-րիկ է:

Ենդրի յումման մյուս մեթոդը ստադարկված է Սղեննի կողմից [3], որի հիմքում զբված են Նափի-Սուորսի համասարումները՝ մեկ ինքնքրիան տնդումի մոաալոր ընդգրկումով: Ստադված է, որ. ա) Երկու համասար գնդիկներ համասող ընկնկիս սաբրեր ումերով են աղղում միմյանց վրա և արագացումներ աաաաղանում: բ) Հասարակածային կարվածրում գնդիկի վրա աղղող նորումս լարվածությունները գրո շեն, ուստի հարեան գնդիկներն բոս հորիզոնականի երար հրում են:

Որակապես առաջինը այս երկու խոմոսները գնահատելիս նկատում ենք, որ, նրանք իրենց մեջ պարունակում են Ներքին հակառակդյուններ:

Առաջին դեպքում խնդրի դրվածքում բացակայում է զնգիկի պատման
շալվանը, իսկ արդյունքում ստացվում է պատման մեմենտ, որ բնյանաւոր
առմամբ սուրբեր է զրոյից (բացի վերոհիշյալ դեպքից):

Երկրորդ ղեկարում խնդրի հիմքում դրված է գնդի հաստատված ուղղա-
վածային շարժում. իսկ արդյունքում երկու գնդիկի համառոտ շարժումն արա-
նագրում է պարունակում:

ձեռքի և ճակատի լուծման իրական նախադրյալների բացառությունը այսուհետև միայնակ լինելու և մեծ խնայողությամբ լուծումները գնահատելու համար զիմեյ կերպով փորձնական ստուգման, բանի որ զրահանության տվյալների համաձայն կարգա տարբեր աշխարհում լուծումներն էլ փորձնական հաստատվում են գտնել տարբեր հեղինակների կողմից [6, 7]:

Որ փորձնական առումնադրությոնները երկու համասար զնդրկները համասեր անկման փերաբերյալ ցույց են տվել, որ.

1. Նույն ուղղահայացով բնկենկա $Re = 0,0035 - 0,5$ տիրույթում, զնդրկ-

ների հեռավորություն փոփոխության $\frac{l}{a} = 3,0-200$ սահմաններում անկման հանապարհին նրանք մոտենում են իրար: Դա որակապես հաստատում է Ոգենենի լուծման առավելությունը և բնդգծում առաջին խմբի հեղինակների ստացած արդյունքների անհիմն լինելը:

2. Նկատված է, որ գնդիկների մեծ հեռավորության դեպքում ($\frac{l}{a} > 50$) տեղի է ունենում ներքևի գնդիկի անկման արագության փոքրացում ազատ անկման համեմատությամբ այն ժամանակ, երբ վերևի գնդիկը միշտ բնկնում է ազատ տնկումից արագ: Սա չի բխում գոյություն ունեցող ոչ մի տեսական լուծումից:

Գնդիկների արագության չափումները կատարված են մեծ ճշտությամբ գնդիկների նախնական ու վերջնական կոորդինատների ֆուտո նկարահանման միջոցով, բնդգրկելով նաև ժամանակի ցուցմունքը:

Արդյունքներն ամփոփված են (14) և (17) էմպիրիկ բանաձևերով: Արդյունքների քանակական վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ դիտված տիրույթում Ոգենենի լուծման մեջ ինչպես Ռեյնոլդսի թվի, այնպես էլ գնդիկների հեռավորության ազդեցությունը թույլ են տրտահայտված համատեղ անկման արագության մեջ:

Նկատի ունենալով նազիկ—Ստոքսի հավասարումների միանգամայն անթերիությունը լամինար շարժման համար դալիս ևնք այն նդրակացության, որ Ոգենենի կողմից թույլ տված մոտավորություններն անընդունելի են խնդրի լուծման համար: Դրանք, ըստ երևույթին, վերաբերում են ինչպես շարժման ստացրտնարացման, այնպես էլ համընթացության պայմաններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. М. Гаспарян, А. А. Золотников, «О механизме падения частиц в вязкой среде» ДАН, АрмССР, т. XXVI, № 1, 1958.
2. M. Smoluchowsky, Bulletin Int. del Academie des Sciences de Cracovie, Cl. des Sc. Math. et Nat., Serie A, 1911, 28—29.
3. Handbuch der Experimental Physik, b. 4, I, teil 206.
4. M. Stimson and G. B. Jeffery, Proc. Roy. Soc., A, 111, 1926 pp. 110—116.
5. G. J. Kynch, The slow motion of two or more Spheres through a viscous Fluid, Fluid Mech., 5, 1959, pp. 193—208.
6. Eveson, Hall and Ward, Brit. J. Appl. Phys., 1959, 10, N. 31, pp. 43—47.
7. H. W. Mattheus, F. B. Smith, Brit. J. Appl. Phys., 1960, 11, № 2, pp. 87—86.