

Г. А. МАКАРЯН

К ВОПРОСУ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
 В НЕПРИЗМАТИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Вопросы неплавноизменяющегося движения в непризматическом русле в литературе освещены недостаточно. Известны работы Бернадского и Мелешенко о построении плана течения в открытых руслах [1]. Однако, из-за сложности полученных решений, они не нашли применения в инженерной практике.

Из системы уравнений Навье для общего случая неравномерного движения жидкости в открытых каналах Буссинеском получено следующее уравнение [2]:

$$i_0 - \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{dh}{dl} + \frac{d}{dl} \left( \frac{uv^2}{2g} \right) - \frac{1}{g} \iint_{\omega} \left\{ \left| \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right\} d\delta \right) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (1)$$

Здесь:  $\delta$  — переменная в поперечном сечении:

$u_x, u_y, u_z, u_x', u_y', u_z'$  — проекции скорости и ускорения в какой-либо точке жидкости с координатами  $x, y, z$ . При этом направления  $x$  и  $l$  для целого потока совпадают (рис. 1).

Базируясь на приведенное общее уравнение (1) в статье делается попытка установить для рассматриваемого случая уравнение, от-

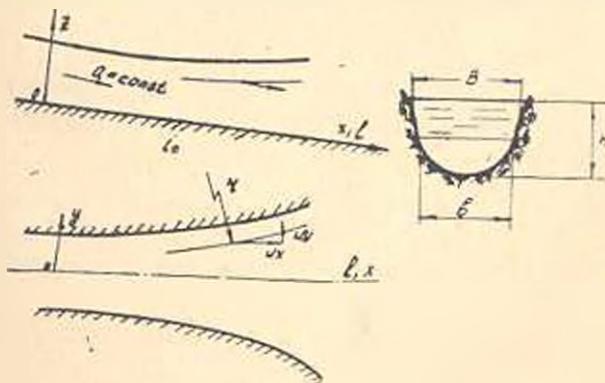


Рис. 1. Схема неравномерного движения жидкости в непризматическом русле с произвольной формой поперечного сечения.

ражающее основные особенности неплавноизменяющегося движения в непризматическом русле. С целью преобразования подинтегрального выражения уравнения (1) и установления значения поперечной составляющей ускорения  $u_y$  предполагается, что:

1. В вертикальных плоскостях исследуемого потока движение носит плавноизменяющийся характер ( $u_z = 0$ ), в то время, когда ширина потока изменяется настолько заметно, что поперечное ускорение  $u_y$  играет значительную роль.

2. Ширина поперечного сечения изменяется таким образом, что отношение местной продольной скорости к средней скорости по сечению не изменяется по времени (условие подобия эпюр продольных скоростей), т. е.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u_x}{v} \right) = 0. \quad (2)$$

3. Первый член подинтегрального выражения уравнения (1) не зависит от изменения глубины потока, и при его преобразовании следует принять  $h = h_0 = \text{const}$ .

Далее, используя уравнение неразрывности среды,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

а также, уравнение непрерывности для целого потока,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial t} = 0 \quad (\text{так как } Q = v \cdot b \cdot h_0 = \text{const}) \quad (4)$$

не трудно показать, что условие (2) сводится к следующему выражению для поперечной составляющей скорости:  $u_y = u_x \frac{y}{b} \frac{\partial b}{\partial t}$ . Тогда, учитывая (3) и пренебрегая членами порядка  $\left( \frac{\partial b}{\partial t} \right)^2$  получим

$$u_y = u_x^2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}. \quad (5)$$

К этому ускорению надо добавить еще центробежное ускорение, возникающее от криволинейности струи потока, тогда полное ускорение будет иметь вид:

$$u_y = u_x^2 \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} \left( 1 + \frac{y}{b} \right). \quad (6)$$

Согласно оговоренным допущениям последний член уравнения (1)

приводится к виду:  $\frac{1}{2g} \int_{-b/2}^{+b/2} \left| \frac{\partial u_y}{\partial t} \right| dy$ . Подставляя в это выражение

значение  $u_y$  из (6) в силу принятых выше допущений получим:

$$l_0 = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{dh}{dl} + \frac{d}{dl} \left( \frac{uv}{2g} \right) - \frac{9}{4} \frac{u_x v^2}{2g} \cdot b \frac{d^2 b}{dl^2} \quad (7)$$

Здесь коэффициент  $\alpha$  является поправкой к значению количества движения секундной массы, вычисленной по средней скорости:

$$\alpha_1 = \frac{\int n_1^2 dy}{v^2 y}$$

Уравнение (7) в достаточной для практики мере характеризует неплavnoизменяющееся движение жидкости в непризматических руслах, так как при его выводе учтены центробежное и полное поперечное ускорение и возможное расхождение струи потока.

Следовательно, оно отличается от принятой в настоящее время „модели“ плавной изменяемости потока своей общностью [3]. Подставив значение средней скорости в (7) можно свести последнее к нелинейному диф. уравнению третьего порядка, относительно  $b$ , решение которого, однако, связано с большими трудностями.

Прежде чем перейти к анализу уравнения (7), остановимся на его физической сущности. Каждое движение происходит согласно основному закону механики, суть которого заключается в том, что сумма изменений вдоль пути полной энергии и потерь на сопротивление равна нулю. Если полагать, что изменение удельной кинетической энергии потока полностью характеризуется выражением  $\frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right)$ , а удельная потенциальная энергия выражением  $\frac{dh}{dl} - i_0$ , тогда согласно уравнению (7) изменение удельной энергии сопротивления примет вид

$$\frac{v^2}{C^2 R} = \frac{9}{4} \frac{\alpha_1 v^2}{2g} b \frac{d^3 b}{dl^3}$$

В существующем уравнении плавноизменяющегося движения допущено, что потери удельной энергии на сопротивление в единицу длины происходят по закону равномерного движения, выраженного первым членом, но в тех случаях, когда движение неплavnoизменяющееся становится необходимым учесть потери энергии еще вторым членом, выражающим сопротивление на деформацию потока по его ширине.

С учетом физической картины движения жидкости в непризматическом русле криволинейного очертания (но неискривленного) представляется возможным несколько изменить структуру последнего члена уравнения, преднамеренно идя на некоторое отступление в точности учета величины потерь энергии сопротивления на деформацию потока (раньше она вообще не учитывалась), и представить в виде

$$\frac{9}{4} \frac{\alpha_1 v^2}{2g} \cdot b \frac{d^3 b}{dl^3} = \beta \cdot \frac{h}{B} \frac{db}{dl} \quad (8)$$

где  $\beta$  следует определить из опытов для компенсации всяких неточностей, в том числе и от приближенного интегрирования. При интегрировании  $\beta$  принимается постоянным.

Для частного случая прямоугольного русла и при постоянной глубине потока, когда

$$v = \frac{Q}{b \cdot h}; \quad B = b; \quad \frac{9a_1}{8g h^3} = c_0$$

будем иметь:

$$c_0 \frac{d^2 b}{dl^2} = \beta \frac{db}{dl} \quad (8')$$

откуда следует, что принятым допущением лишь понижается порядок дополнительного члена уравнения (7) без его линеаризации [5, 6].

Сделанное допущение можно рассматривать как частный способ подхода к решению уравнения (7), когда в первом приближении полагается существование функции, удовлетворяющей условию

$$\beta = c_0 \frac{b'''}{b'} = \text{const},$$

а в дальнейшем уточняется ее значение уравнением (9).

Этому условию может удовлетворить, например, любая показательная зависимость.

Следует однако отметить, что кривые очертаний непризматических русел [8] по их внешней форме сходны с кривыми показательных функций.

Следует также иметь в виду, что количество граничных условий в случае применения приведенной замены, уменьшается, так как эти условия автоматически закладываются в ур. (7) два граничных условия. Сказанное можно обосновать следующим образом. Положим, что

$c_0 \frac{d^2 b}{dl^2} = f_1$ ; а  $\beta \frac{db}{dl} = f_2$ . Соответствующие их интегралы будут:

$$c_0 b = \int \int (f_1 dl + c_1) dl + c_2 l + c_3 \quad \text{и} \quad \beta \cdot b = \int f_2 dl + c_4.$$

Согласно рассматриваемому условию (8')  $f_1 = f_2$ , тогда можно записать:

$$c_0 b = \int \int [\beta b dl] dl + c_2 l + c_3.$$

Отсюда следует, что введением условия (8)  $f_1 = f_2$  фактически уже используются граничные условия  $c_2$  и  $c_3$  и задача остается корректной.

Согласно (8) уравнение (7), для случая русла с неизменным по длине коэффициентом формы сечения, приводится к квадратуре

$$\frac{db}{dl} = \frac{Q^2 C^2 \omega^2 R - i_0 + (1 - n_k) dh}{(\beta + n_k) h/B} dl \quad (9)$$

которое при  $\beta = 0$  превращается в уравнение плавноизменяющегося движения [4].

Полученное уравнение отражает самые разнообразные случаи неравномерного движения; позволяет провести глубокий анализ и установить формы кривых очертаний русел в зависимости от энергетического состояния потока и т. д. Не имея возможности провести ши-

рокий анализ уравнения (9) [7], ограничимся, лишь, рассмотрением движения с постоянной удельной энергией сечения:  $\mathcal{E} = h + \frac{av^2}{2g} = \text{const.}$

Тогда с учетом (8) из уравнения (7) следует, что

$$\beta \frac{db}{dl} = \frac{rB}{h} \left( \frac{Q^2}{w^3 C^3 R} - l_0 \right).$$

Следовательно, движение с  $\mathcal{E} = \text{const}$  может иметь место не только при равномерном движении в прямоугольном русле, как вытекает из уравнения плавноизменяющегося движения, но также при равномерном движении в непрямоугольном русле. При интегрировании уравнения (9) следует задаваться законом изменения глубины потока. Виды очертаний при этом не зависят от  $\frac{dh}{dl}$  [8]. Надо полагать, что из всех

возможных задаваемых законов изменения глубины вдоль непрямоугольного потока чаще всего на практике будет встречаться прямолинейный закон  $\frac{dh}{dl} = \text{const}$ ; ибо если в двух сечениях русла имеются

две совершенно определенные глубины, проектировщику нет необходимости искать поверхность перехода от глубины  $h_1$  к глубине  $h_2$  в виде криволинейной свободной поверхности (см. пунктирные линии  $m$  и  $n$  на рис. 2). Поэтому достаточно иметь интеграл уравнения (9) только при  $\frac{dh}{dl} = \text{const}$ . Из этого

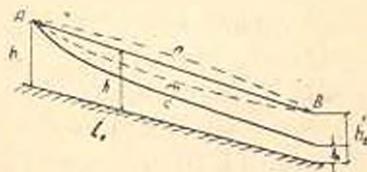


Рис. 2. Схема соединения конечных глубин на переходном участке.

следует, что значение коэф.  $\beta$  не должно изменяться с изменением глубины потока и не зависит от наклона его свободной поверхности. По этому для экспериментального определения коэф.  $\beta$  удобнее пользоваться решением уравнения (9) в случае  $\frac{dh}{dl} = 0$ . Интегрирование этого случая при  $\beta = 0$  приведено в работе [8]. В данном случае ( $\beta \neq 0$ ) решение будет иметь вид:

$$l_{1-2} = 1,151 \frac{h_0}{i_k} \lg \frac{B^2}{\left( B^2 - \frac{i_k}{i_0 \cdot a} \right)^{1 + \frac{\beta}{i_k}}} \Bigg|_{B_1}^{B_2}, \quad (11)$$

где  $B = b + 2mh$ .

Метод определения  $\beta$  излагается ниже:

1. По уравнению (11) для двух случаев  $\beta = 1$  и  $\beta = 0$  определяем соответственно, кривые очертаний русел при  $\frac{dh}{dl} = 0$ : а)  $b = f(l)_{\beta=1}$  и б)  $b = f(l)_{\beta=0}$ .

2. Для определенного расхода воды рассчитывается и строится на модели по кривым очертаний  $b = f(l)_{\beta=1}$  и  $b = f(l)_{\beta=0}$  переходный участок (например, суживающийся быстрое течение), соединяющий подводящий и отводящий равномерные потоки.

3. На стенках модели со стороны потока проводится черной краской прямая линия постоянных глубин параллельно ко дну канала (так как при расчете была принята  $h_0 = \text{const}$ ).

4. Далее пропускается расчетный расход воды, контролируемый специальным расходомером.

5. Проверяется положение следов свободной поверхности потока на стенках. Если след совпадает с заранее проведенной линией расчетных глубин, то теория верна (вывод уравнения (9), а также и его интегрирование достаточно точны). В обратном случае, сдвигая и отодвигая стенки, варьируется очертание при наличии потока воды с тем, чтобы свободная поверхность совпала с линией постоянных глубин. Таким образом, экспериментально находится положение действительного очертания стенок на плоскости дна потока.

В гидравлической лаборатории МИИВХ им. В. Р. Вильямса в изложенном порядке было проведено экспериментальное исследование бурного и спокойного потоков.

Опыты на быстротоке показали, что при очертаниях стенок с  $\beta = 0$ , что соответствует диф. уравнению плавноизменяющегося движения, переменная ширина потока получила заниженные значения вследствие чего по всей длине быстрого течения и подводящего канала глубина потока стала больше расчетной и образовалась кривая подпора в подводящем канале.

Это стало заметно, поскольку нами за постоянную расчетную глубину в быстротоке принималась глубина равномерного подводящего потока, тогда как другие исследователи обычно берут критическую глубину, при которой излишнее сужение быстрого течения может и не влиять на подводящий поток и не позволяет обнаружить ошибку, тем самым не была выявлена непригодность уравнений плавноизменяющегося движения для непрямоугольных русел. В случае очертаний быстрого течения при  $\beta = 1$  получилось наоборот — он стал шире чем потребовалось бы для действительного потока и свободная поверхность лежала несколько ниже черной линии постоянных глубин, что почти не сказывалось в подводящем канале. Совпадение расчетных и действительных глубин стало возможным при установленном опытом очертании (рис. 3).

На рис. 4 представлен вид потока сверху с тремя парами стенок быстрого течения. По фактическим замерам на рис. 3 построены кривые очертания (при  $\beta = 0$ ), II (при  $\beta = 1$ ) и III (при  $\beta$ ) с соответствующими линиями свободных поверхностей I'·II'·III'. Там заметен значительный сдвиг кривых I и I' относительно остальных кривых, из чего следует, что кривая II и (II') располагается ближе к действительным кривым, чем I и (I'), кроме того, кривая III (а также III') фактического потока

находится между кривыми с  $\beta = 0$  и  $\beta = 1$ , следовательно, как предполагалось раньше,  $0 < \beta < 1$ . Определение числового значения  $\beta$  сводится к вычислению следующего отношения (рис. 4):

$$\beta = \frac{b_{\beta} - b_{\beta=0}}{b_{\beta=1} - b_{\beta=0}} \quad (12)$$

где  $b_{\beta=0}$  — ширина потока по дну какого-нибудь сечения при кривых очертаний с  $\beta = 0$ ;

$b_{\beta=1}$  — то же при очертании с  $\beta = 1$ ;

$b_{\beta}$  — ширина потока при кривых очертаний, установленных опытным путем.

Вычисление  $\beta$  по опытным данным согласно (12) показывает, что

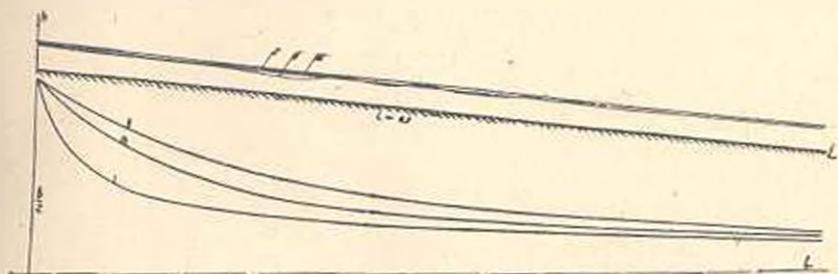


Рис. 3. Кривые очертания потока на модели быстрого тока и соответствующие кривые свободных поверхностей.

его значение изменяется по длине бурного потока незначительно и при интегрировании можно принимать его постоянным, равным в среднем, 0,65. Проверочные расчеты других очертаний с учетом  $\beta = 0,65$  по формуле (11) показали хорошее совпадение с опытным очертанием.

Исследование спокойных потоков по описанному методу показало, что при таком состоянии потоки несколько лучше подчиняются „модели“ плавной изменяемости, чем бурные: для них  $\beta = 0,3$ . Формы очертания стенок, построенных при  $\beta = 0,3$  и  $h = \text{const}$ , подтверждается хорошим соответствием действительной линии свободной поверхности потока с проведенной линией постоянных глубин. Отклонение составляло менее 0,5%. Повторные опыты, проведенные на модели быстрого тока при разных расходах, подтвердили, что форма очертания русла и  $\beta$  практически не зависят от расхода, что и следовало ожидать.

В работе [8] приведен способ приближенного интегрирования уравнения (9) с помощью вспомогательной степенной функции, содержащей, так называемый, гидравлический показатель ширины русла

$$x = - \frac{b}{\Pi_k} \frac{\partial \Pi_k}{\partial b} - \frac{b}{a_v} \frac{\partial a_v}{\partial b} \quad (13)$$

где  $a_v$  в данном случае, согласно (7) и (8), будет иметь вид

$$a_v = \frac{d}{dl} \left( \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = i_0 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \beta \frac{h}{B} \frac{db}{dl} - \frac{db}{dl} \quad (14)$$

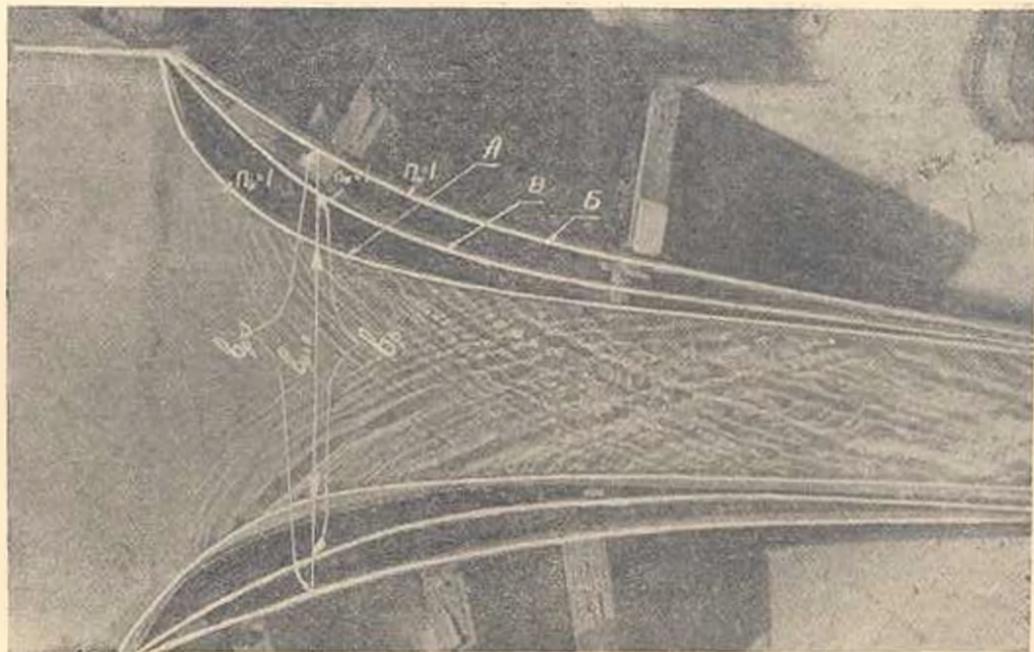


Рис. 4. Движение воды в быстротоке (вид сверху). А. Очертание стенок при  $\beta = 0$ . Б. то же при  $\beta = 1$ . В. то же при  $\beta = 0,65$  (по опытам).

Подставляя в (14)  $\frac{db}{dt}$  из (9) и определяя производную  $a_v$  (пренебрегая при этом изменением по ширине удельных потерь:  $\frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{a^2}{\omega^2 C^2 R^2} \right) = 0$ ) вместо (13) получим

$$x = \frac{\Pi_k}{\beta + \Pi_k} x_{па.}, \quad (15)$$

где  $x_{па.} = -\frac{b}{\Pi_k} \frac{\partial \Pi}{\partial b}$  — гидравлический показатель ширины при плавно-изменяющемся потоке. Для трапециoidalного русла

$$x_{па.} = \frac{3}{1 + mh/b} + \frac{1}{1 + 2mh/b}$$

и колеблется около двойки. При этом, как показывают исследования,  $x$  колеблется в окрестностях единицы. Из (15) становится возможным ограничить неплавноизменяющееся движение от плавного движения в непризматическом русле. С этой целью определим значения  $x_1$  и  $x_2$  соответствующие предельно неплавно и предельно плавноизменяющимся движениям. Их среднее-арифметическая величина будет характеризовать границу указанных потоков. Самая развитая неплавноизменяемость имеет место в сечении с  $\Pi_k = 1$ . Тогда

$$x_1 = x_{гр. непл.} = x_{па.} \frac{1}{1 + \beta}$$

Предельно плавноизменяющееся движение определяется условием  $\Pi_k \rightarrow \infty$  для бурного потока и условием  $\Pi_k \ll 1$  для спокойного потока. В связи со сказанным для бурного потока  $x_2 = x_{па.}$

$$x_{гр.} = 0,5 (x_1 + x_2) = \frac{\beta + 2}{\beta + 1} \cdot \frac{x_{па.}}{2}$$

Подставляя последнее в выражение (15) получим окончательно для первого граничного сечения между участками бурных потоков с плавно и неплавноизменяющимися струями:

$$\Pi_{гр.}^* = 2 + \beta.$$

В случае спокойного потока предельно плавное движение будет иметь место, практически, при  $\Pi_k < 0,1 \div 0,05$  и  $x_2 = \frac{0,05}{\beta_{сп.} + 0,05}$ . Повторяя вышеприведенный расчет с заменой  $x_2$  вместо  $x_{па.}$  можно определить вторую границу неплавноизменяющегося участка потока  $\Pi_{гр.}^* \div 1,1 \beta_{сп.}$ .

Таким образом, в области  $1,1 \beta_{сп.} < \Pi_k < 2 + \beta_{бур.}$  движение является неплавноизменяющимся. Приведенные выше значения  $\beta_{бур.} = 0,65$ ,  $\beta_{сп.} = 0,3$  подлежат уточнению. Вне указанной области для  $\Pi_k$  движение может считаться плавноизменяющимся и охарактеризоваться существующими уравнениями.

## Գ. Ա. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

ՈՉ ՊՐԻՋՄԱՅԱԿԱՆ ՀՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԷՆԿՈՒՎՆՆԵՐԻ ԿԱՑՈՒՆԱՑԱԾ  
ՇԱՐՎՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋՈՒՄ

## Ա մ ֆ ո ֆ ու լ լ

Հոգաժամում դուրս է բերված հեղուկների անհամասարաչափ ոչ սահուն փոփոխության շարժման դիֆերենցիալ համասարտումը՝ ստանյ սահմանափակելու արժև սահուն փոփոխականությունը բաժանելով  $\frac{d^2y}{dx^2}$ -ը  $\frac{dy}{dx}$ -ով և պայմանավորված է լինի սահուն փոփոխության շարժումը անհամասարտումը և սահուն փոփոխական լինելով  $\frac{dy}{dx}$ -ը կարգի ոչ զրոյին համասարտում հունի փոփոխական լինելով  $\frac{dy}{dx}$ -ի նկատմամբ, ժամանակակից մեխանիկայի լուծման ենթակա չէ։ Այդ իսկ պատճառով հեղինակի կողմից կատարվում է (7) համասարտման  $\frac{dy}{dx}$ -ը կարգի անհամասարտ պարունակող անյամի փոխարինում  $\frac{dy}{dx}$ -ին կարգի անհամասարտ ու նպատակահարմար ստորակտարա ունեցող և փորձնական գործակից պարունակող անհամայն  $\frac{dy}{dx}$ ՝  $\frac{dy}{dx}$ ՝ փոխարինում և նախ, ստացված դիֆերենցիալ համասարտման ինտեգրման համար հարմար տեսքի բերելը  $\frac{dy}{dx}$ -ի նկատմամբ, և երկրորդ, հնարավորություն է ստեղծում փորձնական ճանապարհով որոշվող  $\frac{dy}{dx}$  գործակիցի պնոմոգրամը չեղարացնելու նշված համասարտմանը նախորդող ձևափոխությունների, փորձելով փոխարինման և հետագա ժամանակ առկա արդյունքները անհամասարտությունները։

Հոգաժամում բերվում են նաև  $\frac{dy}{dx}$  գործակիցի փորձնական որոշման մեխանիկան և փորձելի արդյունքներից ստացված նրա թվային միջինացված արժեքները թույլ և հանդարտ շարժումների համար։

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бернадский Н. М. Теория турбулентного потока и ее применение к построению плана течения в открытых водоемах. Материалы по гидрологии, гидрометрии и водным силам. Теплоэлектропроект, 1933.
2. Бобылев Д. К. Очерк теории водяных течений, выработанной Буссинеском. Петербург, 1889.
3. Бахметьев А. А. О неравномерном движении жидкости в открытом русле. Ленинград, 1928.
4. Агроскин И. И., Пикалов Ф. И., Дмитриев Г. Т. Гидравлика. 1954.
5. Сухомин Г. А. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений. Киев, 1949.
6. Назарян А. Г. Уравнение свободной поверхности открытого потока при искривлении струй в вертикальной плоскости. Изв. АН Армянской ССР, № 1, 1953.
7. Макарян Г. А. Установившееся неплановоизменяющееся движение жидкости в непрямоугольном русле (диссертация, МПИВХ, М.), 1958.
8. Макарян Г. А. Установившееся неплановоизменяющееся движение жидкости в непрямоугольном русле. Известия АН Армянской ССР, (серия ТН) № 2, 1958.