ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XVII, № 6, 1964 Серия технических наук

ЭНЕРГЕТИКА

Г. Т. АДОНЦ

# К ТЕОРИИ И МЕТОДАМ РАСЧЕТА МНОГОПОЛЮСНИКА

## Сообщение 2

## Расчет комплексных напряжений пар зажимов многополюсника по заданным активным и реактивным мощностям источников энергии, подключенных к нему

*Постановка задачи.* Задаются параметры многополюсника ($y_{mk}$, $\varphi_{km}$) активные ($P_m$) и реактивные ($Q_m$) мощности источников, подключенных к его зажимам. Требуется определить модули ($U$) и аргументы ($\psi$) комплексных напряжений на зажимах многополюсника. Уравнения, определяющие зависимость между перечисленными величинами, имеют вид

$$P_m = U_m \sum_{k=1}^{n} U_k\, y_{mk} \cos\,(\psi_{km} + \varphi_{km});$$

$$Q_m = U_m \sum_{k=1}^{n} U_k\, y_{mk} \sin\,(\psi_{km} + \varphi_{km}), \tag{1}$$

где $k,\ m = 1,\ 2, \cdots n$.

Рассматриваемая задача расчета комплексных напряжений по заданным мощностям является одной из важнейших в общей проблеме расчета и управления режимами энергосистем, осуществляемых с помощью цифровых машин (ЦМ) Основные трудности в решении этой задачи возникают в связи с необходимостью обеспечения определенной быстроты сходимости результатов расчета, выполняемого методом последовательных приближений. Исследования этой задачи показали, что быстрота сходимости зависит не только от метода расчета, но и от структуры исходных уравнений. Предлагаемые в статье структура уравнений и методы их решения обеспечивают быстроту сходимости. Алгоритм решения рассматриваемой задачи может быть использован для расчета модулей и аргументов комплексных напряжений на генераторных и нагрузочных узлах энергосистемы по заданным активным и реактивным мощностям этих же узлов; для определения исходного режима энергосистемы, необходимого, в свою очередь, для расчетов статической и динамической устойчивости энергосистем и т. д. Предлагаемый метод расчета является итеративным и базируется на последовательном использовании решений одной системы уравнений в качестве исходных данных для решения второй системы уравнений и наоборот.

*Исходные системы уравнений.* В качестве основных принимаются следующие системы уравнений:

а) Система (2) из $(2n-2)$ уравнений относительно $(2n-2)$ неизвестных вида $\cos\psi_k$ и $\sin\psi_k$, где $k = 2, 3, \cdots n$.

$$\frac{P_1}{U_1} - U_1 g_{11} = \sum_{k=2}^{n} (U_k g_{1k} \cos\psi_k + U_k b_{1k} \sin\psi_k);$$

$$U_1 b_{11} - \frac{Q_1}{U_1} = \sum_{k=2}^{n} (U_k b_{1k} \cos\psi_k + U_k g_{1k} \sin\psi_k);$$

$$-U_1 g_{a1} = \sum_{k=2}^{n} (U_k g_{ak} \cos\psi_k + U_k b_{ak} \sin\psi_k) - \frac{P_a}{U_a} \cos\psi_a - \frac{Q_a}{U_a} \sin\psi_a;$$

$$U_1 b_{a1} = \sum_{k=2}^{n} (U_k b_{ak} \cos\psi_k + U_k g_{ak} \sin\psi_k) + \frac{Q_a}{U_a} \cos\psi_a - \frac{P_a}{U_a} \sin\psi_a; \quad (2)$$

$$a = 2; 3, \cdots n-1.$$

б) Система (3) из $(2n-2)$ уравнений относительно $(2n-2)$ неизвестных вида $\cos\psi_k$ и $\sin\psi_k$, где $k = 2, 3, \cdots n$.

$$-U_1 g_{d1} = \sum_{k=2}^{n} (U_k g_{dk} \cos\psi_k + U_k b_{dk} \sin\psi_k) - \frac{P_d}{U_d} \cos\psi_d - \frac{Q_d}{U_d} \sin\psi_d;$$

$$U_1 b_{d1} = \sum_{k=2}^{n} (U_k b_{dk} \cos\psi_k + U_k g_{dk} \sin\psi_k) + \frac{Q_d}{U_d} \cos\psi_d - \frac{P_d}{U_d} \sin\psi_d. \quad (3)$$

$$d = 2, 3, \cdots n.$$

в) Система (4) из $2n$ уравнений относительно $0{,}5n\,(n+1)$ неизвестных вида $U_k U_m$.

$$\cos\psi_m = \sum_{k=1}^{n} U_k U_m (\alpha_{mk} \cos\psi_k + \beta_{mk} \sin\psi_k).$$

$$\sin\psi_m = \sum_{k=1}^{n} U_k U_m (\alpha_{mk} \sin\psi_k - \beta_{mk} \cos\psi_k); \quad (4)$$

где

$$\alpha_{mk} = \frac{1}{P_m^2 + Q_m^2} (P_m g_{mk} + Q_m b_{mk});$$

$$\beta_{mk} = \frac{1}{P_m^2 + Q_m^2} (P_m b_{mk} - Q_m g_{mk});$$

$$m, k = 1, 2 \cdots n; \ \psi_1 = 0.$$

Вопрос о соответствии числа располагаемых уравнений системы (4) числу неизвестных вида $U_k U_m$ требует определенного анализа.

А именно, для обеспечения искомого соответствия числа уравнений системы (4) числу неизвестных вида $U_k U_m$ предлагается принять в качестве заданных величин, кроме: $\psi$, $\alpha$, $\beta$, некоторое число $k_u$ модулей напряжений. Величина $k_u$, зависящей от числа $n$ пар полюсов многополюсника, определяется порядок разбиения системы уравнений (4) на две отдельные группы. Рассмотрим сначала частные случаи $n$ и $k_u$.

а) *Случай* $k_u = 0$, *т. е.* $n = 1, 2, 3$. Уравнения (4) не разбиваются на группы, так как в этом случае их число достаточно для определения искомых величин $U_k U_m$.

б) *Случай* $k_u = 1$, *т. е.* $n = 4, 5, 6$. Система (4) из $2n$ уравнений разбивается на следующие две группы.

В первую группу включаются два уравнения, записанные относительно искомых $U_2$ и $U_3$:

$$\frac{1}{U_1^{(0)}} - U_1^{(0)} \alpha_{11} - \sum_{k=4}^{n} U_k (\alpha_{1k} \cos \psi_k + \beta_{1k} \sin \psi_k) =$$

$$= \sum_{a=2}^{3} U_a (\alpha_{1a} \cos \psi_a + \beta_{1a} \sin \psi_a);$$

$$U_1^{(0)} \beta_{11} - \sum_{k=4}^{n} U_k (-\beta_{1k} \cos \psi_k + \alpha_{1k} \sin \psi_k) =$$

$$= \sum_{a=2}^{3} U_a (-\beta_{1a} \cos \psi_a + \alpha_{1a} \sin \psi_a). \tag{$4_1$}$$

где $U_1^{(0)}$ — заданное напряжение на первой паре зажимов многополюсника.

Во-вторую группу включаются остальные $2n - 2$ уравнения, записанные относительно искомых $U_k$, $U_m$ и $U_m$:

$$\cos \psi_m = U_1^{(0)} U_m \alpha_{m1} + \sum_{a=2}^{3} U_a U_m (\alpha_{ma} \cos \psi_a + \beta_{ma} \sin \psi_a) +$$

$$+ \sum_{k=4}^{n} U_k U_m (\alpha_{mk} \cos \psi_k + \beta_{mk} \sin \psi_k);$$

$$\sin \psi_m = - U_1^{(0)} U_m \beta_{m1} + \sum_{a=2}^{3} U_a U_m (-\beta_{ma} \cos \psi_a + \alpha_{ma} \sin \psi_a) +$$

$$+ \sum_{k=4}^{n} U_k U_m (-\beta_{mk} \cos \psi_k + \alpha_{mk} \sin \psi_k), \tag{$4_2$}$$

где $m = 2, 3 \cdots n$.

в) *Случай* $k_u = 2$, *т. е.* $n = 7, 8, 9, 10$. Система (4) из $2n$ уравнений также разбивается на две группы.

В первую группу включаются четыре уравнения, записанные относительно искомых $U_3$, $U_4$, $U_5$, $U_6$:

$$\frac{1}{U_m^{(0)}}\cos\psi_m - \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)}\left(\alpha_{md}\cos\psi_d + \beta_{md}\sin\psi_d\right) -$$

$$-\sum_{k=7}^{n} U_k\left(\alpha_{mk}\cos\psi_k + \beta_{mk}\sin\psi_k\right) = \sum_{a=3}^{6} U_a\left(\alpha_{ma}\cos\psi_a + \beta_{ma}\sin\psi_a\right);$$

$$\frac{1}{U_m^{(0)}}\sin\psi_m - \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)}\left(-\beta_{md}\cos\psi_d + \alpha_{md}\sin\psi_d\right) - \sum_{k=7}^{n} U_k\left(-\beta_{mk}\cos\psi_k +\right.$$

$$\left. + \alpha_{mk}\sin\psi_k\right) = \sum_{a=3}^{6} U_a\left(-\beta_{ma}\cos\psi_a + \alpha_{ma}\sin\psi_a\right). \qquad (4_3)$$

где $m = 1, 2$; $\psi_1 = 0$, $U_1^{(0)}$, $U_2^{(0)}$ — заданные напряжения соответственно на первой и второй парах зажимов многополюсника.

Во-вторую группу включаются остальные $2n-4$ уравнения, записанные относительно искомых $U_a$, $U_kU_m$ и $U_m$:

$$\cos\psi_m = \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} U_m\left(\alpha_{md}\cos\psi_d + \beta_{md}\sin\psi_d\right) +$$

$$+\sum_{a=3}^{6} U_a U_m\left(\alpha_{ma}\cos\psi_a + \beta_{ma}\sin\psi_a\right) +$$

$$+\sum_{k=7}^{n} U_k U_m\left(\alpha_{mk}\cos\psi_k + \beta_{mk}\sin\psi_k\right).$$

$$\sin\psi_m = \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} U_m\left(-\beta_{md}\cos\psi_d + \alpha_{md}\sin\psi_d\right) - \sum_{a=3}^{6} U_a U_m\left(-\beta_{ma}\cos\psi_a +\right.$$

$$\left. + \alpha_{ma}\sin\psi_a\right) + \sum_{k=7}^{n} U_k U_m\left(-\beta_{mk}\cos\psi_k + \alpha_{mk}\sin\psi_k\right). \qquad (4_4)$$

где $m = 3, 4, \cdots n$.

Аналогично изложенному могут быть записаны уравнения для случаев $k_u = 3$, 4 и т. д., которые путем разбиения на группы уравнений $(4_1)$ и $(4_2)$, или $(4_3)$ и $(4_4)$ могут быть решены в два этапа. Решение первой из этих групп уравнений дает возможность определить $U_3$ и $U_4$ (при $k_u = 1$) или $U_3$—$U_6$ (при $k_u = 2$) как функции от остальных искомых величин $U_k$. Таким образом, при любом значении $k_u$ система (4) из $2n$-уравнений разбивается на две группы, состоящие, соответственно, из $2k_u$ и $2n-2k_u$ уравнений. Совместное решение $2k_u$ уравнений позволяет выразить $2k_u$ величин вида $U_a$ в функции $U_k$, при известных: $\alpha$, $\beta$, $\psi$ и $U_d^{(0)}$ ($d = 1$ при $k_u = 1$; $d = 2{,}3$ при $k_u = 2$ и т. д.). В результате подстановки полученных $U_a$ во вторую группу уравнений последняя оказывается содержащей $0{,}5\,(n-3k_u)\cdot(n-3k_u+1)$ неизвестных вида $U_kU_m$ и $(n-3k_u)$ неизвестных вида $U_m$. Другими словами, зависимость числа располагаемых уравнений $2n-2k_u$ от числа искомых неизвестных вида $U_kU_m$ и $U_m$ определяется условием

$$2n-2k_n \geqslant 0{,}5\,(n-3k_n)\,(n-3k_n+1)+(n-3k_n). \tag{5}$$

которое после преобразований принимает вид

$$k_n = \frac{6n+5-\sqrt{96n+25}}{18}. \tag{$5_1$}$$

Принимая, что ($5_1$) формально верна и для случая $n=1, 2, 3,$ получим следующие величины $k_n$ в функции ряда значений $n$.

| $n$ | 1÷3 | 4÷6 | 7÷10 | 11÷14 | 15÷18 | 19÷21 | 22÷25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

### Алгоритм решения поставленной задачи

Рассмотрим решение для случая $k_n=2$. Имеется в виду, что задачи для случаев $k_n=3, 4$ и т. д. решаются по аналогичному алгоритму.

*Принцип расчета.* Берутся в качестве нулевого приближения некоторые значения $U_k^{(0)}$ модулей напряжений пар зажимов многополюсника. В качестве таких напряжений могут быть взяты или а) некоторые произвольные величины $U$, или б) номинальное напряжение данной схемы замещения, или в) напряжения, найденные по уравнениям (4) при условии $\psi_k=0$. Заметим, напрежения на $k_n$ парах зажимов (в данном случае, $U_1^{(0)}$ и $U_2^{(0)}$), оказываются параметрами уравнений, так как они, по условиям задачи, задаются в качестве известных величин. Путем совместного решения уравнений (2) и (3) находятся значения углов $\psi_k^{(1)}$, которые принимаются в качестве первого приближения к искомым величинам $\psi_k$. Найденные значения углов подставляются в уравнения (4), в результате решения которых находятся модули напряжений $U_k^{(1)}$ пар зажимов многополюсника. Эти напряжения принимаются в качестве первого приближения к искомым величинам $U_k$. Путем подстановки последних в уравнения (2) и (3) и их совместного решения находятся новые значения узлов $\psi_k^{(2)}$, принимаемые в качестве второго приближения к искомым величинам и т. д. Описанный процесс повторяется $\sigma$ раз, пока приращения между модулями напряжений каждой пары зажимов многополюсника в $\sigma$-ом и $(\sigma-1)$-м приближениях не окажутся меньше величины допустимой погрешности решения задачи.

*Схема расчета.* Введем для обозначения шага последовательных приближений к искомым величинам $U$ и $\psi$ верхний индекс $(i)$, т. е. $i=1, 2, \cdots \sigma$, где $\sigma$—последний шаг итерации. Рассмотрим схему расчета для $i$-го шага приближения к искомым $\psi$, а затем к искомым $U$.

### $i$-ое приближение к искомым $\psi$

а) Уравнения (2) при известных величинах: $P$, $Q$, $q$, $g$, а также $U_k^{(i-1)}$ представляются следующей системой из $2n-2$ уравнений, записанных относительно $\cos\psi_{k,c}^{(i)}$ и $\sin\psi_{k,s}^{(i)}$.

$$\frac{P_1}{U_1^{(i-1)}} - U_1^{(i-1)} g_{11} = \sum_{k=2}^{n} \left(U_k^{(i-1)} g_{1k} \cos\psi_{k,c}^{(i)} + U_k^{(i-1)} b_{1k} \sin\psi_{k,s}^{(i)}\right);$$

$$U_1^{(i-1)} b_{11} - \frac{Q_1}{U_1^{(i-1)}} = \sum_{k=2}^{n} \left(-U_k^{(i-1)} b_{1k} \cos\psi_{k,c}^{(i)} + U_k^{(i-1)} g_{1k} \sin\psi_{k,s}^{(i)}\right);$$

$$-U_1^{(i-1)} g_{a1} = \sum_{k=2}^{n} \left(U_k^{(i-1)} g_{ak} \cos\psi_{k,c}^{(i)} + U_k^{(i-1)} b_{ak} \sin\psi_{k,s}^{(i)}\right) - \frac{P_a}{U_a^{(i-1)}} \cos\psi_{a,c}^{(i)} -$$

$$- \frac{Q_a}{U_a^{(i-1)}} \sin\psi_{a,s}^{(i)};$$

$$U_1^{(i-1)} b_{a1} = \sum_{k=2}^{n} \left(-U_k^{(i-1)} b_{ak} \cos\psi_{k,c}^{(i)} + U_k^{(i-1)} g_{ak} \sin\psi_{k,s}^{(i)}\right) +$$

$$+ \frac{Q_a}{U_a^{(i-1)}} \cos\psi_{a,c}^{(i)} - \frac{P_a}{U_a^{(i-1)}} \sin\psi_{a,s}^{(i)},$$

где $a = 2, 3, \cdots n-1$; $U_1^{(i-1)} = U_1^{(i)} = U_1^{(0)}$; $U_2^{(i-1)} = U_2^{(i)} = U_2^{(0)}$, т. е. величины $U_1^{(0)}$ и $U_2^{(0)}$ являются постоянными для всех шагов последовательных приближений. В результате совместного решения (6) находятся $\cos\psi_{k,c}^{(i)}$ и $\sin\psi_{k,s}^{(i)}$, где $k=2, 3, \cdots n$, $\psi_1=0$, $i$ — индекс шага, $c$, $s$ — дополнительные индексы для различия величин $\psi$, получаемых по значениям $\cos\psi$, с одной стороны, и $\sin\psi$, с другой. Легко показать, что во всех шагах приближения, кроме последнего $\vartheta$-го шага, $\psi_c^{(i)} \neq \psi_s^{(i)}$.

б) Путем совместного решения следующих $2n-2$ уравнений вида (3)

$$-U_1^{(i-1)} g_{d1} = \sum_{k=2}^{n} \left(U_k^{(i)} g_{dk} \cos\psi_{k,cc}^{(i)} - U_k^{(i-1)} b_{dk} \sin\psi_{k,ss}^{(i)}\right) -$$

$$- \frac{P_d}{U_d^{(i-1)}} \cos\psi_{d,cc}^{(i)} - \frac{Q_d}{U_d^{(i-1)}} \sin\psi_{d,ss}^{(i)};$$

$$U_1^{(i-1)} b_{d1} = \sum_{k=2}^{n} \left(-U_k^{(i-1)} b_{dk} \cos\psi_{k,cc}^{(i)} + U_k^{(i-1)} g_{dk} \sin\psi_{k,ss}^{(i)}\right) +$$

$$+ \frac{Q_d}{U_d^{(i-1)}} \cos\psi_{d,cc}^{(i)} - \frac{P_d}{U_d^{(i-1)}} \sin\psi_{d,ss}^{(i)}, \qquad (7)$$

где $d=2, 3, \cdots n$.

Дополнительные индексы $cc$ и $ss$ вводятся для различия значений $\psi_k$, определяемых по $\cos\psi_k$ и $\sin\psi_k$.

в) Полученные в результате решения систем уравнений (6) и (7) значения $\sin\psi$ и $\cos\psi$ усредняются по формулам:

$$\cos\psi^{(i)}_{k,co} = 0{,}5\,(\cos\psi^{(i)}_{k} + \cos\psi^{(i)}_{k,cc});$$

$$\sin\psi^{(i)}_{k,si} = 0{,}5\,(\sin\psi^{(i)}_{k} + \sin\psi^{(i)}_{k,si}),$$

где $k = 2, 3, \cdots n$, $\psi_1 = 0$. Величины $\cos\psi$ и $\sin\psi$, оказавшиеся в результате решения (6) и (7) больше единицы отбрасываются, т. е. не используются в формулах (8), как неимеющие смысла.

г) По полученным парам значений $\cos\psi^{(i)}_{k,co}$ и $\sin\psi^{(i)}_{k,si}$ (с учетом их знаков) находятся $\psi^{(i)}_{k,co}$ и $\psi^{(i)}_{k,si}$. Эти величины принимаются в качестве $i$-го приближения и искомым $\psi_k$. Так как во всех шагах последовательного приближения, кроме последнего, будет иметь место $\psi^{(i)}_{k,co} \neq \psi^{(i)}_{k,si}$, то возникает разветвление расчета искомых $U_k$. Одна ветвь расчета строится на полученных значениях $\psi^{(i)}_{k,co}$, а другая — на значениях $\psi^{(i)}_{k,si}$.

Рассмотрим схему последующих расчетов, базирующихся на величинах $\psi^{(i)}_{k,co}$, схема расчета с использованием $\psi^{(i)}_{k,si}$ аналогична ниже рассматриваемой.

*i-ое приложение к искомым $U$.* В случае $k_n = 0$, т. е. $n = 1, 2, 3$, расчетными для определения $U^{(i)}_k$ являются следующие уравнения, записанные относительно неизвестных $U^{(i)}_1 U^{(i)}_m$:

$$\cos\psi^{(i)}_{m,co} = \sum_{k=1}^{n} U^{(i)}_k U^{(i)}_m\,(\alpha_{mk}\cos\psi^{(i)}_{k,co} + \beta_{mk}\sin\psi^{(i)}_{k,co});$$

$$\sin\psi^{(i)}_{m,co} = \sum_{k=1}^{n} U^{(i)}_k U^{(i)}_m(-\beta_{mk}\cos\psi^{(i)}_{k,co} + \alpha_{mk}\sin\psi^{(i)}_{k,co}). \qquad (9)$$

где $m = 2, 3, \cdots n$, $\psi_1 = 0$. Числовой пример расчета $U_k$ и $\psi_k$ приводимый в этой статье, посвящен случаю $k_n = 0$, $n = 3$. Рассмотрим случай $k_n = 2$.

а) Путем подстановки в ($4_3$) значений $\psi^{(i)}_{k,co}$ получается следующая система уравнений, записанная относительно $U^{(i)}_a$ ($a = 3, 4, 5, 6$):

$$|A^{(i)}_{ra,co}| \cdot |U^{(i)}_a| = \left| A^{(i)}_{r,co} - \sum_{k=2}^{n} U^{(i)}_k A^{(i)}_{rk,co} \right|, \qquad (10)$$

где $r = 1, 2, 3, 4$ — индекс строки; $a = 3, 4, 5, 6$ — индекс столбца:

$$A^{(i)}_{1,co} = \frac{1}{U^{(i)}_1} - \sum_{d=1}^{2} U^{(i)}_d A^{(i)}_{1d,co};$$

$$A^{(i)}_{2,co} = -\sum_{d=1}^{2} U^{(i)}_d A^{(i)}_{2d,co};$$

$$A_{3,co}^{(i)} = \frac{1}{U_2^{(0)}} \cos \psi_{2,co}^{(i)} - \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} A_{2d,co}^{(i)};$$

$$A_{4,co}^{(i)} = \frac{1}{U_2^{(0)}} \sin \psi_{2,co}^{(i)} - \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} A_{2d,co}^{(i)};$$

Принимая обобщенный индекс, можно записать следующие выражения коэффициентов, входящих в уравнения (10).

$$A_{1f,co}^{(i)} = \alpha_{1f} \cos \psi_{f,co}^{(i)} + \beta_{1f} \sin \psi_{f,co}^{(i)};$$

$$A_{2f,co}^{(i)} = -\beta_{1f} \cos \psi_{f,co}^{(i)} + \alpha_{1f} \sin \psi_{f,co}^{(i)};$$

$$A_{3f,co}^{(i)} = \alpha_{2f} \cos \psi_{f,co}^{(i)} + \beta_{2f} \sin \psi_{f,co}^{(i)};$$

$$A_{4f,co}^{(i)} = -\beta_{2f} \cos \psi_{f,co}^{(i)} + \alpha_{2f} \sin \psi_{f,co}^{(i)} \qquad (10_1)$$

где $f = a, d, k$; $a = 3, 4, 5, 6$; $d = 1, 2$; $k = 7, \cdots n$;

$\nu_1 = 0$; $co$ — дополнительный индекс, указывающий на то, что в данной ветви расчета используются значения $\psi_{k,co}^{(i)}$, а не $\psi_{k,si}^{(i)}$, взятые согласно (8); $U_1^{(0)}$; $U_2^{(0)}$ — заданные напряжения.

Решение системы уравнений (10) относительно $U_a^{(i)}$ запишем в следующем виде

$$U_a^{(i)} = \sum_{r=1}^{4} \frac{1}{\Delta} \Delta_{ra} (-1)^{r+a} \left( A_{r,co}^{(i)} - \sum_{k=7}^{n} U_k^{(i)} A_{rk,co}^{(i)} \right), \qquad (11)$$

где $\Delta$ — определитель матрицы, $[A_{ra,co}^{(i)}]$;

$\Delta_{ra}$ — минор указанного определителя, соответствующий элементу $A_{ra,co}^{(i)}$;

$a = 3, 4, 5, 6$.

Выражение (11) может быть представлено и в следующей форме

$$U_a^{(i)} = R_a^{(i)} + \sum_{k=7}^{n} B_{ak,co}^{(i)} U_k^{(i)}. \qquad (11_1)$$

б) Путем подстановки в систему $(4_1)$ выражений $U_a^{(i)}$, взятых согласно $(11_1)$, получаются следующие уравнения, необходимые для расчета $i$-го приближения к искомым напряжениям пар зажимов многополюсника:

$$\lambda_{s,co}^{(i)} = U_k^{(i)} N_{k,co}^{(i)} + \sum_{k=7}^{n} U_k^{(i)} H_{sk,co}^{(i)} + U_k^{(i)} \sum_{k=7}^{n} U_k^{(i)} G_{sk,co}^{(i)} + \sum_{k=7}^{n} \sum_{r=7}^{n} U_r^{(i)} U_r^{(i)} \gamma_{sk,co}^{(i)}, \qquad (12)$$

где

$\lambda_{k,co}^{(l)}=$

при $h = 1, 2, 3, 4$

$$\cos\varphi_{m,co}^{(l)} - \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} R_m^{(l)} A_{md,co}^{(l)} - \sum_{a=3}^{6} R_a^{(l)} R_m^{(l)} A_{ma,co}^{(l)}$$

где $m = 3, 4, 5, 6$;

при $h = 5, 6, 7, 8$

$$\sin\varphi_{m,co}^{(l)} \sum_{d+1}^{2} U_d^{(0)} R_m^{(l)} C_{md,co}^{(l)} - \sum_{a=3}^{6} R_a^{(l)} R_m^{(l)} C_{ma,co}^{(l)}$$

где $m = 3, 4, 5, 6$

при $h = n-1, n, \cdots n+2$ $\cos\varphi_{m,co}^{(l)}$ где $m = 7, \cdots n$;

при $h = n+3, \cdots 2n-4$ $\sin\varphi_{m,co}^{(l)}$ где $m = 7, \cdots n$

$N_{k,co}^{(l)}=$

при $h = 1, 2, \cdots 8$;

при $h = n-1, n, \cdots n+2$ $\sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} A_{md,co}^{(l)} + \sum_{a=3}^{6} R_a^{(l)} A_{ma,co}^{(l)}$,

где $m = 7, \cdots n$;

при $h = n+3 \cdots 2n-4$ $\sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} C_{md,co}^{(l)} + \sum_{a=3}^{6} R_a^{(l)} C_{ma,co}^{(l)}$

где $m = 7, \cdots n$;

$H_{mk,co}^{(l)}=$

при $h = 1, 2, 3, 4$ $R_m^{(l)} A_{mk,co}^{(l)} + \sum_{d=1}^{2} U_d^{(0)} A_{md,co}^{(l)} B_{mk,co}^{(l)} +$

$$+ \sum_{a=3}^{6} (R_a^{(l)} A_{ma,co}^{(l)} B_{mk,co}^{(l)} + R_m^{(l)} A_{ma,co}^{(l)} B_{ak,co}^{(l)}),$$

где $m = 3, 4, 5, 6$;

при $h = 5, 6, 7, 8$ взамен $A$ берутся $C$ с теми же индексами,

при $h = n-1, 2 \cdots 2n-4$;

$G_{mk,co}^{(l)}=$

при $h = 1, 2 \cdots 8$

при $h = n-1, n, \cdots n+2$ $A_{mk,co}^{(l)} + \sum_{a=3}^{6} B_{ak,co}^{(l)} A_{ma,co}^{(l)}$,

где $m = 7, \cdots n$;

при $h = n+3, \cdots 2n-4$, взамен $A$ берутся $C$ с теми же индексами.

$\alpha_{mk,co}^{(l)}=$

при $h = 1, 2, 3, 4$ $A_{mk,co}^{(l)} B_{mk,co}^{(l)} + \sum_{a=3}^{6} A_{ma,co}^{(l)} B_{ak,co}^{(l)} B_{mk,co}^{(l)}$,

где $m = 3, 4, 5$.

при $h = 5, 6, 7, 8$. взамен $A$ берутся $C$ с теми же индексами.

при $h = n-1 \cdots 2n-4$.

Коэффициенты $A$ и $C$, входящие в эти уравнения, выражаются так:

$$A^{(0)}_{mx,\,co} = \alpha_{mx}\cos\psi^{(0)}_{x,\,co} + \beta_{mx}\sin\psi^{(0)}_{x,\,co};$$

$$C^{(0)}_{mx,\,co} = -\beta_{mx}\cos\psi^{(0)}_{x,\,co} + \alpha_{mx}\sin\psi^{(0)}_{x,\,co}, \qquad (12_1)$$

где $x = a,\ d,\ k$

Таким образом, система (12) состоит из $2n-4$ уравнений с неизвестными вида $U_k^{(0)}$ и $U_k^{(0)}\,U_m^{(0)}$,
где $k,\ m = 7, \cdots n$.

В частном случае, при $n=10$, число уравнений (12) равно 16, а число неизвестных вида $U_k^{(0)}$; $U_k\,U_m$ равно 14, а именно: $U_7$; $U_8$; $U_9$; $U_{10}$; $U_7\cdot U_8$; $U_7\cdot U_9$; $U_7\cdot U_{10}$; $U_8\cdot U_9$; $U_8\cdot U_{10}$; $U_9\cdot U_{10}$; $U_7^2$; $U_8^2$; $U_9^2$; $U_{10}^2$.

При $n=7,\ 8,\ 9$ система (12) содержит, соответственно, 10, 12 и 14 уравнений, а число неизвестных равно 2, 5, 9. Таким образом, число располагаемых уравнений оказывается больше числа искомых величин вида $U_k^{(0)}$ и $U_k^{(0)}\,U_m^{(0)}$. Для обеспечения быстроты сходимости предлагается из располагаемого состава уравнений выделить несколько групп (две—для случаев $n=9$, 10; три — для случая $n=8$ и пять — для случая $n=7$) таким образом, чтобы каждое из располагаемых уравнений входило хотя бы в одну из образуемых групп. Это позволяет получить ряд значений для каждого из искомых величин $U_k^{(0)}$, которые, в свою очередь, могут быть использованы для нахождения некоторых средних значений каждого из $U_k$.

Так например, в случае $n=10$, путем решения первых 14 уравнений, из числа 16 располагаемых, системы (12) можно найти по пять значений для каждого из $U_k^{(0)}$, где $k=7,\ 8,\ 9,\ 10$, т. е. $U'_k$; $\pm\sqrt{(U_k^2)'}$; $\dfrac{U'_k\,U'_m}{\sqrt{(U_m^2)'}}$ $(k,\ m = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ k \neq m)$. Путем решения последних 14 уравнений, из числа 16 системы (12), можно найти еще по пять значений для каждого из $U_k^{(0)}$, т. е.

$$U''_k;\quad \pm\sqrt{(U_k^2)''};\quad \frac{U''_k\,U''_m}{\pm\sqrt{(U_m^2)''}}\quad (k,\ m = 7,\ 8,\ 9,\ 10;\ k \neq m)$$

Из полученных 10 значений $U_k$ может быть найдено некоторое среднее значение, например,

$$U^{(0)}_{k,\,co} = \frac{1}{10}\Bigg(U'_k + \sqrt{(U_k^2)'} + \sum_{\substack{k=7\\ k\neq m}}^{10}\frac{U'_k\,U'_m}{\sqrt{(U_m^2)'}} + U''_k + \sqrt{(U_k^2)''} +$$

$$+ \sum_{\substack{k=7\\ k\neq m}}^{10}\frac{U''_k\,U''_m}{\sqrt{(U_m^2)''}}\Bigg). \qquad (13)$$

Найденные $U^{(0)}_{k,\,co}$ рассматриваются в качестве одного из возможных приближений к искомым $U_k$. Очевидно, при определении $U^{(0)}_{k,\,co}$ не обязательно учитывать все слагаемые, входящие в выражение вида (13). Второе из возможных приближений получается по такой же схеме расчета, но в качестве исходной информации используются, как было отмечено выше, не $\vartheta^{(i)}_{k,\omega}$ а величина $\vartheta^{(i)}_{k,м}$.

Таким путем вторая ветвь расчета, основанная на $\vartheta^{(i)}_{k,м}$ приведет к значениям $U^{(i)}_{k,м}$, или $+\sqrt{(U^2_k)_м}$.

Вопрос выбора одного из значений $U^{(i)}_k$, т.е $U^{(i)}_{k,\omega}$ или $U^{(i)}_{k,м}$ в качестве расчетной величины $i$-го приближения к искомым $U_k$, может быть решен по признаку наименьшей алгебраической суммы их отклонения от величины $U^{(i-1)}_k$, т. е. соответствующего расчетного $U_k$ предшествовавшего $i-1$-го приближения например,

$$\vartheta^{(i)}_{k,\omega} = \sum_{k=1}^{n} (U^{(i-1)}_{k,\omega} - U^{(i)}_{k,\omega}, \text{ сли } \vartheta^{(i)}_{k,м} = \sum_{k=1}^{n} (U^{(i-1)}_{k} - U^{(i)}_{k,м}) \qquad (14)$$

Принятая величина $U^{(i)}_k$ используется для расчетов последующего $i+1$-го приближения к искомым $\vartheta_k$, т. е. для расчетов $\vartheta^{(i+1)}_k$.

### Последнее приближение к искомым $U_k$ и $\vartheta_k$

Одним из критериев для принятия решения о прекращении расчета может быть использована величина допустимой суммы абсолютной погрешности в определении модулей напряжения всех пар зажимов многополюсника в двух последовательных шагах приближений, а именно,

$$\delta_u \leqslant \sum_{k=1}^{n} |U^{(s)}_k - U^{(s-1)}_k| , \qquad (15)$$

где $s$ — индекс последнего шага итерации;

$\delta_u$ — заданная погрешность в определении $U_k$;

$k$ — индекс пар зажимов многополюсника.

Проиллюстрируем предлагаемый алгоритм примером числового расчета $U_k$, $\vartheta_k$.

**Пример.** Задана схема замещения системы, показанная на рис. 7,17 широко известной работы П. С. Жданова [1]. Параметры эквивалентного шестиполюсника, определенные по методике [2] с использованием исходных $Y$-параметров указанной схемы замещения, оказались следующими:

| $km$ — | 11 | 12 | 13 | 22 | 23 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_{km}$ — | 1,2290 | 0,5483 | 0,5054 | 1,9810 | 0,9741 | 2,2510 |
| $\psi_{km}$ — | 85°29′ | −78°42′ | −85°56′ | 80°48′ | 82°37′ | 74°35′ |

Заданы также следующие величины активных ($P$) и реактивных ($Q$) мощностей источников э.д.с. подключенных к указанному шестиполюснику:

$$P_1 + jQ_1 = 0{,}4429 + j0{,}3332;$$

$$P_2 + jQ_2 = 0{,}8814 + j0{,}7792;$$

$$P_3 + jQ_3 = 0{,}9365 + j0{,}8449.$$

Требуется определить модули ($U_k$) и аргументы ($\psi_k$) комплексных напряжений, возникающих на зажимах указанного 6-полюсника в установившемся его режиме. Пользуясь изложенной методикой расчета, принимаем $\psi_1 = 0$. В качестве нулевого приближения к искомым $U_k$ примем некоторые $U_k^{(0)}$, отличающиеся от истинных значений $U_k$ в пределах $\pm 10\%$, а именно: $U_1^{(0)} = 1.1$ (против $U_1 = 1{,}24$); $U_2^{(0)} = 1.30$ (против $U_2 = 1.24$) и $U_3^{(0)} = 1{,}20$ (против $U_3 = 1{,}175$).

*а. Первое приближение к искомым* $\psi_k$. Подстановкой принятых величин $U_k^{(0)}$ в уравнения вида (6) получаются следующие уравнения относительно неизвестных $\cos\psi_{k,c}^{(1)}$ и $\sin\psi_{k,s}^{(1)}$.

$$0{,}3257 = 0{,}1607\cos\psi_{2,c}^{(1)} - 0{,}8044\sin\psi_{2,s}^{(1)} + 0{,}0513\cos\psi_{3,c}^{(1)} - 0{,}7209\sin\psi_{3,s}^{(1)}$$

$$1{,}1493 = 0{,}8044\cos\psi_{2,c}^{(1)} - 0{,}1607\sin\psi_{2,s}^{(1)} + 0{,}7209\cos\psi_{3,c}^{(1)} + 0{,}0513\sin\psi_{3,s}^{(1)}$$

$$-0{,}1607 = -0{,}2954\cos\psi_{2,c}^{(1)} + 2{,}8379\sin\psi_{2,s}^{(1)} + 0{,}2214\cos\psi_{3,c}^{(1)} - 1{,}7079\sin\psi_{3,s}^{(1)}$$

$$-0{,}8044 = -2{,}8379\cos\psi_{2,c}^{(1)} - 0{,}2954\sin\psi_{2,s}^{(1)} + 1{,}7079\cos\psi_{3,c}^{(1)} + 0{,}2214\sin\psi_{3,s}^{(1)}$$

Решение этой системы дает: $\cos\psi_{2,c}^{(1)} = 0{,}7567$ $\sin\psi_{2,s}^{(1)} = -0.1052$ $\cos\psi_{3,c}^{(1)} = 0{,}7815$ и $\sin\psi_{3,s}^{(1)} = -0{,}1102$.

Подстановкой $U_k^{(0)}$ в уравнения вида (7) получается система из четырех уравнений, в которой первыми двумя служат последние два уравнения вышеприведенной системы, при условии замены индексов $c$ на $cc$, а $s$ на $ss$, а двумя другими уравнениями — следующие.

$$-0{,}0513 = 0{,}2214\cos\psi_{2,cc}^{(1)} - 1{,}7079\sin\psi_{2,ss}^{(1)} + 0{,}0746\cos\psi_{3,cc}^{(1)} + 2{,}8224\sin\psi_{3,ss}^{(1)}$$

$$-0{,}7209 = 1{,}7079\cos\psi_{2,cc}^{(1)} + 0{,}2214\sin\psi_{2,ss}^{(1)} - 2{,}8224\cos\psi_{3,cc}^{(1)} + 0{,}0746\sin\psi_{3,ss}^{(1)}.$$

Решение полученной системы вида (7) дает:

$$\cos\psi_{2,cc}^{(1)} = 0{,}6750\ \sin\psi_{2,ss}^{(1)} = -0{,}1416;\ \cos\psi_{3,cc}^{(1)} = 6480;\ \sin\psi_{3,ss}^{(1)} = -0{,}1739.$$

Далее пользуясь выражением (8) путем усреднения полученных выше величин $\cos\psi$ и $\sin\psi$ находим:

$$\cos\psi_{2,co} = 0{,}7158\ \sin\psi_{2,si} = -0{,}1234\ \cos\psi_{3,co} = 0{,}7147\ \sin\psi_{3,si} = -0{,}1420.$$

По этим значениям находятся величины углов синусной ветви $\psi_{2,si}^{(1)} = -7°05'$, $\psi_{3,si}^{(1)} = -8°10'$ и косинусной ветви $\psi_{2,co}^{(1)} = -44°17'$, $\psi_{3,co}^{(1)} = -44°23'$ для первого шага приближения.

Ниже приводится ветвь расчета, соответствующая величинам $\psi_{k,si}^{(1)}$.

*б. Первое приближение к искомым* $U_k$. Путем подстановки $\psi_{k,si}^{(1)}$ в уравнения вида (9) получается следующая система, решение которой дает первые приближения $U_k^{(1)}$, $U_m^{(1)}$, где $k, m = 1, 2, 3$.

$$1{,}4684\, U_1^{(1)} U_1^{(1)} - 0{,}3151\, U_1^{(1)} U_2^{(1)} - 0{,}3814\, U_1^{(1)} U_3^{(1)} = 1$$

$$-1{,}6615\, U_1^{(1)} U_1^{(1)} + 0{,}9378\, U_1^{(1)} U_2^{(1)} + 0{,}8283\, U_1^{(1)} U_3^{(1)} = 0$$

$$-0{,}2343\, U_1^{(1)} U_2^{(1)} + 1{,}1611\, U_2^{(1)} U_2^{(1)} - 0{,}3620\, U_2^{(1)} U_3^{(1)} = 0{,}9923$$

$$0{,}4029\, U_1^{(1)} U_2^{(1)} - 1{,}2196\, U_1^{(1)} U_2^{(1)} - 0{,}7447\, U_2^{(1)} U_3^{(1)} = -0{,}1234$$

$$-0{,}2466\, U_1^{(1)} U_3^{(1)} - 0{,}3575\, U_2^{(1)} U_3^{(1)} + 1{,}3532\, U_3^{(1)} U_3^{(1)} = 0{,}9899$$

$$0{,}3158\, U_1^{(1)} U_3^{(1)} + 0{,}9841\, U_2^{(1)} U_3^{(1)} - 1{,}1637\, U_3^{(1)} U_3^{(1)} = -0{,}1420$$

Решением этой системы служат:

$$U_1^{(1)} U_1^{(1)} = 1{,}1381 \quad U_2^{(1)} U_2^{(1)} = 1{,}7562 \quad U_3^{(1)} U_3^{(1)} = 1{,}2663$$

$$U_1^{(1)} U_2^{(1)} = 1{,}7093 \quad U_1^{(1)} U_3^{(1)} = 0{,}3475 \quad U_2^{(1)} U_3^{(1)} = 1{,}7853.$$

В качестве расчетных принимаются величины $+\sqrt{U_k^{(1)} U_k^{(1)}}$, как наиболее близкие к $U_k^{(0)}$, т. е.

$$U_1^{(1)} = 1{,}0668; \quad U_2^{(1)} = 1{,}3252 \quad U_3^{(1)} = 1{,}1253.$$

*в. Последующие приближения к искомым* $U_k$ *и* $\psi_k$ получаются аналогичным способом. Ниже в табличной форме приводятся результаты полученных приближений $U_k^{(l)}$ и $\psi_k^{(l)}$.

| $l =$ | 0 | 1 | 3 | 10 | 20 | $s = 27$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_{2,l}^{(l)} =$ | — | −7°05′ | −3°48′ | −1°53′ | −1°35′ | −1°30′ |
| $\psi_{3,l}^{(l)} =$ | — | −8°10′ | −5°21′ | −4°11′ | −4°14′ | −4°17′ |
| $U_1^{(l)} =$ | 1,10 | 1,0668 | 1,1656 | 1,2292 | 1,2383 | 1,2404 |
| $U_2^{(l)} =$ | 1,36 | 1,3252 | 1,2828 | 1,2512 | 1,2426 | 1,2403 |
| $U_3^{(l)} =$ | 1,30 | 1,1253 | 1,1477 | 1,1640 | 1,1719 | 1,1747 |

В $s$-ом столбце приводятся истинные значения $U_k$ и $\psi_k$, удовлетворяющие уравнениям (1).

Изложенная выше методика расчета комплексных напряжений пар зажимов многополюсника обладает тем недостатком, что процесс последовательных приближений к истинным значениям оказывается относительно медленным. В следующем сообщении автора будет изложен способ ускорения этого процесса. Применение последнего позволило, например получить решения рассмотренной выше задачи при $s = 11$.

АрмНИИЭ

Поступило 10.IX 1964

Հ. Տ. ԱԴՈՆՑ

## ԲԱԶՄԱԲԵՎԵՌԱՆԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

### Բազմաբևեռանի զույգ բևեռների կոմպլեքս լարումների հաշվումը, ըստ նրան միացված էներգիայի աղբյուրի արված ակտիվ և ռեակտիվ հզորությունների


Ամփոփում

*Տրված են բազմաբևեռանի պարամետրերը ($Y_{km}$, $\Phi_{km}$), նրա սեղմակներին միացված աղբյուրների ակտիվ ($P_m$) և ռեակտիվ ($Q_m$) հզորությունները: Պահանջվում է որոշել բազմաբևեռանի սեղմակների կոմպլեքս լարումների մոդուլներն ($U$) ու արգումենտները ($\Psi$)։ Թվարկած մեծությունների միջև եղած կապն արտահայտող հավասարումներն ունեն (1) տեսքը:*

*Առաջարկվող հաշվման մեթոդը հանդիսանում է իտերատիվ և հիմնված է հավասարումների մի սիստեմի լուծումների հաջորդական օգտագործման վրա, որպես նախնական տվյալներ հավասարումների երկրորդ սիստեմի լուծման համար, և հակառակը:*

*Հոդվածում բերված է թվային հաշվման օրինակ. մեկ վեցբևեռանի համար:*


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Жданов П. С.* Устойчивость электрических систем. Госэнергоиздат, 1948.
2. *Адонц Г. Т.* К теории и методам расчета многополюсника. „Известия АН Армянской ССР“, серия ТН, № 5, 1964.