

267

ба, когда на границе полуплоскости под жестким экраном компоненты вертикальных и горизонтальных скоростей равны нулю, а на отверстие – отрезка заданы компоненты нормальных и касательных напряжений. Решение этой линейной граничной задачи для полуплоскости методом интегрального преобразования Фурье сначала сведено к решению по отдельности двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ), а затем – к решению по отдельности двух гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ). Методом обращения СИУ и методом ортогональных многочленов Чебышева построены замкнутые (точные) решения определяющих ГСИУ. Получены явные выражения напряжений под жестким экраном. Рассмотрен частный случай.

Результаты исследования обсуждаемой задачи могут быть использованы в оценках мощности и других характеристик нефтяных скважин и смежных отраслях.

Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть нижнее полупространство $y < 0$, отнесенное к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, наполнено несжимаемой вязкой жидкостью, обладает плотностью $\rho = \text{const}$ и динамическим коэффициентом вязкости μ . Пусть далее жидкость находится в режиме стационарного течения и на своей границе $y = 0$ контактирует с абсолютно жестким тонким экраном в виде двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных тонких пластин $\omega_+ = \{y = 0; a \leq x \leq \infty; -\infty < z < \infty\}$ и $\omega_- = \{y = 0; -\infty < x \leq -a; -\infty < z < \infty\}$, образующих между собой отверстие в форме бесконечной в обоих направлениях полосы $\omega = \{y = 0; -a \leq x \leq a; -\infty < z < \infty\}$ на границе полупространства. Компоненты скоростей в жидкости по координатным осям Ox, Oy, Oz обозначим через u, v, w , давление – через p , а массовые силы по осям – через X, Y, Z . Будем считать, что картина распределения этих величин одинакова во всех плоскостях, ортогональных и оси Oz , т.е. они не зависят от координаты z и $w = 0$:

$$u = u(x, y); v = v(x, y); w = 0; p = p(x, y); X = X(x, y); Y = Y(x, y); Z = Z(x, y).$$

Кроме того будем считать, что массовые силы отсутствуют, а скорости настолько малы, что силами инерции по отношению к силам трения можно пренебречь. Тогда, приняв во внимание стационарность течения вязкой жидкости, в конституционных нелинейных дифференциальных уравнениях Навье – Стокса можно пренебречь членами, зависящими от временной координаты t , а также нелинейными конвективными членами [4, 5]. В результате в базовой плоскости Oxy линеаризованная система дифференциальных уравнений в частных производных Навье – Стокса примет вид

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right. \quad (y < 0; -\infty < x < \infty); \quad (1)$$

уравнение неразрывности – вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (y < 0; -v < x < \infty), \quad (2)$$

а закон Стокса – вид

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (3)$$

где σ_y и τ_{yx} – соответственно, компоненты нормальных и касательных напряжений.

В связи со сделанными предположениями или принятыми гипотезами отметим, что так как силы инерции пропорциональны квадрату скорости, а силы трения пропорциональны первой степени скорости, то очевидно, что движения с преобладающей ролью сил трения возникают при очень малых скоростях или, в более общем случае, при очень малых числах Рейнольдса. Такие движения вязкой жидкости, при которых число Рейнольдса весьма мало ($Re < 1$), называются ползучими движениями [4].

Для уравнения (1) – (3) в полуплоскости $y \leq 0$ рассмотрим следующую смешанную граничную задачу типа задачи Ламба:

$$u(x, y)|_{y=0} = v(x, y)|_{y=0} = 0 (|x| > a); \quad \sigma_y|_{y=0} = f(x); \quad \tau_{yx}|_{y=0} = g(x) (|x| < a); \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – предварительно заданные функции.

Приступив к решению граничной задачи (1) – (4), отметим, что давление $p(x, y)$ в полуплоскости $y < 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа [4]:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < \infty; -\infty < y < 0). \quad (5)$$

Решение указанной граничной задачи построим методом интегрального преобразования Фурье. С этой целью введем обозначения

$$\Sigma(x) = \sigma_y|_{y=0} = \begin{cases} f(x) (|x| < a); \\ \sigma(x) (|x| > a); \end{cases} \quad T(x) = \tau_{yx}|_{y=0} = \begin{cases} g(x) (|x| < a); \\ \tau(x) (|x| > a) \end{cases}$$

и трансформанты Фурье

$$\{\bar{u}(\lambda, y); \bar{v}(\lambda, y); \bar{p}(\lambda); \bar{\Sigma}(\lambda); \bar{T}(\lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x, y); v(x, y); p(x); \Sigma(x); T(x)\} e^{i\lambda x} dx.$$

Сначала рассмотрим вспомогательную граничную задачу для уравнений (1), (2) и (5) при граничных условиях

$$\sigma_y|_{y=0} = \Sigma(x); \quad \tau_{yx}|_{y=0} = T(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (6)$$

Приняв во внимание закон Стокса (3), к этим уравнениям и условиям применим интегральное преобразование Фурье. В результате в трансформантах Фурье для обыкновенных дифференциальных уравнений придем к следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \lambda^2 \bar{u} \right) = -i\lambda \bar{p}, \quad \mu \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \lambda^2 \bar{v} \right) = \frac{d\bar{p}}{dy} \quad (y < 0); \\ \frac{d\bar{v}}{dy} - i\lambda \bar{u} = 0 \quad (y < 0); \quad \frac{d^2 \bar{p}}{dy^2} - \lambda^2 \bar{p} = 0 \quad (y < 0); \\ \left(-\bar{p} + 2\mu \frac{d\bar{v}}{dy} \right) \Big|_{y=0} = \bar{\Sigma}(\lambda); \quad \mu \left(\frac{d\bar{u}}{dy} - i\lambda \bar{v} \right) \Big|_{y=0} = \bar{T}(\lambda). \end{cases} \quad (7)$$

Исчезающее на бесконечности решение четвертого уравнения из (7) имеет вид

$$\bar{p}(\lambda, y) = Ae^{|\lambda|y} \quad (y \leq 0).$$

Это решение подставим в правые части первых двух уравнений системы (7):

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \lambda^2 \bar{u} = -\frac{i\lambda A}{\mu} e^{|\lambda|y}; \quad \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \lambda^2 \bar{v} = -\frac{|\lambda|A}{\mu} e^{|\lambda|y} \quad (y < 0).$$

Общие решения этих дифференциальных уравнений представляются формулами

$$\bar{u}(\lambda, y) = Ce^{|\lambda|y} - \frac{iA}{2\mu} \text{sign} \lambda y e^{|\lambda|y}; \quad \bar{v}(\lambda, y) = De^{|\lambda|y} + \frac{A}{2\mu} y e^{|\lambda|y} \quad (y \leq 0), \quad (8)$$

где A, C и D – пока неизвестные постоянные. Выражения (8) подставим в третье уравнение системы (7). В результате получим следующее соотношение между этими постоянными: $A = 2\lambda\mu(iC - D \text{sign} \lambda)$.

Далее выражение постоянной A подставим в (8):

$$\bar{u}(\lambda, y) = [C - i\lambda(iC - D)y]e^{|\lambda|y}; \quad \bar{v}(\lambda, y) = [D + |\lambda|(iC - D)y]e^{|\lambda|y} \quad (y \leq 0). \quad (9)$$

Постоянные C и D определяются из граничных условий – из последних двух уравнений системы (7):

$$D = \frac{\bar{\Sigma}(\lambda)}{2|\lambda|\mu}; \quad C = \frac{\bar{T}(\lambda)}{2|\lambda|\mu}.$$

Из (9) находим

$$\bar{v}(\lambda, -0) = D = \frac{\bar{\Sigma}(\lambda)}{2|\lambda|\mu}; \quad \bar{u}(\lambda, -0) = \frac{\bar{T}(\lambda)}{2|\lambda|\mu}. \quad (10)$$

Первое уравнение из (10) запишем в виде

$$-2\mu i \lambda \bar{v}(\lambda, -0) = -i \bar{\Sigma}(\lambda) \text{sign} \lambda \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

и применим к нему обратное преобразование Фурье. После элементарных преобразований получим

$$v'(x) = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma(s) ds}{s - x} \quad (-\infty < x < \infty),$$

где интеграл при $s = x$ понимается в смысле главного значения по Коши. Отсюда по формуле обращения Гильберта получим следующее ключевое уравнение:

$$\Sigma(x) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)ds}{s-x} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (11)$$

Здесь принято во внимание, что согласно (4) $v(x, y)|_{y=0} = v(x, -0) \equiv 0$ при $|x| > a$.

Вполне аналогичным образом из второго уравнения (10) получим второе ключевое уравнение поставленной задачи

$$T(x) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)ds}{s-x} \quad (-\infty < x < \infty); \quad u'(x) = \frac{du(x, -0)}{dx}. \quad (12)$$

Рассматривая ключевое уравнение (11) на интервале $(-a, a)$, относительно $v'(x)$ получим определяющее СИУ поставленной задачи:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)ds}{s-x} = -\frac{f(x)}{2\mu} \quad (-a < x < a); \quad (13)$$

притом по свойству непрерывности скоростей $v(\pm a) = 0$.

Рассматривая же ключевое уравнение (11) на лучах $|x| > a$, находим нормальные напряжения под жестким экраном

$$\sigma_y|_{y=0} = \sigma(x) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v'(s)ds}{s-x} \quad (|x| > a). \quad (14)$$

Здесь, конечно, считается что $v'(x)$ уже найдено из решения СИУ (13).

Вполне аналогичным образом исходя из второго ключевого уравнения (12) придём ко второму определяющему СИУ задачи:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)ds}{s-x} = -\frac{g(x)}{2\mu}; \quad u(\pm a) = 0 \quad (-a < x < a), \quad (15)$$

после решения которого касательные напряжения под плоским экраном определим по формуле

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \tau(x) = -\frac{2\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{u'(s)ds}{s-x} \quad (|x| > a). \quad (16)$$

В определяющем СИУ (13) произведем интегрирование по частям и примем во внимание условия $v(\pm a) = 0$. Получим следующее ГСИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{v(s)ds}{(s-x)^2} = -\frac{f(x)}{2\mu} \quad (-a < x < a), \quad (17)$$

где интеграл при $S = x$ понимается в смысле Адамара:

$$Hv = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{v(s)ds}{(s-x)^2} + \int_{x+\varepsilon}^a \frac{v(s)ds}{(s-x)^2} - \frac{v(x+\varepsilon) + v(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \right].$$

Обращаем СИУ (13):

$$v'(x) = \frac{1}{2\pi\mu\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-s^2} f(s)ds}{s-x} + \frac{C}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (C = \text{const}, -a < x < a), \quad (18)$$

а затем проинтегрируем обе части этого равенства. Воспользовавшись выражением интеграла из [6], получим

$$v(x) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{-a}^a \ln \frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}} f(s)ds + \\ + C \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 (-a \leq x \leq a). \quad (19)$$

Вследствие условий $v(\pm a) = 0$ отсюда сразу следует, что $C = C_1 = 0$.

Следовательно, (18) примет вид

$$v'(x) = \frac{1}{2\pi\mu\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-s^2} f(s)ds}{s-x} \quad (-a < x < a). \quad (20)$$

(20) подставим в (14) и произведем преобразования:

$$\sigma(x) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2} f(t)dt}{t-s} = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2-t^2} f(t)dt \int_{-a}^a \frac{ds}{(s-x)(t-s)\sqrt{a^2-s^2}} = \\ = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-t^2} f(t)dt}{t-x} \int_{-a}^a \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{t-s} \right) \frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}} \quad (|x| > a).$$

Отсюда, приняв во внимание известный интеграл из [7] (с.175, ф-ла (21)), находим

$$\sigma(x) = \frac{\text{sign}x}{\pi\sqrt{x^2-a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-s^2} f(s)ds}{s-x} \quad (|x| > a). \quad (21)$$

Изложенным способом из (15) и (16) получаются соответствующие (19) – (21) формулы для $u(x)$, $u'(x)$ и $\tau(x)$. Очевидно, что эти формулы сразу получаются также из (19) – (20), если в них формально заменить, соответственно, $v(x)$ на $u(x)$, $v'(x)$ на $u'(x)$, $\sigma(x)$ на $\tau(x)$, а $f(x)$ на $g(x)$.

Введем также в рассмотрение расход жидкости через сечения отверстия жесткого экрана за единицу времени в вертикальном направлении

$$Q(x) = \int_{-a}^a v(s)ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (22)$$

В полученных основных уравнениях введем безразмерные координаты и величины

$$\begin{aligned}\xi &= x/a, \eta = s/a, v_0(\xi) = v(a\xi)/V; f_0(\xi) = f(a\xi)/2\rho V^2; \\ \sigma_0(\xi) &= \sigma(a\xi)/2\rho V^2; \tau_0(\xi) = \tau(a\xi)/2\rho V^2; Q_0(\xi) = Q(a\xi)/aV \\ \text{Re} &= aV/\nu; \nu = \mu/\rho; u_0(\xi) = u(a\xi)/\nu; g_0(\xi) = g(a\xi)/2\rho V^2.\end{aligned}$$

где V – эталонная скорость, например, скорость жидкости в центре отверстия жесткого экрана, т.е. в начале координат 0, Re – число Рейнольдса, ρV^2 – динамическое давление, а V – кинетический коэффициент вязкости. В результате ГСИУ (17) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi)^2} = -\text{Re} \cdot f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1; v_0(\pm 1) = 0); \quad (23)$$

формула (19), где $C = C_1 = 0$, – вид

$$v_0(\xi) = \frac{\text{Re}}{2\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1 - \xi\eta + \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)}}{1 - \xi\eta - \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)}} f_0(\eta) d\eta; \quad (24)$$

формула (21) – вид

$$\sigma_0(\xi) = \frac{\text{Re} \cdot \text{sign} \xi}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} f_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \quad (|\xi| > 1). \quad (25)$$

Отсюда, как выше, формальной заменой $f_0(\xi)$ на $g_0(\xi)$, $v_0(\xi)$ на $u_0(\xi)$, $\sigma_0(\xi)$ на $\tau_0(\xi)$ получаются соответствующие уравнения для $u_0(\xi)$ и $\tau_0(\xi)$.

Во введенных безразмерных величинах формула (22) преобразуется к виду

$$Q_0(\xi) = \int_{-1}^{\xi} v_0(\eta) d\eta \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (26)$$

Решение определяющего ГСИУ (23) и определение через него характеристики задачи. Решение этого ГСИУ методом обращения СИУ (13) относительно $v'(x)$ в безразмерных величинах представлено формулой (24). Однако для вычисления характеристик обсуждаемой задачи удобнее построить решение ГСИУ (23) методом ортогональных многочленов Чебышева. С этой целью решение ГСИУ представим в форме бесконечного ряда

$$v_0(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} X_n U_{n-1}(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

с неизвестными коэффициентами, где $U_{n-1}(\xi)$ – многочлены Чебышева второго рода. Далее этот ряд подставим в ГСИУ (23), поменяем порядок суммирования и интегрирования, а затем воспользуемся известным соотношением [8, 9]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta}{\eta-\xi} = -n U_{n-1}(\xi) \quad (-1 < \xi < 1; \quad n=1, 2, \dots).$$

Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n X_n U_{n-1}(\xi) = \operatorname{Re} \cdot f_0(\xi) \quad (-1 < \xi < 1).$$

Отсюда из условий ортогональности многочленов $U_{n-1}(\xi)$ находим

$$X_n = \frac{f_n}{n} \operatorname{Re}; \quad f_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f_0(\xi) U_{n-1}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi \quad (n=1, 2, \dots). \quad (27)$$

Следовательно,

$$v_0(\xi) = \operatorname{Re} \cdot \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} U_{n-1}(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (28)$$

Теперь на основании (28) по формуле (26) вычислим безразмерный расход вязкой жидкости через сечения отверстия в жестком экране $Q_0(\xi)$.

После элементарных операций будем иметь

$$Q_0(\xi) = \operatorname{Re} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n} I_n(\xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (29)$$

$$I_n(\xi) = \int_{-1}^{\xi} U_{n-1}(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \arccos \xi) & (n=1); \\ \frac{1}{2} \left[\frac{U_n(\xi)}{n+1} - \frac{U_{n-2}(\xi)}{n-1} \right] & (n=2, 3, \dots) \end{cases}.$$

Пусть, в частности, $f(x) = f_0 = \text{const}$. Тогда $f_0(\xi) = f_0/2\rho V^2 = q_0 = \text{const}$ и, следовательно, из (27) $X_1 = \operatorname{Re} \cdot f_0 = \operatorname{Re} \cdot q_0$, $f_n = 0$ ($n=2, 3, \dots$), а из (28)

$$v_0(\xi) = \operatorname{Re} \cdot q_0 \sqrt{1-\xi^2} \quad (-1 \leq \xi \leq 1).$$

В итоге из (29) в данном частном случае

$$Q_0(\xi) = \frac{q_0}{2} \operatorname{Re} \cdot (\pi - \arccos \xi) \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (30)$$

Перейдем к вычислению $\sigma_0(\xi)$ по формуле (25). Сначала эту формулу преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_0(\xi) &= \frac{\operatorname{Re} \cdot \operatorname{sign} \xi}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} f_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} \quad (|\xi| > 1) = \frac{\operatorname{Re} \cdot \operatorname{sign} \xi}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \int_{-1}^1 \frac{(1-\eta^2) f_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1-\eta^2}} = \\ &= \frac{\operatorname{Re} \cdot \operatorname{sign} \xi}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1-\eta^2}} - \int_{-1}^1 \frac{(\eta^2 - \xi^2) f_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1-\eta^2}} - \xi^2 \int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1-\eta^2}} \right]. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma_0(\xi) = -\frac{\text{Re} \cdot \text{sign} \xi}{\pi \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[(\xi^2 - 1) \int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1 - \eta^2}} + \int_{-1}^1 \frac{\eta f_0(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} + \xi \int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right] \quad (|\xi| > 1). \quad (31)$$

Далее воспользуемся интегральными соотношениями [10]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{|\xi - \eta|} \frac{T_n(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \begin{cases} \frac{1}{n} [H(\xi) + (-1)^n H(-\xi)] (|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1})^n & (n=1, 2, \dots) \quad (|\xi| > 1); \\ \ln(2(|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1})) & (n=0), \end{cases}$$

где $T_n(\xi)$ – многочлены Чебышева первого рода, а $H(\xi)$ – функция Хевисайда. Продифференцировав обе части этих соотношений по ξ , после элементарных преобразований придем к следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) d\eta}{(\eta - \xi) \sqrt{1 - \eta^2}} = \begin{cases} -\frac{\text{sign} \xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} [H(\xi) + (-1)^n H(-\xi)] (|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1})^n, & (n=1, 2, \dots) \quad (|\xi| > 1); \\ 1 & (n=0). \end{cases} \quad (32)$$

Функцию $f_0(\xi)$ разложим в ряд по многочленам Чебышева $T_n(\xi)$:

$$f_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\xi); \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_0(\eta) T_n(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad (n=1, 2, \dots); \quad (-1 < \xi < 1). \quad (33)$$

Далее ряд (33) представим в (31) и примем во внимание соотношения (32). После элементарных преобразований окончательно получим

$$\sigma_0(\xi) = -\text{Re} \cdot \left\{ a_0 \frac{|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{a_1}{2} \frac{\text{sign} \xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n [H(\xi) + (-1)^n H(-\xi)] (|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1})^n \right\} \quad (|\xi| > 1).$$

Отсюда в указанном частном случае имеем

$$\sigma_0(\xi) = -\frac{q_0 \text{Re}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} (|\xi| - \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (|\xi| > 1). \quad (34)$$

В табл. 1 по формуле (30) приведены значения безразмерного расхода жидкости $Q_0(\xi)$, а на рис. 1 по формуле (34) построены графики изменения безразмерных нормальных напряжений $-\sigma_0(\xi)$ с обратным знаком под жестким экраном при различных числах Рейнольдса. В обоих случаях принято $q_0 = 1$.

Таблица 1

Значения $Q_0(\xi)$

ξ Re	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0.3	0	0.0967	0.1391	0.1739	0.2054	0.2356	0.2658	0.2973	0.3321	0.3747	0.4712
0.5	0	0.1609	0.2318	0.2898	0.3423	0.3927	0.443	0.4956	0.5536	0.6245	0.7854
0.8	0.	0.2574	0.3709	0.4637	0.5478	0.6283	0.7089	0.7929	0.8857	0.9992	1.2566

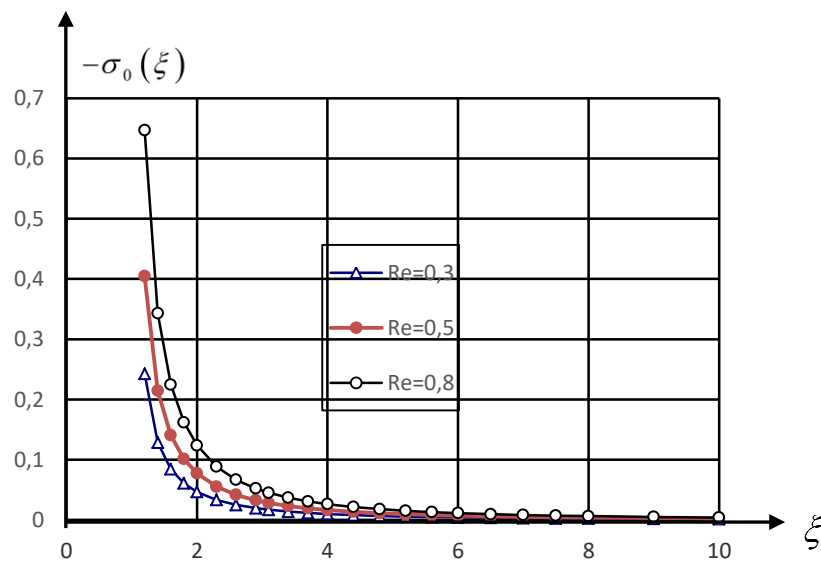


Рис. 1.

Заключение. Из изложенных результатов вытекает, что в рассмотренной граничной задаче типа Ламба при малых числах Рейнольдса, когда происходит ползучее движение вязкой несжимаемой жидкости, горизонтальные и вертикальные компоненты скоростей, а также нормальные и касательные напряжения не взаимодействуют между собой. Потому для их определения порознь получаются два уравнения.

Институт механики НАН РА

Национальный университет архитектуры и строительства Армении

e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

Член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян

**О решении плоской задачи типа Ламба для полуплоскости,
заполненной несжимаемой вязкой жидкостью**

Рассматривается плоская задача типа задачи Ламба о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в полуплоскости, на своей границе контактирующей с жестким экраном в форме двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных пластин-стержней, которые образуют между собой отверстие в форме отрезка конечной длины. Предполагается, что скорости в жидкости настолько малы, что силами инерции можно пренебречь по отношению к силам трения, что имеет место при малых числах Рейнольдса. Такой подход позволяет линеаризовать систему линейных дифференциальных уравнений Навье – Стокса. При помощи интегрального преобразования Фурье смешанная граничная задача для этих линеаризованных уравнений сведена по отдельности к сингулярным интегральным уравнениям или гиперсингулярным интегральным уравнениям. Построены их замкнутые (точные) решения. Характеристики рассматриваемой задачи представлены явными формулами, обсужден частный случай.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան

**Անսեղմելի մածուցիկ հեղուկով լցված կիսահարթության համար
Լամբի տիպի խնդրի լուծման մասին**

Դիտարկվում է անսեղմելի մածուցիկ հեղուկով լցված և իր եզրագծով բացարձակ կոշտ էկրանին հպվող կիսահարթության համար Լամբի տիպի եզրային խնդիր: Էկրանն ունի միմյանց նկատմամբ տեղաշարժված երկու բացարձակ կոշտ սալ-ձողերի տեսք, որոնք կազմում են վերջավոր երկարության միջակայք, իսկ հեղուկի շարժումը ստացվում է: Ենթադրվում է, որ հեղուկի արագություններն այնքան փոքր են, որ շփման ուժերն իներցիայի ուժերի նկատմամբ գերակշռող են, և հետևաբար՝ վերջինները կարելի է արհամարհել առաջինների նկատմամբ: Այս դեպքում Ռեյնոլդսի թիվը բավականաչափ փոքր է, որը Նավյե – Ստոքսի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը գծայնացնելու հնարավորություն է տալիս: Գծայնացված հավասարումների համար Լամբի տիպի խնդրի եզրային խնդրի լուծումը Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման, իսկ այնուհետև՝ հիպերսինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման, որոնք թույլատրում են փակ լուծումներ: Խնդրի բնութագրիչներն արտահայտվում են բացահայտ տեսքի բանաձևերով, դիտարկված է մասնավոր դեպք:

Corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan

**On Solving a Plane Lamb-Type Problem for a Half-Plane Filled
with an Incompressible Viscous Fluid**

We consider a plane Lamb-type problem on the stationary flow of a viscous incompressible fluid in a half-plane that at its boundary is in contact with a rigid screen in the form of two semi-infinite plate-rods shifted relative to each other, which form between themselves a hole in the form of a segment of finite length. It is assumed that

the velocities in the fluid are so small that the inertial forces can be neglected concerning the friction forces; this occurs at large dynamic or kinematic coefficients of fluid viscosity, i. e. at low Reynolds numbers. This approach allows one to linearize the system of linear differential Navier – Stokes equations. Using the integral Fourier transform, the mixed boundary value problem for these linearized equations is reduced to SIEs or HIEs. The closed (exact) solutions of these SIEs and HIEs are constructed. The characteristics of the problem under consideration are presented by explicit formulas; a particular case is discussed.

Литература

s

1. Ламб Г. Гидродинамика. М. Гостехиздат. 1947. М. – Л. 928 с.
2. Снеддон И. Преобразование Фурье. М. ИЛ. 1955. 668 с.
3. Вардамян Е. В., Мхитарян С. М., Саруханян А. А. – Доклады НАН РА. 2020. Т. 120. № 4. С. 277–287.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. Наука. 1969. 744 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. Наука. 1987. 840 с.
6. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. и др. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. М. Наука. 1970. 328 с.
8. Youn-Sha Chan, Albert C. Fannjiang, Glausio H. Paulino – International J. of Engineering and Applied Science. 2003. V. 41. P. 683-720.
9. Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetzyan E. G. – The Quarterly J. of Mech. And Appl. Math. V. 73. Issue 1. 2020. P. 51-75.
10. Мхитарян С. М. – Доклады НАН РА. Т. 93. № 5. 1992. С. 220-226.