

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Г. С. Григорян¹, А. Г. Камалян², Г. А. Киракосян³

Операторы $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа с кусочно-непрерывным матричным символом в лебеговых пространствах со степенным весом

(Представлено академиком А. Б. Нерсисяном 4/X 2021)

Ключевые слова: безотражательный потенциал, оператор $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа, матричный символ, оператор Фредгольма.

1. Введение. Понятия операторов $\mathcal{L}$ -свертки и $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа введены в [1]. В основе определения этих операторов лежит понятие спектрального преобразования оператора $\mathcal{L}$, самосопряженного в $L_2(\mathbb{R})$ и порожденного дифференциальным выражением

$$(\ell y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)v(x)dx < \infty. \quad (1.2)$$

Операторы $\mathcal{L}$ -свертки и $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа в случае нулевого потенциала совпадают с классическими оператором свертки и оператором Винера – Хопфа. Для потенциалов $v \neq 0$ наиболее простую структуру операторы $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа имеют, когда v является безотражательным потенциалом, т.е. имеет представление

$$v(x) = -2 \frac{d^2 x}{dx^2} (\ln \Delta(x)), \quad (1.3)$$

где

$$\Delta(x) = \det \left[\delta_{ij} + \frac{m_i \exp(-(\lambda_i + \lambda_j)x)}{\lambda_i + \lambda_j} \right]_{i,j=1,\dots,N}, \quad (1.4)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, λ_k, m_k ($k = 1, \dots, N$) – положительные числа, причем $\lambda_k \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В [2-5] изучены свойства фредгольмовости, полужредгольмовости и обратимости операторов $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа в случае безотражательного потенциала. Оператор $A: X \rightarrow Y$, где X, Y – банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут (т.е. $\text{Im } A = \overline{\text{Im } A}$) и конечномерны его ядро $\ker A := \{x \in X; Ax = 0\}$ и коядро $\text{Coker } A := Y/\text{Im } A$. Число $\text{Ind } A := \dim \ker A - \dim \text{Coker } A$ называется индексом оператора A .

Ниже для линейного пространства (алгебры) X через X^n ($X^{n \times n}$) обозначается множество всех вектор-столбцов порядка n (матриц порядка $n \times n$) с элементами из X . Для линейного оператора $A: X \rightarrow Y$ (X, Y – линейные пространства) оператор $\text{diag}(A, \dots, A): X^n \rightarrow Y^n$ также будем обозначать через A . Через $m(a)$ будем обозначать действующий в функциональных пространствах оператор умножения на функцию (матриц-функцию) $a: m(a)y = ay$. Пусть $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ соответственно одноточечная и двухточечная компактификации $\mathbb{R}$. Через $PC := PC(\bar{\mathbb{R}})$ будем обозначать алгебру кусочно-непрерывных функций на $\bar{\mathbb{R}}$, т.е. функций a , для которых в каждой точке $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ существуют пределы $a(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} a(x)$, $a(x_0 + 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} a(x)$, причем $a(\infty - 0) := a(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)$, $a(\infty + 0) := a(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x)$.

Пусть ρ – степенной вес, т.е. вес вида

$$\rho(x) = |x + i|^{\mu_\infty} |x|^{\mu_0} \prod_{j=1}^m |\alpha - \beta_j|^{\mu_j},$$

где $\mu_\infty, \mu_0, \mu_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, а $L_p(E, \rho)$, $1 < p < \infty$, – лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{p, \rho} := \left(\int_E |f(x)|^p \rho^p(x) dx \right)^{1/p},$$

где E либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{R}_\pm = \{\pm x > 0; x \in \mathbb{R}\}$. Далее предполагается, что

$$\mu, \mu_0, \dots, \mu_m \in \left(-\frac{1}{p}; \frac{1}{q}\right),$$

где $\mu := \mu_\infty + \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m$, а $1/p + 1/q = 1$. Заметим, что это условие является необходимым и достаточным, чтобы ρ был весом Макенхаунта, т.е. удовлетворяло условию A_p :

$$\sup \left(\frac{1}{|\Pi|} \int_1 \rho(x)^p dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|\Pi|} \int_1 \rho(x)^{-q} dx \right)^{1/q} < \infty,$$

где I пробегает все ограниченные интервалы вещественной переменной $\mathbb{R}$, а $|I|$ – длина интервала I (см., например, [6]). Важную роль в дальнейшем играют числа $\nu_\infty = 1/q - \mu$, $\nu_0 = 1/p + \mu_0$.

В [7] получен критерий фредгольмовости и вычислен индекс матричного оператора Винера – Хопфа в пространствах $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ в случае кусочно-непрерывного символа.

В данной работе мы распространяем эти результаты на операторы $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа в случае произвольного безотражательного потенциала.

2. Оператор $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа. Рассмотрим дифференциальное выражение ℓ (см. (1.1)) с потенциалом v , удовлетворяющим (1.3), (1.4). Условие (1.2) выполняется автоматически. Собственные значения самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля $\mathcal{L}$, порожденного дифференциальным выражением ℓ , совпадают с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (см., например, [8]). Ортонормальная система собственных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ однозначно определяется системой линейных уравнений

$$\varphi_k(x) + \sum_{s=1}^N m_k m_s \frac{e^{-(\lambda_k + \lambda_s)x}}{\lambda_k + \lambda_s} \varphi_s(x) = m_k e^{-\lambda_k x}, \quad k = 1, \dots, N; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u^-(x, \lambda) &= t(\lambda) e^{i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k - i\lambda} \varphi_k(x) \right), \\ u^+(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{m_k e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k + i\lambda} \varphi_k(x) \right), \quad x, \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где коэффициент прохождения $t(\lambda)$ определяется равенством

$$t(\lambda) = \prod_{k=1}^N \frac{\lambda + i\lambda_k}{\lambda - i\lambda_k}.$$

Функции $u^\mp(x, \lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются ограниченными решениями уравнения $\ell y = \lambda^2 y$ и порождают интегралы

$$(U_\mp y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u^\mp(x, \lambda) y(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$. Эти интегралы определяют ограниченные операторы $U_\mp: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ (см. [1, 3, 8]).

Под спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$ мы понимаем оператор

$$U := m(\chi_+) U_- + m(\chi_-) J U_+ : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

где χ_+ (χ_-) – характеристическая функция $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_-$), а $J: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ – оператор, действующий по формуле $(Jy)(x) = y(-x)$. Оператор U удовлетворяет равенствам

$$U^*U = I - P, \quad UU^* = I,$$

где I – единичный оператор, а P – ортогональный проектор на подпространство $\text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Кроме того, на всюду плотном в $L_2(\mathbb{R})$ множестве имеет место равенство $ULU^* = m(\lambda^2)$.

Будем считать, что $v = 0$ также является безотражательным потенциалом, соответствующим случаю $N = 0$. В этом случае оператор $U = U_{\pm}$ и совпадает с преобразованием Фурье $F: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$:

$$(Fy)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} y(x) dx.$$

Функцию $a \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ назовем U -мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, \rho)$, если для каждого $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, \rho)$ функция $U^*m(a)Uy$ также принадлежит $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, \rho)$ и кроме того при некотором постоянном $c > 0$ неравенство

$$\|U^*m(a)U\|_{p,\rho} \leq c\|y\|_{p,\rho}$$

имеет место одновременно для всех $y \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, \rho)$. Оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, \rho)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$ -свертки на $L_2(\mathbb{R}, \rho)$ с символом a .

Множество U -мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}$. Поскольку при $v = 0$ оператор U совпадает с преобразованием Фурье F , то в этом случае класс U -мультипликаторов совпадает с классом мультипликаторов Фурье $\mathcal{M}_{p,\rho}$ (см. [6]). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть v – безотражательный потенциал и $\mathcal{L}$ – соответствующий самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением (1.1). Тогда справедливо включение $\mathcal{M}_{p,\rho} \subset \mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}$.

Пусть теперь $a \in \mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}^{n \times n}$. Тогда оператор $U^*m(a)U$ допускает непрерывное продолжение до ограниченного оператора, действующего на $L_p^n(\mathbb{R}, \rho)$, который мы также будем обозначать через $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ и называть оператором $\mathcal{L}$ -свертки с матричным символом a .

Определим операторы $\pi_+^0: L_p(\mathbb{R}_+, \rho) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \rho)$, $\pi_+: L_p(\mathbb{R}, \rho) \rightarrow L_p(\mathbb{R}_+, \rho)$ по формулам $(\pi_+ y)(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x) & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}.$$

Пусть $a \in \mathcal{M}_{p,\rho,\mathcal{L}}^{n \times n}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W_{\mathcal{L}}^0(a) \pi_+^0: L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho) \rightarrow L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$, $1 < p < \infty$, будем называть оператором $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа с символом a .

3. Фредгольмовость оператора $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа. Класс мультипликаторов Фурье $\mathcal{M}_{p,\rho}$ (см. [7]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}} := \|W^0(a)\|_{B(L_p(\mathbb{R}, \rho))}.$$

Функции из PC , имеющие ограниченную вариацию, принадлежат $\mathcal{M}_{p,\rho}$. Через $PC_{p,\rho}$ обозначим замыкание всех функций PC , имеющих ограниченную вариацию в банаховой алгебре $\mathcal{M}_{p,\rho}$, а через $C_{p,\rho}(\mathbb{R})$ обозначим алгебру $PC_{p,\rho} \cap C(\mathbb{R})$. Имеет место включение $PC_{p,\rho} \subset PC$ (см. [6]).

Пусть $v \in (0,1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; v) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+iv)} - z_1}{e^{2\pi(x+iv)} - 1} ; x \in \mathbb{R} \right\}$$

является дугой окружности, соединяющей точки z_1 и z_2 .

Пусть $a \in PC^{n \times n}$ и $a = (a_{ij})_{ij=1}^n$. Определим матриц-функцию $a_{p,\rho}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ по формуле

$$a_{p,\rho}(x, \xi) = \frac{-1}{e^{2\pi\xi(x+iv)} - 1} a(x-0) + \frac{e^{2\pi(\xi+iv)}}{e^{2\pi\xi(x+iv)} - 1} a(x+0),$$

где $x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ и $v = \begin{cases} v_\infty & x \in \mathbb{R} \\ v_0 & x = \infty \end{cases}$. Образ каждой из компонент $(a_{ij})_{p,\rho}$ является непрерывной кривой в комплексной плоскости, поскольку в точке разрыва $x \in \mathbb{R}$ существенного образа a_{ij} точки $a_{ij}(x-0)$ и $a_{ij}(x+0)$ соединяются дугой $\mathcal{A}(a_{ij}(x-0), a_{ij}(x+0); v) = \{(1-\eta)a_{ij}(x-0) + \eta a_{ij}(x+0); \eta \in \mathcal{A}(0,1; v)\}$. В частности, образ функции $\det a_{p,\rho}$ также является непрерывной замкнутой естественным образом ориентированной кривой в результате добавления к существенному образу $\det a_{p,\rho}$ кривых $\{\det((1-\eta)a(x-0) + \eta a(x+0)); \eta \in \mathcal{A}(0,1; v)\}$, соединяющих в точках разрывов $\det a(x)$, точки $\det a(x-0)$ и $\det a(x+0)$, $x \in \mathbb{R}$. Это обстоятельство позволяет в случае $\det a_{p,\rho}(x, \xi) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$) корректным образом определить целое число $\text{wind}(\det a(x))$, равное количеству оборотов вокруг нуля точки $\det a_{p,\rho}(x, \xi)$.

Теорема 3.1. Пусть v – безотражательный потенциал, $a \in (PC_{p,\rho})^{n \times n}$. Тогда оператор $W_L(a)$ фредгольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ тогда и только тогда, когда

$$\det a_{p,\rho}(x, \xi) \neq 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}.$$

При выполнении этого условия

$$\text{Ind } W_L(a) = \text{wind}(\det a_{ij}). \quad (3.1)$$

В случае, когда $\det a$ имеет лишь конечное число разрывов, формула (3.1) может быть записана в более прозрачной форме.

Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ – все конечные точки разрыва функции $\det a$. Добавив к ним $x_0 := -\infty$, $x_{m+1} := +\infty$, и определим интервалы $\ell_k := [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m$. Под непрерывным аргументом $\det a$ на ℓ_k мы понимаем произвольную непрерывную на ℓ_k функцию $\arg(\det a)$,

удовлетворяющую на ℓ_k равенству $\det a(x) = |\det a(x)|e^{i \arg(\det a(x))}$. Очевидно, что числа

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_{\ell_0} a &:= \arg a(x_1 - 0) - \arg a(-\infty) \\ \operatorname{ind}_{\ell_k} a &:= \arg a(x_{k+1} - 0) - \arg a(x_k + 0), \quad k = 1, \dots, m-1, \text{ и} \\ \operatorname{ind}_{\ell_m} a &:= \arg a(+\infty) - \arg a(x_m + 0)\end{aligned}$$

не зависят от выбора непрерывных аргументов. Формула (3.1) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) &= mn\nu_{\infty} + n\nu_0 - \sum_{k=0}^m \operatorname{ind}_{\ell_k}(\det a) - \\ &- \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^n \left\{ \nu_{\infty} + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_s(x_k) \right\} - \sum_{s=1}^n \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_s(\infty) \right\},\end{aligned}$$

где $\xi_1(x_k), \dots, \xi_n(x_k)$ — все собственные значения матрицы $a^{-1}(x_k - 0)a(x_k + 0)$ ($k = 1, \dots, m$); $\xi_1(\infty), \dots, \xi_m(\infty)$ — все собственные значения матрицы $a^{-1}(\infty - 0)a(\infty + 0)$, а через $\{\eta\}$ обозначена дробная часть действительного числа η . Переформулируем теперь теорему 3.1 в случае непрерывного на $\overline{\mathbb{R}}$ символа.

Теорема 3.2. Пусть v — безотражательный потенциал и $a \in (C_{p,\rho}(\overline{\mathbb{R}}))^{n \times n}$. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, \rho)$ тогда и только тогда, когда $\det a_{p,\rho}(x) \neq 0$ для всех $x \in \overline{\mathbb{R}}$, а числа

$$\nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j, \quad j = 1, \dots, n$$

не являются целыми ни при одном собственном значении ξ_i матрицы $a^{-1}(\infty - 0)a(\infty + 0)$.

В случае, когда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов, справедливо равенство

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind} W_{\mathcal{L}}(a) &= \arg(\det a)(-\infty) - \arg(\det a)(+\infty) + n\nu_0 \\ &- \sum_{j=1}^n \left\{ \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \arg \xi_j \right\},\end{aligned}$$

где $\arg(\det a)$ — непрерывный на $\overline{\mathbb{R}}$ аргумент функции $\det a$.

¹Институт механики НАН РА

²Институт математики НАН РА

³Ереванский государственный университет

e-mails: hrayrgrigor@gmail.com, kamalyan_armen@yahoo.com, grigor.kirakosyan.99@gmail.com

Г. С. Григорян, А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

Операторы $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа с кусочно-непрерывным матричным символом в лебеговых пространствах со степенным весом

Понятия операторов $\mathcal{L}$ -свертки и $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа вводятся заменой преобразования Фурье в определении оператора свертки, оператором сплетающий оператор Штурма – Лиувилля с оператором умножения. Рассматривается случай когда потенциал оператора Штурма – Лиувилля является безотражательным, а символ оператора $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа кусочно-непрерывной матрица-функцией. Получены критерии фредгольмовости и формула для индекса в лебеговых пространствах со степенным весом.

Հ. Ս. Գրիգորյան, Ա. Հ. Քամալյան, Գ. Ա. Կիրակոսյան

Վտոր առ կտոր անընդհատ մատրիցային սիմվոլով $\mathcal{L}$ -Վիներ – Հոպֆի օպերատորները աստիճանային կշռով լեբեգյան տարածություններում

Փաթեթի օպերատորի սահմանման մեջ, Ֆուրիեի ձևափոխությունը փոխարինելով օպերատորով, որը միահյուսում է Շտուրմ – Լյուվիլի և բազմապատկման օպերատորները, ներմուծված է $\mathcal{L}$ -փաթեթի և $\mathcal{L}$ -Վիներ – Հոպֆի օպերատորների գաղափարը: Դիտարկվում է դեպք, երբ Շտուրմ – Լյուվիլի օպերատորի պոտենցիալը չանդրադարձող է, իսկ $\mathcal{L}$ -Վիներ – Հոպֆի օպերատորի սիմվոլը կտոր առ կտոր անընդհատ մատրիցա-ֆունկցիա է: Աստիճանային կշռով լեբեգյան տարածություններում ստացված են ֆրեդհոլմության հայտանիշ և ինդեքսի բանաձև:

H. S. Grigoryan, A. G. Kamalyan, G. A. Kirakosyan

$\mathcal{L}$ -Wiener – Hopf Operators with Piecewise Continuous Matrix-Valued Symbol on Lebesgue Spaces with Power Weight

The concepts of $\mathcal{L}$ -convolution operator and $\mathcal{L}$ -Wiener – Hopf operator is introduced by changing the Fourier operator in the definition of the convolution operator to the operator intertwining the Sturm – Liouville operator $\mathcal{L}$ with the multiplication operator. It is considered the case when the potential of Sturm – Liouville operator is reflectionless and the symbol of the $\mathcal{L}$ -Wiener – Hopf operator is a piecewise continuous matrix-function. Fredholm criteria and index-formulas on Lebesgue spaces with power weight are obtained.

Литература

1. Камалян А. Г., Спитковский И. М. – Матем. заметки. 2018. Т. 104. Вып. 3. С. 407–421.
2. Камалян А. Г., Караханян М. И., Оганесян А. О. – Изв. НАН Армении. Математик. 2018. Т. 53. № 3. С. 21–27.
3. Hasanyan D., Kamalyan A., Karakhanyan M., Spitkovsky I.M. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2019. V. 291. P. 175–197.
4. Asatryan H. A., Kamalyan A. G., Karakhanyan M. I. – Reports NAS of Armenia. 2019. V. 119. № 1. P. 22–28.

5. *Asatryan H. A., Kamalyan A. G., Karakhanyan M. I.* – Reports NAS of Armenia. 2019. V. 119. № 2. P. 103–109.
6. *Böttcher A., Karlovich Y. I., Spitkovsky I. M.* – Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Basel, Birkhäuser. 2002.
7. *Schneider R.* – J. Integral Equations. 1985. V. 9. P. 135–152.
8. *Фаддеев Л. Д.* – Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы мат. 1974. Т. 3, С. 93–180.