ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XVII, № 3, 1964 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

Г. А. МАКАРЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ РУСЛА

При проектировании гидротехнических сооружений часть гидравлических расчетов иногда сводится к построению линии свободных поверхностей потоков движущейся воды. Подобные задачи обычно решаются с помощью следующего уравнения неравномерного движения жидкости в призматическом русле:

$$\int_{1}^{2} dl = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1-\Pi_k}{i-\frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}\, dh, \tag{1}$$

где l, h, ω, R — соответственно расстояние, глубина, живое сечение, гидравлический радиус произвольного поперечного сечения русла; Q — расход; Π_k — параметр кинетичности потока; i — уклон дна русла. Однако, найти точный интеграл уравнения (1) не представляется возможным из-за сложных зависимостей величин Π_k, ω, C и R от h, чем и объясняется появление ряда приближенных способов интегрирования уравнения (1).

Подавляющее большинство приближенных способов интегрирования основано на применении показательной функции, заменяющей выражение $\frac{Q^2}{i\omega^2 C^2 R}$ в уравнении (1). Впервые применение показательной зависимости для модулей расхода K' и K'', относящихся к двум сечениям потока с глубинами h' и h'', было предложено Б. А. Бахметьевым [1]:

$$\left(\frac{K'}{K''}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h''}\right)^x, \text{ где } K = \omega C\sqrt{R}. \tag{2}$$

Показатель степени x им был назван „гидравлическим показателем русла".

С целью более точного интегрирования уравнения (1) И. И. Агроскин [2] и М. Д. Чертоусов [3] применили показательную зависимость следующего вида

$$\frac{Q^2}{i\omega^2 C^2 R} = z^{-x}, \tag{3}$$

В уравнении (1) dh необходимо выразить через dz. Поэтому было допущено, что при произвольном и постоянном значении x имеет место прямолинейная связь между h и z на коротком участке интегрирования, т. е.

$$\frac{h_1 - h_2}{z_1 - z_2} = \text{const}.$$

В литературе встречаются разноречивые рекомендации по выбору значения x. Автор в данной статье пытается внести ясность в затронутый вопрос и дать обоснованное решение для определения и оценки x.

Дифференцируя выражение (3) получим:

$$-xz^{-(x+1)}dz = \frac{Q^2}{i} d\left(\frac{1}{\omega^2 C^2 R}\right) = -\frac{Q^2}{i}\left[\frac{2}{\omega^2 C^2 R}\frac{d\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{1}{C^2 R}\right)\right]. \quad (4)$$

Полагая далее $\chi = \frac{\omega}{R}$, $C = \frac{1}{n} R^y$ следуя Н. Н. Павловскому [4] для последнего члена (4), получим выражение

$$\frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{1}{C^2 R}\right) = \frac{1+2y}{\omega^2 C^2 R}\left(\frac{d\chi}{\chi} - \frac{d\omega}{\omega}\right).$$

Тогда

$$x\frac{dz}{z} = \theta\frac{dh}{h},$$

где

$$\theta = (3+2y)\frac{d\omega}{dh}\cdot\frac{h}{\omega} - (1+2y)\frac{d\chi}{dh}\cdot\frac{h}{\chi}. \quad (5)$$

Откуда

$$h = \text{const}\cdot z^{\frac{x}{\theta}}. \quad (6)$$

Следовательно, прямолинейная связь между h и z будет иметь место не при произвольном значении x, а только при $x = \theta$ или

$$x = (3+2y)\frac{h}{\omega}\frac{d\omega}{dh} - (1+2y)\frac{h}{\chi}\frac{d\chi}{dh}. \quad (7)$$

В дальнейшем преобразовании выражения (7) необходимо учесть форму поперечного сечения русла.

А. Русло трапецоидальной формы.

$$\omega = h(b + mh);\ \chi = b + 2h\sqrt{1+m^2};\ \beta = \frac{b}{h};$$

тогда $\frac{d\omega}{dh} = b + 2mh$, $\frac{d\chi}{dh} = 2\sqrt{1+m^2} = m'$.

Следовательно, из (7) для гидравлического показателя трапецоидального русла получим выражение

$$x = (3+2y)\frac{\beta}{\beta+m} - (1+2y)\frac{m'}{\beta+m'}, \quad (8)$$

которое впервые было получено Чугаевым [5] косвенным путем.

Из (8) следует, что: 1) для относительно широких трапецоидальных и прямоугольных русел, когда $\beta \to \infty$, $x = 5 + 2y$.

2) для треугольных русел, когда

$$\beta \to 0, \; x = 5 + 2y. \tag{9}$$

3) для прямоугольных русел, когда $m = 0$,

$$x = 3 + 2y = \frac{1 + 2y}{\beta/2 + 1} \cdot \tag{10}$$

Б. Русло параболической формы.

$$\omega = \frac{2}{3} bh, \; \chi = p\sqrt{\frac{2h}{p}\left(1 + \frac{2h}{p}\right)} + p\ln\left(\frac{2h}{p} + \sqrt{1 + \frac{2h}{p}}\right),$$

$p = \frac{b^2}{8h}$ — параметр параболы.

Тогда, согласно (7), окончательно получим

$$x = 4{,}5 + 3y - \frac{4 + 8y}{4 + \beta\ln\left(\frac{4}{\beta} + \sqrt{1 + \frac{16}{\beta^2}}\right) \cdot \beta^2\sqrt{1 + \frac{16}{\beta^2}}} \tag{11}$$

или приближенно

$$x = 4 + 2y - \frac{8 + 16y}{\beta^2 + 16} \cdot \tag{11'}$$

Из (11), а также из (11′) следует, что:

1) для мелководных параболических русел, когда $\beta \to \infty$ $(h \to 0)$, $x = 4 + 2y$.

2) для очень глубоких русел когда $\beta \to 0$ $(h \to \infty)$, $x = 3{,}5 + y$. В большинстве случаев практики относительная ширина β колеблется в интервале 1 — 4. Этому соответствует $x = 3{,}53 + 1{,}06y \div 3{,}75 + 1{,}5y$, или при $y = 0{,}2$: $x = 3{,}74 \div 4{,}05$. Так как зависимость x от y мала, можно для параболических русел рекомендовать значение $x = 3{,}9$ (рис. 1).

В. Русло кругового сечения с радиусом r.

Представляя уравнение круга в форме: $r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + u^2$, где $u = r - h$, получим

$$\omega = \frac{\pi r^2}{2} - u\sqrt{r^2 - u^2} - r^2 \arcsin\frac{u}{r};$$

$$\chi = \pi r - 2r \arcsin\frac{u}{r} \cdot .$$

На основании выражения (7), получим:

$$x = \frac{16\,(3 + 2y)\,\beta}{\left(\frac{\beta^2 + 4}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\beta^2 - 4}{\beta^2 + 4}\right) - \beta(\beta^2 - 4)} - \frac{2\,(1 + 2y)}{\beta\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\beta^2 - 4}{\beta^2 + 4}\right)}. \tag{12}$$

Выражения (8)—(12) графически изображены на рис. 1.

Из рассматриваемых кривых рис. 1 следует, что для русел любой формы, значение x будет находиться в области, ограниченной сверху прямой 5, снизу кривой 1, осью ординат и бесконечностью

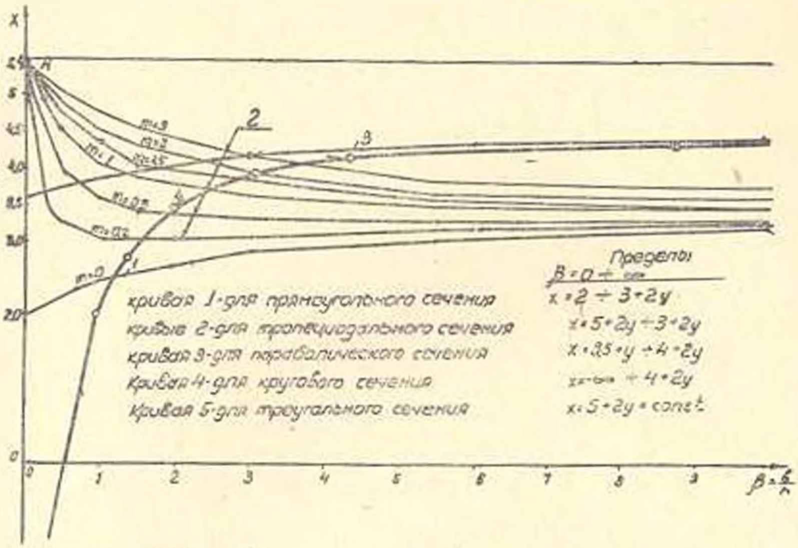

Рис. 1. Кривые $x = f(\beta)$ для различных форм поперечных сечений русла при $y = 0{,}2$.

($\beta = \infty$). Исключение составляет часть кривой 4 для кругового сечения, находящейся вне этой области при $\beta < 1{,}25$, $x < 2{,}2 + 2y$ и не представляющей практического интереса.

Приведенные соображения об изменяемости гидравлического показателя x, а также анализ результатов практических расчетов показывает, что изменение x по длине потока незначительно.

Поэтому, учет линейной зависимости между h и z при интегрировании уравнения (1) применением степенной функции не снижает точность интегрирования. Точность расчета длины свободной поверхности будет зависеть лишь от точности выбора величины x.

С целью оценки абсолютной ошибки Δl при определении длины канала l положим, что последняя определяется следующей формулой, являющейся решением уравнения (1) [2], и вся ошибка Δl складывается от ошибки в выборе x, т. е. от Δx.

$$l_{1-2} = \frac{1}{i}\left[\Delta h + (1 - \Pi_k)\frac{\Delta \Phi}{\Delta z}\right]\Delta z. \tag{13}$$

Следует различать два случая появления абсолютной ошибки Δx:

1) когда значение x для одного характерного живого сечения определяется по одной из формул (8—12) и принимается постоянным по всей длине канала, тогда, когда для другого любого сечения x будет другим. Такие ошибки неизбежны и обычно составляют не более $10 \div 20\%$.

2) когда x не определяется по указанным формулам, а его значение выбирается произвольно. Ошибка в этом случае может быть большой и зависит от метода расчета каналов.

Докажем, что ошибка Δl в первом случае незначительна и ею можно пренебречь. Сначала установим связь между относительными ошибками $\alpha = \frac{\Delta x}{x}$ и $\delta = \frac{\Delta z}{z}$. Пусть расчетному значению x по формуле (3) соответствует определенное значение z, заданного сечения канала, а действительному значению $x' = x + \Delta x$ соответствующая величина $z' = z - \Delta z$. Тогда, согласно (3)' можно окончательно записать

$$\mp \delta = 1 - z^{\frac{\mp\alpha}{1\mp\alpha}}, \tag{14}$$

где знак $\mp$ соответствует $z > 1$, а величина δ соизмерима с α. Далее, допуская прямолинейную связь на малом участке кривой $\Phi(z)$, можно на основании (13) составить следующее приближенное выражение, позволяющее найти величину относительной ошибки

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \frac{\gamma - \delta}{\alpha + \delta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_2 - z_1}{\Phi_2 - \Phi_1} \cdot \frac{1}{1 - \Pi_k}}, \tag{15}$$

где величина $\Phi = \Phi(z)$; $\gamma = \frac{\Delta\Phi}{\Phi}$ и соизмерима с δ. Из рис. 2 следует, что $\gamma < \delta$ при $z > 1$ и $\gamma > \delta$ при $z < 1$.

Из (14) и рис. 2 следует, что α, δ и γ величины одного порядка. Следовательно, согласно (15) величины $\Delta l/l$ тоже одного порядка с α, δ, γ и всегда значительно меньше разности $\gamma - \delta$. Например, для

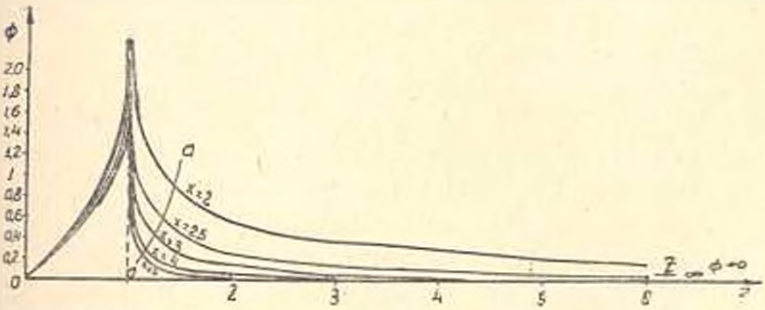

Рис. 2. Семейство кривых $\Phi(z)$ при разных значениях x. Слева от пунктирной линии $\Delta\Phi(z)/\Delta z > 1$; Справа $\Delta\Phi(z)/\Delta z < 1$.

$\alpha = 0{,}2$ (что может иметь место в редких случаях при очень длинных и узких каналах), согласно (14), при $z = 1{,}2 \div 5$ $\delta = 0{,}03 \div 0{,}2$ и по данным анализа характерных примеров, приведенных в справочниках для худшего случая, когда $\alpha = 0{,}2$, получаем согласно (14) и (15) $\Delta l/l < 0{,}03 \div 0{,}06$.

Таким образом, при расчете свободных поверхностей при определении x, по формулам (8)—(12) поправкой Δl можно пренебречь.

Последствия произвольного выбора x (второй случай появления ошибки Δx) в каждом конкретном случае графически можно иллюстрировать с помощью семейства кривых $z = f(h)$, построенных на основании (3) для различных форм поперечных сечений русел и разных значений x.

Для сравнения автор воспользовался экспериментальными данными Мононобе [6], исследовавшего кривые свободных потоков в натурных условиях. Данные обрабатывались в форме

$$z = \sqrt[x]{\frac{i}{Q^2 n^2} \cdot \frac{(bh + mh^2)^{3+2y}}{(b + 2h\sqrt{1 + m^2})^{1+2y}}}\,. \tag{16}$$

На рис. 3 представлено семейство кривых, вычисленных по уравнению (16), и данным Мононобе, для трапецоидального сечения, при

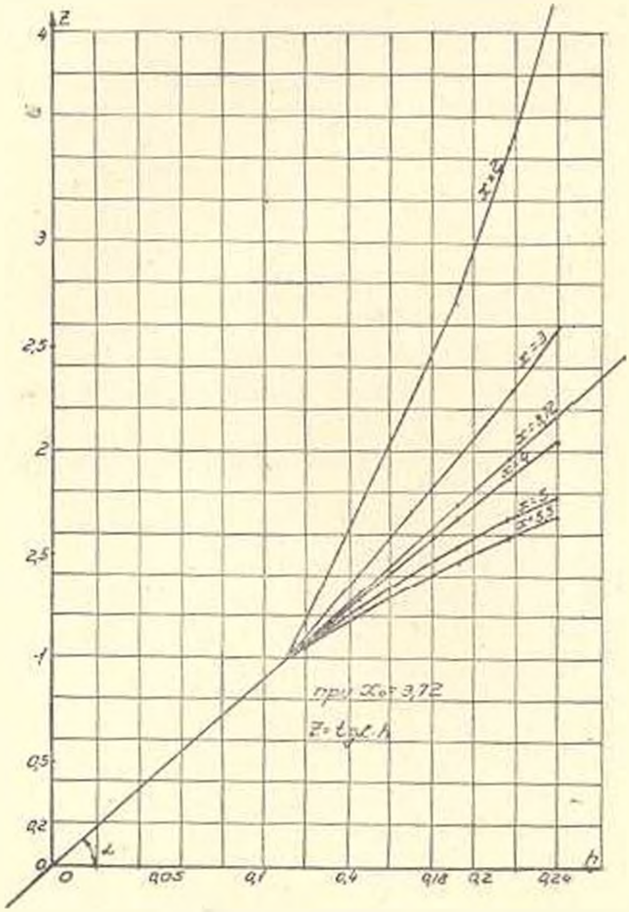

Рис. 3. Кривые $z = f(x)$, вычисленные по формуле (16) и натурным данным Мононобе [6] для русла трапецоидального сечения.

разных значениях x. Семейство состоит из вогнутых и выпуклых кривых, разделяющихся прямой линией, соответствующей значению $x = x_0$, определенному по формуле (8). Из всех кривых только прямая проходит через начало координат (необходимость последнего вытекает из (6). Чем x меньше по сравнению x_0, тем больше вогнутость кривых. Следовавельно, увеличение показателя степенной функции (3) не всегда приводит к выпрямлению кривой, как это имеет место для параболических функций. Абсолютная ошибка Δl от неправильного выбора Δ во втором случае будет значительно больше, чем в первом случае.

В свете изложенного рекомендуется при расчете кривых свободных поверхностей, призматических русел, гидравлический показатель русла x определять только по формулам (8)—(12), при этом изменение его величины по длине потока можно не учитывать.

АФВНИИЭМ Поступило 5.II 1964

Դ. Ա. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

ՀՈՒՆԻ ՀԻԴՐԱՎԼԻԿԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հիդրոտեխնիկական կառուցվածքներ նախագծելիս հաճախ անհրաժեշտություն է զգացվում ճիշտ որոշել ջրի հոսքի ազատ մակերևույթի դիրքը:

Այդ պատճառով ազատ մակերևույթի կորի (1) դիֆերենցիալ հավասարման ճիշտ լուծումով պայմանավորված է կառուցվածքների չափերի ճիշտ ընտրումը և նրանց աշխատանքի հուսալիությունը:

Ներկայումս (1) դիֆերենցիալ հավասարման բարդության պատճառով հայտնի են միայն նրա լուծման մոտավոր եղանակները, որոնք հիմնականում հիմնված են (3) տիպի կամ այլ խմբավորումների աստիճանային ֆունկցիաներով փոխարինման վրա: Ինչպես գրականության մեջ, այնպես էլ նախագծման պրակտիկայում լայն տարածում են ստացել Բ. Ա. Բախմետևի, Ա. Ն. Ագրոսկինի և Մ. Դ. Չերտոուսովի առաջարկած մեթոդները, որտեղ օգտագործված են նշված ընդունելությունները, իսկ ընտրության ճշտությունը ի վերջո հանգում է x ցուցիչի ընտրման ճշտությանը:

Սակայն գրականության մեջ բավարար և սպառիչ պարզություն չի մտցված հունի հիդրավլիկ ցուցիչի արժեքների որոշման վերաբերյալ՝ կախված ջրի շարժման պայմաններից: Վերջին հանգամանքը առիթ տվեց բազմաթիվ, երբեմն իրականությանը չհամապատասխանող կարծիքների և առաջարկությունների կուտակմանը: Ներկայումս x ցուցիչի որոշման վերաբերյալ միասնական կարծիք գոյություն չունի:

Ի լրացումն նշված մեթոդների, հոդվածում անալիտիկ կերպով որոշվում է x ցուցիչի մաթեմատիկական արտահայտությունները հուների պրակտիկայում օգտագործվող տարբեր պրոֆիլների համար, ընդ որում ցույց է տրված, որ (1) հավասարման ինտեգրումը ճիշտ է, եթե x-ը որոշվում է միայն ստացված (8)—(12) արտահայտություններով:

Հունի հիդրավլիկական ցուցիչի արտահայտության ստրուկտուրային վերլուծության և համապատասխան գրաֆիկների միջոցով պարզաբանվում է մեծության արժեքի սխալ ընտրման ազդեցությունը ամբողջ երևույթի վրա, և գնահատվում է սխալի աստիճանը հունի չափերը որոշելիս:

Առաջին անգամ հոդվածում բերված է x-ի արժեքը կլոր կտրվածքներով հուների համար (12)։

Ապացուցվում է, որ անգամ x-ի արժեքի նշանակալի փոփոխումը ըստ հունի երկարության աննշան չափով է ազդում l-ի մեծության վրա։ Բավական է ճիշտ գտնել x-ի արժեքը հունի միջինացված չափերի համար և այն թողնել հաստատուն։

Միաժամանակ ապացուցվում է, որ x-ի սխալ ընտրումը (ոչ ըստ (8)—(12) արտահայտությունների) բերում է նշանակալից սխալների։ Ճիշտ չէ գրականությունում տարածված այն կարծիքը, թե x-ի արժեքի հնարավոր (ըստ աղյուսակների) մեծ ընտրումը z-ի և h-ի կապը ձգտում է ուղղագծայինի և, հետևաբար, մեծանում է ճշտությունը։ Դա հերքվում է (3) նկարում բերված կորերով։

Այսպիսով պրիզմատիկ հուներում ազատ մակերևույթի կորերը հաշվելիս անհրաժեշտ է x ցուցչի մեծությունը որոշել միայն (8)—(12) բանաձևերով, որոնք բաղդատված են Մոնոնոբեի կողմից իրական հուների ազատ մակերևույթների կորերի ուսումնասիրությունից ստացված փորձնական տվյալների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахметьев Б. А.* О неравномерном движении жидкости в открытом русле. М., 1921.
2. *Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т.* и *Пикалов Ф. И.*, Гидравлика, Госэнергоиздат, 1954.
3. *Чертоусов М. Д.* Гидравлика, Госэнергоиздат, 1957.
4. *Павловский Н. Н.* Собрание сочинений т. 1, Изд. АН СССР, М., 1955.
5. *Чугаев Р. Р.* Некоторые вопросы неравномерного движения воды в открытых призматических руслах. Изв. ВНИИГ, М., 1931.
6. *Mononobe N.* Back-water and Drop-Down Gurvesfor Uniform Channels, Proceedings of the ASCE, 1936, v. 62, № 5.