

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

К. М. ХУБЕРЯН

НАПРЯЖЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЕ,  
ОТВЕЧАЮЩИЕ НАИМЕНЬШЕМУ ЕЕ ВЕСУ ПРИ  
ФИКСИРОВАННЫХ УСИЛИЯХ

Сообщение 2

Случай расчета однократно статически неопределимой фермы  
на единственное нагружение статической нагрузкой и многие  
неравномерные температурные воздействия

Первое температурное воздействие состоит в том, что температура первого стержня изменилась на  $t_{11}$  градусов, температура второго стержня — на  $t_{12}$  градусов и т. д. Второе температурное воздействие состоит в том, что температура первого стержня изменилась на  $t_{21}$  градусов, температура второго стержня — на  $t_{22}$  градусов и т. д. Температурные воздействия обозначим индексами  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_m$ .

Примем такую нумерацию температурных воздействий, при которой наименьшая из сумм

$$\sum_{i=1}^{l=m} a_i t_{1i}, \sum_{i=1}^{l=m} a_i t_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^{l=m} a_i t_{ni} \quad (2.1)$$

отвечает первому температурному воздействию, а наибольшая из них — второму температурному воздействию. Рассмотрим общий случай, когда наименьшая сумма отрицательна, а наибольшая — положительна.

Поскольку усилия  $X_1^{t_1}, X_2^{t_2}, \dots, X_n^{t_n}, \dots, X_m^{t_m}$ , возникающие в лишней связи от температурных воздействий пропорциональны указанным суммам, а усилие в стержне  $i$  от температурного воздействия  $t_n$  пропорционально усилию  $X_i^{t_n}$ , для каждого стержня  $i$  любое из его температурных усилий  $S_i^{t_1}, S_i^{t_2}, \dots, S_i^{t_n}, \dots, S_i^{t_m}$  окажется в интервале между усилиями  $S_i^{t_1}, S_i^{t_2}$ . Следовательно, в расчете достаточно учесть первое и второе температурные воздействия.

Записав каноническое уравнение метода напряжений для сочетания нагрузки с первым температурным воздействием и для сочетания нагрузки со вторым температурным воздействием, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m} a_i \sigma_i - \tau_1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{i=m} a_i \sigma_i + \tau_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= E\alpha \left| \sum_{i=1}^{i=m} a_i t_{1i} \right|; \\ \tau_2 &= E\alpha \left| \sum_{i=1}^{i=m} a_i t_{2i} \right|; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\sigma_i$  — напряжение в стержне  $i$  от сочетания нагрузки с первым температурным воздействием;  $\sigma_i$  — напряжение в том же стержне от сочетания нагрузки со вторым температурным воздействием;  $E$  — модуль упругости;  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения.

Усилие в лишней связи от нагрузки и вызванное этим усилием перемещение узла основной системы, к которому присоединяется лишняя связь, условимся считать положительными. В таком случае легко доказать, что при совпадении знака усилия в лишней связи от температурного воздействия  $t_n$  со знаком усилия в той же связи от нагрузки,

сумма  $\sum_{i=1}^{i=m} a_i t_{ni}$  будет отрицательной. Следовательно, знаки перед

$\tau_1$  и  $\tau_2$  в уравнениях (2.2) свидетельствуют о том, что первое из этих уравнений относится к тому состоянию фермы, когда знак температурного усилия в лишней связи совпадает со знаком усилия в той же связи от нагрузки, а второе уравнение относится к тому состоянию фермы, когда эти два усилия имеют разные знаки.

Ограничимся случаем, когда для сочетания нагрузки с первым температурным воздействием и для сочетания нагрузки со вторым температурным воздействием принимается одна и та же картина знаков\*.

Следовательно, из двух усилий  $S_i$  и  $S_i$ , вызываемых в стержне  $i$  указанными сочетаниями, опасным будет большее по абсолютной величине усилие.

Первое из уравнений (2.2) представим в виде

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{S_i^1 S_i^1 l_i}{F_i} - \tau_1 = 0, \quad (2.4)$$

где  $F_i$  — площадь сечения стержня  $i$ ;  $S_i^1, S_i^1$  — алгебраические величины.

\* Она очевидно сохраняется и при действии одной только нагрузки.

При модуляризации этого уравнения любой его член с индексом  $i$  очевидно получится положительным, если усилия  $\overset{ct_1}{S}_i$  и  $\overset{1}{S}_i$  имеют одинаковые знаки, или отрицательным, если они имеют разные знаки. Так как усилие  $\overset{c}{S}_{i, ct_1}$  в стержне  $i$  от нагрузки имеет такой же знак, как и усилие  $S_i$ , любой член с индексом  $i$  уравнения (2.4) после его модуляризации получится положительным, если усилия  $\overset{c}{S}_i$  и  $\overset{1}{S}_i$  имеют одинаковые знаки, или отрицательным, если они имеют разные знаки. Как известно,

$$\overset{ct_1}{S}_i = \overset{c}{S}_i + \overset{1}{S}_i \overset{t_1}{X}. \quad (2.5)$$

где  $\overset{t_1}{X}$  — положительная величина.

Усилие  $\overset{ct_1}{S}_i$  (а следовательно и напряжение  $\overset{ct_1}{\sigma}_i$ ) очевидно окажется опасным, если усилия  $\overset{c}{S}_i$  и  $\overset{1}{S}_i$  имеют одинаковые знаки, или неопасным, если они имеют разные знаки.

Сопоставив это положение с предыдущим приходим к тому заключению, что если для сочетания статической нагрузки с первым неравномерным температурным воздействием и для сочетания той же нагрузки со вторым неравномерным температурным воздействием принимается одна и та же картина знаков, то в первом модулярном каноническом уравнении положительные члены являются членами с опасными напряжениями, а отрицательные члены — членами с неопасными напряжениями.

Во втором модулярном каноническом уравнении, очевидно наоборот, положительные члены являются членами с неопасными напряжениями, отрицательные члены — членами с опасными напряжениями.

Произведя модуляризацию уравнений (2.2), сгруппировав положительные и отрицательные члены, учтя доказанную выше теорему и выразив при помощи пропорции  $\frac{\overset{ct_1}{\sigma}_i}{\overset{ct_2}{\tau}_i} = \frac{\overset{ct_1}{S}_i}{\overset{ct_2}{S}_i}$  абсолютную величину каж-

дого неопасного напряжения через абсолютную величину опасного напряжения, получим модулярные канонические уравнения

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{l=r} a_i \overset{ct_1}{\sigma}_i - \sum_{i=r+1}^{l=m} a_i \frac{\overset{ct_1}{S}_i}{\overset{ct_2}{S}_i} \overset{ct_2}{\sigma}_i - \tau_1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{l=r} a_i \frac{\overset{ct_2}{S}_i}{\overset{ct_1}{S}_i} \overset{ct_1}{\sigma}_i - \sum_{i=r+1}^{l=m} a_i \overset{ct_2}{\sigma}_i + \tau_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где все символы выражают существенно положительные величины; номерами  $1, 2, \dots, r$  теперь обозначены стержни, в которых опасные напряжения возникают при сочетании нагрузки с первым температурным воздействием; номерами  $r+1, r+2, \dots, m$  теперь обозначены стержни, в которых опасные напряжения возникают при сочетании нагрузки со вторым температурным воздействием.

Подставив в уравнения (2.6) вместо усилий их выражения, учтя, что в этих уравнениях каждое отношение усилий является отношением абсолютной величины неопасного усилия к абсолютной величине опасного усилия и, следовательно, меньше единицы, и подставив

$$X = \frac{\tau_2}{\tau_1} \dot{X}, \text{ получим}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=r} a_i \tau_i - \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i \frac{\frac{c}{S_i} - \frac{1}{S_i} \frac{\tau_1}{X} \frac{ct_2}{\tau_1}}{\frac{c}{S_i} + \frac{1}{S_i} \frac{\tau_2}{X} \frac{ct_1}{\tau_1}} - \tau_1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{i=r} a_i \frac{\frac{c}{S_i} - \frac{1}{S_i} \frac{\tau_2}{X} \frac{ct_1}{\tau_1}}{\frac{c}{S_i} + \frac{1}{S_i} \frac{\tau_1}{X} \frac{ct_2}{\tau_1}} - \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i \tau_i + \tau_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где все символы выражают существенно положительные величины.

Поскольку  $\dot{S}_i = \left| \dot{S}_i + \frac{1}{S_i} \frac{c}{X} \right|$ , уравнения (2.7) содержат два параметра:  $X$  и  $\dot{X}$ .

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} a_i \frac{\frac{ct_1}{S_i}}{\frac{ct_2}{S_i}} &= A_i; \quad i = r+1, r+2, \dots, m; \\ a_i \frac{\frac{ct_2}{S_i}}{\frac{ct_1}{S_i}} &= B_i; \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

уравнениям (2.6) придадим вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=r} a_i \tau_i - \sum_{i=r+1}^{i=m} A_i \tau_i - \tau_1 &= 0; \\ \sum_{i=1}^{i=r} B_i \tau_i - \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i \tau_i + \tau_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6a)$$

Выбрав в качестве „зависимых“, например, опасные напряжения  $\tau_{m-1}$  и  $\tau_m$  и решив относительно них уравнения (2.6a), получим

$$\tau_{m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=r} (a_i a_m - B_i A_m) \tau_i - \sum_{i=r+1}^{i=m-2} (A_i a_m - a_i A_m) \tau_i}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} - \frac{\tau_1 a_m + \tau_2 A_m}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m};$$

$$\sigma_m = - \frac{\sum_{l=1}^{l=r} (a_l a_{m-1} - B_l A_{m-1}) \sigma_l^{ct_1} - \sum_{l=r+1}^{l=m-2} (A_l a_{m-1} - a_l A_{m-1}) \sigma_l^{ct_2}}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} + \frac{\tau_1 a_{m-1} + \tau_2 A_{m-1}}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} \quad (2.9)$$

Представив в формуле теоретического объема всех условно необходимых стержней фермы площадь сечения каждого стержня в виде отношения абсолютной величины опасного усилия к абсолютной величине опасного напряжения и подставив в эту формулу выражения (2.9), получим

$$T = \sum_{l=1}^{l=r} \frac{S_l l_l}{\sigma_l^{ct_1}} + \sum_{l=r+1}^{l=m-2} \frac{S_l l_l}{\sigma_l^{ct_2}} + \frac{S_{m-1} l_{m-1} (A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m)}{\sum_{l=1}^{l=r} (a_l a_m - B_l A_m) \sigma_l^{ct_1} - \sum_{l=r+1}^{l=m-2} (A_l a_m - a_l A_m) \sigma_l^{ct_2} - \tau_1 a_m - \tau_2 A_m} - \frac{S_m l_m (A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m)}{\sum_{l=1}^{l=r} (a_l a_{m-1} - B_l A_{m-1}) \sigma_l^{ct_1} - \sum_{l=r+1}^{l=m-2} (A_l a_{m-1} - a_l A_{m-1}) \sigma_l^{ct_2} - \tau_1 a_{m-1} - \tau_2 A_{m-1}} \quad (2.10)$$

Приравняв к нулю производные от этой функции по опасным напряжениям  $\sigma_1^{ct_1}, \sigma_2^{ct_1}, \dots, \sigma_r^{ct_1}$  и заменив в выражениях производных правые части формул (2.9) их левыми частями, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_l^{ct_1}} = - \frac{S_l l_l}{\sigma_l^{ct_1 2}} - \frac{S_{m-1} l_{m-1}}{\sigma_{m-1}^{ct_2 2}} \cdot \frac{a_l a_m - B_l A_m}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} + \frac{S_m l_m}{\sigma_m^{ct_2 2}} \cdot \frac{a_l a_{m-1} - B_l A_{m-1}}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} = 0; \quad (2.11)$$

$$l = 1, 2, \dots, r.$$

Возьмем также производные от функции (2.10) по опасным напряжениям  $\sigma_{r+1}^{ct_2}, \sigma_{r+2}^{ct_2}, \dots, \sigma_{m-2}^{ct_2}$ ;

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_l^{ct_2}} = - \frac{S_l l_l}{\sigma_l^{ct_2 2}} + \frac{S_{m-1} l_{m-1}}{\sigma_{m-1}^{ct_2 2}} \cdot \frac{A_l a_m - a_l A_m}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} -$$

$$\frac{\frac{ct_2}{\sigma_m} l_m}{\frac{ct_2}{\sigma_m}} = \frac{A_l a_{m-1} - a_l A_{m-1}}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m}, \quad (2.12)$$

$$i = r + 1, r + 2, \dots, m - 2.$$

В уравнениях (2.6) каждое отношение усилий является отношением абсолютной величины неопасного усилия к абсолютной величине опасного усилия и, следовательно, меньше единицы. Поэтому из формул (2.8) следует

$$\left. \begin{aligned} a_l > A_l; i = r + 1, r + 2, \dots, m; \\ a_l > B_l; i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Из этих неравенств следует

$$\begin{aligned} a_l a_m - B_l A_m > 0; a_l a_{m-1} - B_l A_{m-1} > 0 \\ i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку в выражении каждой из производных (2.11) все символы обозначают модули, в силу неравенств (2.14) числитель второго члена и числитель третьего члена указанного выражения положительны. Следовательно, независимо от знака разности  $A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m$  второй и третий член будут иметь разные знаки. Поэтому каждую из производных (2.11) можно обратить в нуль путем изменения входящих в ее выражение опасных напряжений и эти производные законно было приравнять к нулю.

Среди производных (2.12) могут оказаться такие, в выражениях которых, в отличие от производных (2.11), все три члена будут отрицательными. Производная получится такой очевидно в том случае, если для нее

$$\frac{A_l a_m - a_l A_m}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} < 0; \quad \frac{A_l a_{m-1} - a_l A_{m-1}}{A_{m-1} a_m - a_{m-1} A_m} > 0. \quad (2.15)$$

Таких производных может и не оказаться. Их может не оказаться даже при любом выборе „зависимых“ опасных напряжений, но если они имеются, то опасные напряжения, по которым они взяты, нужно приравнять к допускаемым напряжениям.

Осальные из производных (2.12), т. е. не удовлетворяющие условиям (2.15) приравняем к нулю. Эти уравнения вместе с уравнениями (2.11), (2.9) дадут систему уравнений четвертой степени, которую целесообразно решить при помощи электронной цифровой машины. В дальнейшем действуя таким же методом, который был указан для рассмотренной ранее автором задачи,\* найдем опасные напряжения, не превышающие допускаемых напряжений и отвечающие наименьшему теоретическому объему стержней при заданных величинах лишних неизвестных  $\overset{c}{X}$  и  $\overset{l_1}{X}$ , если только эти величины лежат в пределах области существования лишних неизвестных.

\* См. сообщение I в Известиях АН Армянской ССР (серия ТН), т. XVI, № 1, 1963.

В результате решения рассмотренной задачи может оказаться, что либо для группы стержней  $1, 2, \dots, r$ , либо для группы стержней  $r+1, r+2, \dots, m$  все опасные напряжения равны соответствующим допускаемым напряжениям. Некоторые указания о возможности или невозможности такого результата легко дать заранее, до решения задачи. Для этого уравнения (2.6а) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=r} a_i \sigma_i &= \sum_{i=r+1}^{i=m} A_i \sigma_i + \tau_1; \\ \sum_{i=1}^{i=r} B_i \sigma_i + \tau_2 &= \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i \sigma_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Приравняем все опасные напряжения в левых и правых частях этих уравнений к соответствующим допускаемым напряжениям, т. е. подставим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= R_i; \quad i = 1, 2, \dots, r; \\ \sigma_i &= R_i; \quad i = r+1, r+2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Тогда за исключением редкого случая равнопрочной статически неопределимой фермы равенства (2.66) нарушатся.

Если окажется, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=r} a_i R_i &< \sum_{i=r+1}^{i=m} A_i R_i + \tau_1; \\ \sum_{i=1}^{i=r} B_i R_i + \tau_2 &< \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i R_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

то эти неравенства явятся необходимыми, но не достаточными условиями для приравнивания всех опасных напряжений в стержнях  $1, 2, \dots, r$  к допускаемым напряжениям.

Если окажется, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=r} a_i R_i &> \sum_{i=r+1}^{i=m} A_i R_i + \tau_1; \\ \sum_{i=1}^{i=r} B_i R_i + \tau_2 &> \sum_{i=r+1}^{i=m} a_i R_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

то эти неравенства явятся необходимыми, но не достаточными условиями для приравнивания всех опасных напряжений в стержнях  $r+1, r+2, \dots, m$  к допускаемым напряжениям.

Если же два неравенства, полученные после подстановки допускаемых напряжений в левые и правые части уравнений (2.66), будут иметь разные знаки неравенства, то ни для одной из указанных групп стержней невозможно приравнять все опасные напряжения к допускаемым напряжениям.

Ф. И. Слюсарчуком и автором независимо друг от друга было доказано, что при расчете статически неопределимой фермы на многие загрузки статическими нагрузками в общем случае невозможно получить равнопрочную ферму, т. е. такую, в которой все опасные напряжения равны соответствующим допускаемым напряжениям. Равнопрочность фермы можно обеспечить лишь в редких, частных случаях. Аналогичное заключение было получено автором для статически неопределимых ферм, рассчитываемых на единственное нагружение статической нагрузкой и многие температурные воздействия. Эти обстоятельства обуславливают практическое значение рассмотренных в настоящей статье задач о выгоднейшем распределении напряжений в неравнопрочных статически неопределимых фермах.

Изложенные в настоящей статье расчеты однократно статически неопределимой фермы, разумеется, значительно сложнее и длительнее обычных расчетов таких ферм на статические нагрузки и температурные воздействия. Однако проектанты несомненно учтут, что обычные расчеты статически неопределимой фермы и рассмотренные выше ее расчеты преследуют совершенно различные цели, что путем обычного расчета (позволяющего лишь констатировать напряжения в статически неопределимой ферме при заданных площадях сечений всех стержней) и варьирования площадей сечений (число этих параметров обычно велико) практически невозможно получить такое же рациональное решение для фермы, какое достигается с помощью расчета, изложенного в настоящей статье.

ТНИСГЭИ им. Винтера

Поступило 5.1.1963.

Կ. Մ. ԽՈՒԲԵՐՅԱՆ

(Հաղորդում 2)

# ՄՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՈՐՈՇԵԼԻ ՖԵՐՄԱՅԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՆՐԱ ԱՄԵՆԱԹԵԹԵԿ ՔԱՇԻՆ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԵԱՆՈՂ ՀԱՍՏԱԴՐԱԾ ՃԻԳԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Շ Մ

Ստատիկորեն անորոշելի ֆերմալում նրա տեսականորեն ամենաթեթեւ քաշին համապատասխանող հաստադրված ճիգերի դեպքում լարումների բաշխման խնդիրը, որը հանդիսանում է ստատիկորեն անորոշելի ամենաթեթեւ քաշի ֆերմայի վերաբերյալ խնդրի բաղկացուցիչ մասը, լուծված է երկու մասնավոր պայմանների համար՝ 1) ստատիկորեն միակի անորոշելի ֆերմայի հաշվարկի դեպքում ստատիկական բեռնավորման երկու բեռնվածքի ալն պայմանով, որ լուրաքանչլուր ձողում ճիգը երկու բեռնվածքից էլ ունենում է միեւնույն նշանը, 2) նույնանման ֆերմայի ստատիկական բեռնվածքով՝ համակերպված բաղմաթիվ ջերմային անհավասարաչափ ազդեցություններից լուրաքանչլուրի հետ հաշվարկի դեպքում, լատ որում ճիգերի նշանների պայմանը պահպանելով նույնը, ինչ որ նախորդ դեպքում է: