ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XVI, № 2—3, 1963 Серия технических наук

ГИДРОЛОГИЯ

Н. А. КАРТВЕЛИШВИЛИ

НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЧНОГО СТОКА

Разработка теории регулирования речного стока для энергетических и водохозяйственных целей не связана с методами построения вероятностных характеристик стока. Но результаты практических приложений этой теории целиком зависят от того, насколько надежно заданы эти характеристики, чем и определяется значение рассматриваемого здесь вопроса. Этот вопрос разработан очень слабо, что в значительной мере объясняется его исключительной трудностью. В данной статье, не претендующей на законченные результаты, рассматриваются некоторые возможные аспекты его решения.

1. Способы задания стока как вероятностного процесса

Процесс изменения естественных (незарегулированных) мгновенных расходов $Q(t)$ в данном створе реки есть вероятностный процесс с непрерывным временем [1, 2]. Этот процесс исчерпывающе задается одним из двух следующих способов.

1. Способ канонических разложений, основанный на том, что непрерывная случайная функция $Q(t)$ может быть разложена в ряд

$$Q(t) = \varphi_0(t) + X_1 \varphi_1(t) + X_2 \varphi_2(t) + \cdots, \qquad (1)$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ — неслучайные функции t, а $X_1, X_2, \cdots$ — некоррелированные случайные постоянные. Способ канонических разложений неудобен для построения теории регулирования речного стока по чисто практическим соображениям, но он представляет интерес в том отношении, что показывает несостоятельность поисков так называемых типовых гидрографов. Представление расхода $Q(t)$ типовым гидрографом, в виде $Q(t) = X\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ неслучайная функция, определяющая собою конфигурацию гидрографа, а X случайная постоянная, зависящая от водности года, возможно только в том случае, если в разложении (1) все слагаемые, кроме второго, пренебрежимо малы (точнее, если малы величины $M\,Xi \max|\varphi i(t)|$ при $i \neq 1$ причем $X_0 = 1$, а M — символ математического ожидания). Однако до настоящего времени не удалось найти ни одной реки, которая удовлетворяла бы этому условию.

2. Способ функций распределения вероятностей F_s, состоящей в задании последовательности этих функций $(s=1,2,\cdots)$ или соответствующих им плотностей распределения f_s,

$$F_s(t_1, x_1;\cdots t_s, x_s) = \int_0^{x_1} du_1 \cdots \int_0^{x_s} du_s f_s(t_1, u_1;\cdots t_s u_s) \tag{2}$$

или, наконец, функций

$$F_s^*(t_1, x_1;\cdots t_s, x_s) = \int_{x_1}^{\infty} du_1 \cdots \int_{x_s}^{\infty} du_s f_s(t_1, u_1;\cdots t_s, u_s). \tag{3}$$

Функция F_s есть вероятность события, состоящая в том, что мгновенный расход $Q=Q(t)$ в рассматриваемом створе удовлетворяет системе неравенств

$$Q(t_1) < x_1, \cdots Q(t_s) < x_s, \tag{4}$$

где $t_1, \cdots t_s$ — произвольные моменты времени, $x_1;\cdots x_s$ — произвольные неотрицательные числа.

Функция F_s^* есть вероятность осуществления неравенств

$$Q(t_1) > x_1, \cdots Q(t_s) > x_s \tag{5}$$

противоположных неравенствам (4).

В силу соотношения

$$F_{s-1}(t_1 x_1;\cdots t_{s-1}, x_{s-1}) = F_s(t_1, x_1;\cdots t_{s-1}, x_{s-1}; t_s \infty), \tag{6}$$

все F_s при $s<n$ определены, если дана функция F_n.

Если существует такое n, что и при $s>n$ все F_s также определяются через функцию F_n, то процесс полностью характеризуется заданием этой функции и называется марковским процессом, многозвенным при $n>2$ и однозвенным, простым или процессом без последствия при $n=2$. При $n \geqslant 2$ функция $Q(t)$ непрерывна, если же $n=1$ то эта функция разрывна, и процесс носит название процесса с независимыми приращениями.

В случае марковского процесса, для $s>n$ имеет место формула

$$F_s(t_1, x_1;\cdots t_s, x_s) =$$

$$= F_n(t_1, x_1;\cdots t_n, x_n) \prod_{k=n+1}^{s} \frac{F_n(t_{k-n+1}, x_{k-n+1};\cdots t_k x_k)}{F_{n-1}(t_{k-n+1}, x_{k-n+1};\cdots t_{k-1}, x_{k-1})},$$

которую нетрудно вывести из теоремы умножения вероятностей. Практически любой непрерывный случайный процесс, и в частности процесс стока, можно рассматривать как марковский, если брать достаточно большое число n.

2. Выражение функций распределения вероятностей характерных расходов и стоков через функции f_s

В связи с введением системы функций f_s, возникает вопрос, каковы соотношения между этими функциями и теми характеристиками речного стока, которыми обычно оперирует гидрология: функциями распределения годовых и сезонных объемов стока и функциями распределения максимальных расходов. Этот вопрос имеет как теоретическое, так и практическое значение.

Рассматривая его, необходимо, первым делом, обратить внимание на то, что функции распределения вероятностей или (что, в конечном счете, то же самое) кривые обеспеченности максимальных расходов, принятые в инженерной практике, не являются единственным возможным средством характеристики этих расходов. Практику интересует частота превышения фактическим расходом в реке заданного значения X, независимо от генетических причин превышения. В понятие частоты превышения может быть вложено несколько различных смыслов.

1. Под частотой превышения можно подразумевать среднее количество выбросов ψ_1 случайного процесса $Q(t)$ над уровнем X (г. е. количество пересечений кривой $Q(t)$ уровня X снизу вверх) в год.

2. За эту частоту можно принять величину $\psi_2 = \overline{\Theta}/T$, где $\overline{\Theta}$ — среднее значение суммарного времени Θ превышения функцией $Q(t)$ значения X за год T.

3. Частоту превышения можно определить как среднее за год число ψ_3 максимумов $Q(t)$, превышающих X.

4. Наконец, частоту превышения можно определить через вероятность P непревышения годовым значением $\max\max Q(t)$ величины X, т. е. $\psi_1 = 1 - P$.

Это последнее определение совпадает с тем понятием обеспеченности максимального расхода X, которое принято сейчас в инженерной практике. При этом обычно нормируется величина ψ_4 и по кривой обеспеченности годовых максимумов расхода находится величина X. Принципиально, конечно, совершенно безразлично, какую из величин ψ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) нормировать, т. е. какой из кривых $\psi_i = \psi_i(X)$ пользоваться. Но так как из данных наблюдений проще всего получить кривую $\psi_4 = \psi_4(X)$ и так как весь имеющийся опыт расчета максимальных расходов относится именно к этой кривой, отдавать предпочтение какой-либо из первых трех трактовок частоты превышения перед четвертой трактовкой практически нецелесообразно. Однако, как будет видно из дальнейшего, первые три трактовки могут оказаться полезным вспомогательным средством для контроля правильности построения функций F_s или f_s.

Связь величин ψ_i с системой функций f_s вскрывается теорией выбросов случайных процессов. Согласно этой теории [3]:

$$\psi_1 = \int_t^{t+T} d\tau \int_0^{\infty} x' \varphi_2 (\tau, X, x')\, dx', \tag{7}$$

где $\varphi_2 (t, x, x')$ — совместная плотность распределения $Q(t)$ и производной $Q'(t)$ в момент t. Эта плотность определяется по функции F_2 о чем речь будет ниже. При достаточно широких предположениях процесс стока является процессом гармонизуемым (предположение о гармонизуемости процесса неявно, но совершенно определенно, принимается во всех гидрологических расчетах). Тогда φ_2 периодически зависит от t с периодом T, и, следовательно, ψ_1 от t не зависит. Теория выбросов дает также формулу для дисперсии числа выбросов, но мы не будем ее здесь приводить, так как эта дисперсия не представляет особого интереса в рассматриваемом случае.

Величина ψ_2 определяется так [4]

$$\psi_2 = \frac{1}{T} \int_t^{s+T} [1 - F_1 (\tau, X)]\, d\tau = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F_1 (\tau, X)\, d\tau. \tag{8}$$

Заметим, что развиваемая в [4] теория дает возможность определить не только первый момент $\overline{\Theta} = \psi_2 T$ случайной величины Θ, но и все последующие моменты, а в [3] указывается литература, в которой дается полное построение функции распределения вероятностей Θ (эта работа вообще содержит довольно полную библиографию по выбросам случайных процессов).

Для ψ_3 имеем следующую формулу [3]:

$$\psi_3 = -\int_t^{t+T} d\tau \int_x^{\infty} dx \int_{-\infty}^{0} x'' \varphi_3 (\tau, x, 0, x'')\, dx'', \tag{9}$$

где $\varphi_3 (t, x, x', x'')$ — совместная плотность распределения $Q(t)$ и производных $Q'(t)$ и $Q''(t)$ в момент t.

Формулы (7), (8), (9) являются точными. Для ψ_4 точной формулы не получено. Идея приближенного решения дается в [3], здесь это решение приводится в более правильном виде. Пусть f_{s+1} плотность распределения F_{s+1}. Положим

$$t_i = t + i\ T/s,\ Q(t_i) = Q_i,$$

тогда $t_s = t + T$, и вероятность того, что при $i = k$ будет $Q_k > X$, а при всех остальных i величина Q_i не будет превосходить X, выразится так:

$$p_k = \int_0^x dx_0 \cdots \int_0^x dx_{k-1} \int_x^k dx_k \cdot \tag{10}$$

$$\int_0^x dx_{k+1} \cdots \int_0^x dx_s\, f_s (t_0, x_0; \cdots t_s, x_s).$$

Вероятность же того, что в какой-то один из моментов $t_0, \cdots t_s$ величина Q будет превосходить X, а в остальные моменты будет меньше X, представится суммой $p_0 + \cdots + ps$. Следовательно,

$$\psi_4 = \lim_{s \to \infty} \sum_{k=0}^{s} \int_0^x dx_0 \int_0^x dx_{k-1} \int_x^\infty dx_k \int_0^x dx_{k+1} \cdots \int_0^x dx_s f_s (t_0, x_0; \cdots t_s x_s). \tag{11}$$

Практически по этой формуле можно вычислить лишь приближенное значение ψ_4 как значение суммы, стоящей в правой части формулы при достаточно большом s.

Заметим, что ψ_2, ψ_3, ψ_4 не зависят от t по тем же самым причинам, что и ψ_1.

Определим функции φ_2 и φ_3 в формулах (7) и (9). Они выражаются через плотности распределения f_2 и f_3 соответственно. Введем вместо случайных величин $Q(t_1)$, $Q(t_2)$, $Q(t_3)$ следующие:

$$Q = Q(t_1), \quad Q' = \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1},$$

$$Q'' = \frac{\dfrac{Q(t_3) - Q(t_2)}{t_3 - t_2} - \dfrac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}}{t_3 - t_1}.$$

Обратное преобразование выглядит так

$$Q(t_1) = Q, \quad Q(t_2) = Q + (t_2 - t_1)\, Q',$$

$$Q(t_3) = Q + (t_3 - t_1)\, Q' + (t_3 - t_2)(t_3 - t_1)\, Q''$$

и имеет якобиан $(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)$.

Следовательно, плотность φ_3 будет

$$\varphi_3 (t, x, x', x'') = \lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_2 \to t}} (t_3 - t)(t_3 - t_1)(t - t_1) \cdot$$

$$\cdot f_3 \{t_1, x; t, x + (t - t_1)\, x'; x + (t_3 - t_1)\, x' + (t_3 - t_1)(t_3 - t) x''\}. \tag{12}$$

Совершенно аналогично

$$\varphi_2 (t' x, x') = \lim_{t_1 \to t} (t - t_1) f_2 \{t_1, x; t, x + (t - t_1)\, x'\}. \tag{13}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда функция f_n определяется на основании гипотезы, предложенной в [1, 2]. Если известно одномерное распределение вероятностей $Q(t)$, т. е. функция $f_1(t, x)$ или $F_1(t, x)$, то всегда можно построить такую функцию $\xi = \xi\{Q(t)\}$ или, иными словами $u = u(t, x)$, одномерное распределение которой будет нормальным и нормированным (рис. 1), и постулировать, что n-мерное распределение ξ, т. е. вероятность

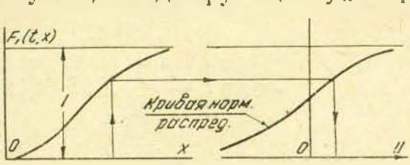

Рис. 1.

$$\Phi_n \{t_1\ u_1;\ \cdots t_n,\ u_n\}$$

осуществления неравенств

$$\xi \{Q(t_1)\} < u_1, \cdots \xi \{Q(t_n)\} < u_n$$

также выражается формулой нормального закона. Это значит, что

$$f_n(t_1,\ x_1; \cdots t_n,\ x_n) = \frac{\exp(S/2D)}{\sqrt{2^n \pi^n D}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial u(t_i,\ x_i)}{\partial x_i}. \tag{14}$$

Здесь S — определитель матрицы

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & \rho(t_1,\ t_2) & \rho(t_1,\ t_n) & u(t_1,\ x_1) \\ \rho(t_2,\ t_1) & 1 & \rho(t_2,\ t_n) & u(t_2,\ x_2) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \rho(t_n,\ t_1) & \rho(t_n,\ t_2) & 1 & u(t_n,\ x_n) \\ u(t_1,\ x_1) & u(t_2,\ x_2) & u(t_n,\ x_n) & 0 \end{array} \right\| \tag{15}$$

а D — определитель корреляционной матрицы, получающейся из (15) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Элементы $\rho(t_i,\ t_k)$ матрицы (15) могут рассматриваться либо как значения $\rho_Q(t_i,\ t_k)$ корреляционной функции для процесса $Q(t)$, либо как значения $\rho_\xi(t_i,\ t_k)$ корреляционной функции для процесса $\xi\{Q(t)\}$. Каких-либо теоретических соображений в пользу той или иной из трех трактовок привести нельзя, практически же разница между ρ_Q и ρ_ξ обычно достаточно мала. Поэтому предпочтительнее первая трактовка, как более простая.

Осуществляя предельный переход в формулах (12), (13) и им подобных, нужно иметь в виду, что

$$\lim_{t_1 \to t} \rho(t_1,\ t) = 1,\ \lim_{t_1 \to t} \frac{\partial}{\partial t_1} \rho(t_1,\ t) = 0,$$

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(t_1,\ t) = \rho''(t) < 0.$$

Учитывая это, получим, например, для φ_2

$$\varphi_2(t,\ x,\ x') = \left[\frac{\partial u(t,\ x)/\partial x}{2\pi \sqrt{-\rho''(t)}}\right]^2 \cdot \tag{16}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u^2(t,\ x) - \frac{(\partial u/\partial t + x,\ \partial u/\partial x)^2}{\rho''(t)}\right]\right\}.$$

Выражение функций распределения вероятностей годовых и сезонных объемов стока через функции F_s, F_s^* или f_s сопряжено с известными трудностями. Однако выражения для моментов этих функций получаются очень просто. Обозначим через $W(X)$ ту часть объема стока за некоторое время T (не обязательно равное одному году), которая образована превышениями расхода над величиной X

(рис. 2). Прием вычисления моментов $W(X)$, предложенный в [4] для $s=1, 2$, автоматически распространяется на любые s. что дает:

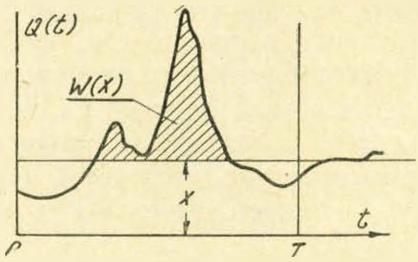

Рис. 2.

$$\overline{W^s(X)} = \int_x^\infty dx_1 \cdots \int_x^\infty dx_s \int_t^{t+T} dt_1 \cdots \int_t^{t+T} dt_3 \, F_s^* (t_1, x_1, \cdots t_s, x_s). \quad (17)$$

Если положить здесь $X=0$, то мы получим моменты распределения полных объемов стока за время T.

3. О построении функции f_n

С точки зрения теории регулирования речного стока водохранилищами, главная задача гидрологии состоит в определении числа n и построении функции f_n или F_n, которая является единственной и исчерпывающей характеристикой притока к водохранилищу. Гидрометрические наблюдения никогда не бывают настолько репрезентативны, чтобы функцию f_n можно было построить непосредственно на их основе.

Решение этой задачи требует сочетания статистических и генетических методов, иначе говоря — построения некоторой модели процесса стока, наличие которой позволило бы нащупать структуру функции f_n с тем, чтобы из гидрометрических данных определялись лишь численные значения параметров этой функции. Однако, исследования в этом направлении сейчас находятся в самом зачаточном состоянии, и говорить о каких-либо моделях процесса еще очень рано. В данное время можно исходить не из моделей процесса стока, а лишь из тех или иных гипотез о структуре функций f_n. Одна из возможных гипотез такого рода, которую мы и будем иметь в виду, дается формулой (13).

Для построения функции f_n согласно этой гипотезе, нужно прежде всего построить функцию $f_1(t, x)$ или $F_1(t, x)$ т. е. функцию распределения вероятностей расходов $Q(t)$ в момент времени t. Практически за эти расходы можно принять расходы на определенные календарные даты. Исключение здесь составляют лишь горные ручьи ледникового питания, расход которых в летнее время резко колеблется в пределах суток. Однако, эмпирические кривые распределения

вероятностей расходов на определенные календарные даты обнаруживают очень резкие изломы, свидетельствующие, конечно, не об истинной природе этих кривых, которые по своей физической природе должны быть достаточно гладкими, а лишь о том, что репрезентативность имеющихся в нашем распоряжении гидрометрических данных недостаточна не только для построения функции F_n, но и для построения функции F_1. Выход из этого положения заключается в том, чтобы перейти от рассмотрения мгновенных расходов $Q(t)$ к рассмотрению скользящих средних за некоторый интервал τ

$$\overline{Q}(t)=\frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} Q(\tau_1)\,d\tau_1 . \qquad (18)$$

Этот интервал может быть взят порядка декады — месяца, в зависимости от характера реки и размеров водохранилища. Такой переход означает игнорирование флюктуациями мгновенных расходов вокруг скользящих средних значений. Он равносилен предположению, что

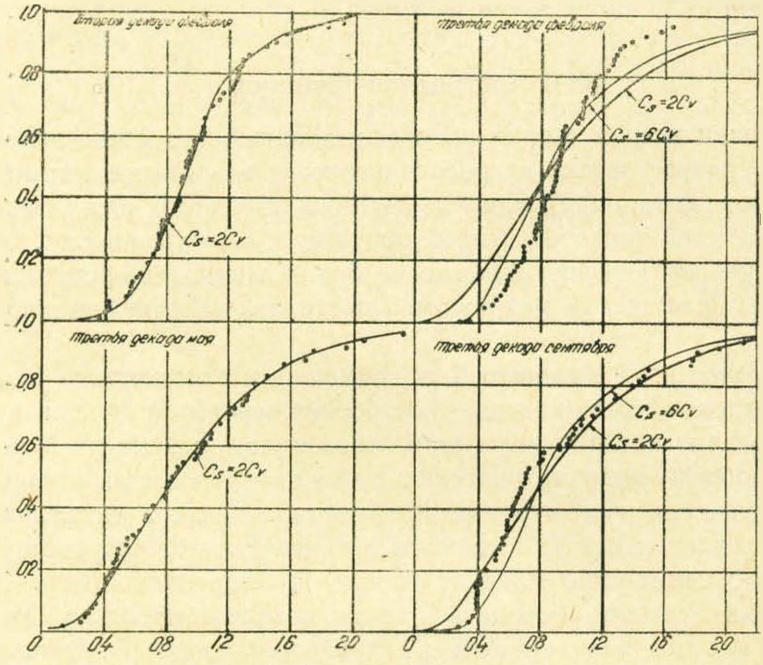

Рис. 3.

такие флюктуации не сказываются сколько-нибудь заметно на наполнении водохранилища. Это правильно для водохранилищ сезонного и более высокого регулирования, если, конечно, речь не идет о расчете водосливного фронта плотины на максимальный расход. Для таких расчетов нет необходимости строить функции F_n.

Следующий вопрос, который здесь возникает, состоит в подборе аналитического выражения для функции распределения вероятностей F_1 или ее плотности f_1. На рис. 3 даются эмпирические функции рас-

пределения среднедекадных расходов реки Камы у Перми (незарегулированных) для некоторых значений t и кривые Крицкого и Менкеля [5], при этом расходы отнесены к своим математическим ожиданиям. Из рис. 3 видно, что в некоторых случаях (вторая декада февраля и третья декада мая) кривая Крицкого и Менкеля при $C_s = 2\ C_v$ (в этом случае она вырождается в кривую Пирсона III типа) удовлетворительно передает эмпирическую функцию распределения, в других же случаях (третья декада февраля и первая декада сентября) изменение C_s в пределах от $2\ C_v$ до $6\ C_v$ не приводит к хорошему совпадению кривой с эмпирическими точками. Такая же картина имеет место при использовании других кривых, например, кривых Бровковича; для некоторых декад получается хорошее совпадение с опытными точками, для других же никакая вариация параметров не приводит к удовлетворительным результатам. Между тем, необходимо подобрать единое выражение, пригодное для всех t, с тем, чтобы можно было построить кривые зависимости параметров этого выражения от t (если для разных t выражения f_1 будут разными, такого построения, естественно, сделать нельзя). Выражением удовлетворяющим этому требованию (за счет выбора числа k) может быть, например, обобщенный логарифмически — нормальный закон

$$f_1(t, x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\ln x + a_3 \ln^3 x + \cdots + a_{2k-1} \ln^{2k-1} x\right)\right\}, \quad (19)$$

где C, $a_3, \cdots a_{2k-1}$ — функции t, причем C определяется из условия

$$\int_0^\infty f_1(t, x)\, dx = 1 .$$

При $k > 2$ число параметров в этой формуле превышает число моментов распределения, которые могут быть достоверно определены из гидрометрического ряда. Но это не должно служить препятствием к применению формулы (19), на которую нужно смотреть только как на средство аналитического выражения эмпирической функции распределения. Поэтому параметры ее можно определять не по моментам, а по эмпирическим точкам, например, способом наименьших квадратов.

Построение корреляционной функции $\rho(t_1, t_2)$ выполняется обычным путем, а также по скользящим средним. На рис. 4 даны графики корреляционной функции реки Волги у Ярославля (для незарегулированных расходов, t_2 — момент, в который корреляционная функция равна единице). Эти графики показывают, что с увеличением $|t_2 - t_1|$ корреляционная функция быстро падает до значений, меньших по абсолютной величине, чем 0,2—0,3, т. е. до значений, при которых вычисление этой функции становится мало достоверным. Доверять графикам корреляционной функции в этой зоне нельзя, и на основании рис. 4 можно утверждать лишь то, что в пределах реально достижимой точности расчетов корелляцию следует считать достоверной лишь

в достаточно узком интервале $2|t_2 - t_1|$. Это дает некоторые основания ожидать, что рассматриваемый процесс характеризуется малым значением числа n.

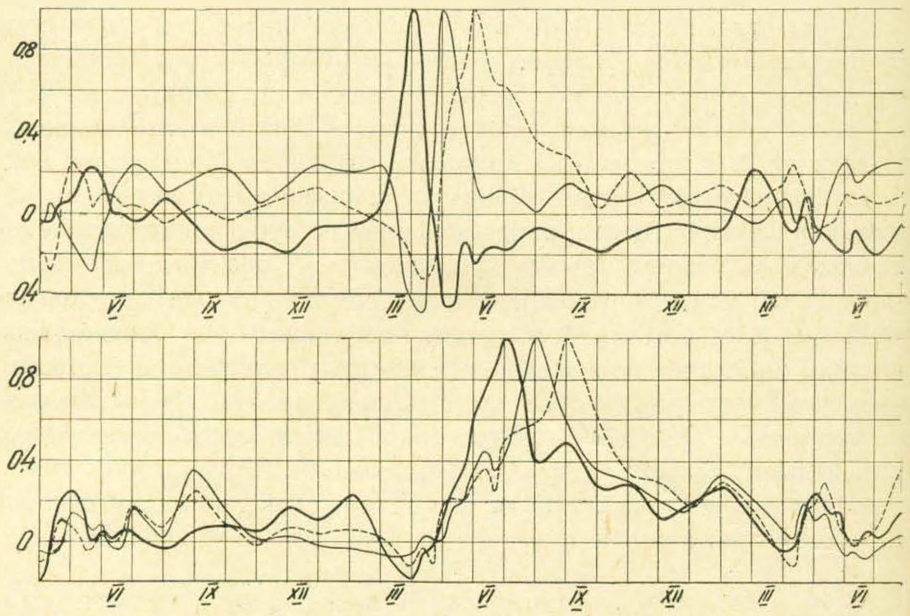

Рис. 4.

Вопрос о проверке правильности принятого значения n и правильности построения функции f_n почти не разработан. Однако здесь можно все же указать на некоторые возможности.

Рассмотрим сначала случай $n=2$, т. е. простой марковский процесс. Его характеризуют обычно не функцией f_2, а так называемой функцией перехода

$$F(t_1\, x_1/t_2\, x_2) = \frac{1}{f_1(t_2 x_2)} \int_0^{x_1} f_2(t_1, y; t_2, x_2)\, dy, \qquad (20)$$

значения которой суть вероятности осуществления события $Q(t_1) < x_1$ при условии, что осуществилось событие $Q(t_2) = x_2$. Соответствующая условная плотность распределения будет ($t_1 = \tau$, $x_1 = y$, $t_2 = t$, $x_2 = x$):

$$f(\tau, y/t, x) = \frac{f_2(\tau, y/t, x)}{f_1(t, x)}. \qquad (21)$$

В выражении (21) никаких ограничений на t и τ не накладывается, т. е. $t \gtrless \tau$. Известно, что не всякая функция четырех переменных, подчиненная ограничениям, накладываемым на любую функцию распределения вообще, может быть функцией перехода: плотность распределения функции перехода должна, как известно, удовлетворять уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\tau, y/t, x) + a(t, x) \frac{\partial}{\partial x} f(\tau, y/t, x) +$$

$$+ b(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\tau, y/t, x) = 0; \qquad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau, y/t, x) + \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y) f(\tau, y/t, x)] -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y) f(\tau, y/t, x)] = 0, \qquad (23)$$

где $a(t, x)$, $b(t, x)$ — некоторые функции, в рассматриваемом случае — неизвестные.

Перепишем уравнение (23), переменив в нем местами τ и t, y и x:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x/\tau, y) + \frac{\partial}{\partial x} [a(t, x) f(t, x/\tau, y)] -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(t, x) f(t, x/\tau, y)] = 0. \qquad (24)$$

Исключим в $b(t, x)$ из (22) и (24) и в получившееся уравнение подставим f, определенное из уравнений (14) и (21). Результат L этой подстановки не будет тождественным нулем, так как это значение f не есть точное решение уравнений (22) и (24). Если считать функцию f_1, которая достаточно достоверно строится по данным наблюдений, заданной, то

$$L = L[\tau, y, t, x, \rho(t, \tau), \rho_t(t, \tau), a(t, x), a_x(t, x), a_{xx}(t, x)],$$

где индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным. Наилучшее, в смысле способа наименьших квадратов, приближение f к решению уравнений (22) и (24) будет при таком выборе корреляционной функции $\rho(t, \tau) = \rho(\tau, t)$, когда ρ и $a(t, x)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty L^2 \, dt \, d\tau \, dx \, dy = \min.$$

Это приводит к системе двух интегро-дифференциальных уравнений для определения $\rho(t, \tau)$ и $a(t, x)$. Сопоставляя $\rho(t, \tau)$, полученное из решения этих уравнений, с построенным по гидрометрическим данным, можно судить о том, насколько правильно построена плотность перехода f.

Однако этот путь исключительно сложен, прежде всего в вычислительном отношении и практически не обобщается на случай $n > 2$.

Второй путь, пригодный при любом n, состоит в следующем. Имея функцию F_n и построив функцию перехода

$$F(t_1, x_1/t_2, x_2, \ldots t_n, x_n),$$

можно по этой функции найти, методом Монте-Карло, некоторую реализацию случайного процесса сколь угодно большой длительности, по которой функция F_n может быть построена уже непосредственно. Если это построение приведет к функции F_n достаточно близкой к первоначальной, то это будет означать, что число n и функция F_n взяты правильно.

Наконец, проверка правильности выбора n и построения функции F_n может быть выполнена по формулам § 2. Функции ψ_1, (X), ψ_2 (X), ψ_3 (X) могут быть построены непосредственно (но в данном случае для этого надо брать гидрограф не мгновенных, а скользящих средних расходов) и сопоставлены с тем, что дает вычисление этих функций по функции f_n. Такие же расчеты могут быть произведены и по формуле (17).

Ն. Ա. ՔԱՐԹՎԵԼԻՇՎԻԼԻ

ԳԵՏԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՅԻՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԸ

Ամփոփում

Էներգետիկական և ջրատնտեսական նպատակներով գետային հոսքի կանոնավորման տեսության մշակումը կապված չէ հոսքի հավանականային բնութագրերի կառուցման մեթոդների հետ։ Սակայն տեսության գործնական կիրառման արդյունքները ամբողջապես կախված են նրանից, թե որքանով են հուսալի տրված բնութագրերը, որով և որոշվում է այստեղ դիտվող հարցի նշանակության կարևորությունը։

Հիշյալ հարցը խորը չի մշակված, որը պայմանավորվում է նրա բացառիկ դժվարությամբ։ Սույն հոդվածում, որը չի հավակնում վերջնական արդյունքի, դիտվում են հարցի լուծման մի քանի հնարավոր ասպեկտներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Картвелишвили Н. А.* О математическом описании и методике расчетов регулирования речного стока. Известия АН СССР, ОТН, 1956, № 1.
2. *Картвелишвили Н. А.* Гидрологические основы вероятностной теории режимов энергосистем с гидростанциями. Тр. ВНИИЭ, т. 13, 1961.
3. *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов. Успехи физических наук, т. 77, вып. 3, 1962.
4. *Линник Ю. В., Хусу А. П.* Математическое описание неровностей профиля поверхности при шлифовании. Инженерный сборник, т. 20, 1954.
4. *Крицкий С. Н., Менкель М. Ф.* Гидрологические основы речной гидротехники. Изд. АН СССР, 1950.