

ГИДРАВЛИКА

И. Г. КРИСТОСТУРЯН

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ УЧАСТКЕ КАНАЛА ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ

Исследование неустановившегося движения в открытых руслах, в частности добегаания волны попуска в каналах с расширяющимся или с сужающимся участком, приводит к решению системы двух дифференциальных уравнений, первое из которых характеризует неустановившееся плавно-изменяющееся движение, а второе — уравнение неразрывности. Свободная поверхность при установившемся неравномерном движении, т. е. $\eta = h(x, y)$ является начальным условием при решении задачи неустановившегося движения. Вид этой функции обычно определяется экспериментально. Изменение глубины с течением времени в начальном створе $h = h(t)$ будет граничным условием.

В статье делается попытка определить вид функции $\eta = h(x, y)$ аналитически.

Постановка задачи

Определение вида свободной поверхности при установившемся движении теоретическим путем, приводит к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = ig - \frac{1}{\rho} + \nu \Delta U - 2k \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{F}{B} \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{F}{B} U \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{F}{B} U \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]; \\
 2. \quad & U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V - \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{F}{B} U \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] - \\
 & - 2k \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{F}{B} U \frac{\partial V}{\partial y} \right] - \frac{\partial y}{\partial z} \left[k \frac{F}{B} U \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]; \\
 3. \quad & U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta W - \frac{\partial}{\partial x} \left[kU \frac{F}{B} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[kU \frac{F}{B} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[kU \frac{F}{B} \frac{\partial W}{\partial z} \right];
 \end{aligned}$$

$$4. \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

При выводе этой системы использовано предположение

$$\overline{U_i U_j} = k \frac{F}{B} U \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right),$$

где $\overline{U_i U_j}$ — пульсационные напряжения;

$k \frac{F}{B} \equiv A$ — коэффициент, который по известной гипотезе Буссинеска

берется пропорциональным скорости U ; $k = \frac{g}{MG}$ коэффициент Буссинеска имеющий размерность C ; C — коэффициент Шези.

Задача решается для каналов трапециoidalного поперечного сечения при следующих граничных условиях:

$$1. \quad P = 0, \text{ при } z = \eta(x, y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ искомая свободная поверхность;

$$2. \quad U = V = W = 0 \text{ на стенках канала, при } z = m(y - b/2),$$

где m — коэффициент откосов канала,

$b = b_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha$ — ширина канала по дну;

$$3. \quad U = V = W = 0 \text{ на дне, при } z = 0;$$

$$4. \quad W = U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ при } z = \eta(x, y),$$

где U, V, W продольная, поперечно-горизонтальная, и поперечно-но-вертикальная составляющие скорости.

5. $\eta(x, y) = h_0 = \operatorname{const}$ при $x = 0$, где $x = 0$ сечение, где начинается расширяющаяся часть канала; h_0 — глубина потока в этом сечении, величина которой может быть определена с помощью формул неравномерного движения (расчет кривой спада).

Метод решения

Задача решается методом малого параметра. Малым параметром является тангенс половины угла расширения канала

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma.$$

Исходя из конкретных данных модели положено, что H/b и b/L имеют порядок σ . С учетом принятых обозначений и оценки всех членов входящих в уравнения, рассмотренная система дифференциальных уравнений приводится к виду

$$1. \quad \sigma^2 \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{i}{F_r} - \frac{\sigma^2}{F_r} \frac{\partial P}{\partial x} - \sigma^2 k \frac{\partial}{\partial y} \left[U \frac{F}{B} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{F}{B} U \frac{\partial U}{\partial z} \right];$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \sigma^2 \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \frac{1}{F_r} \frac{\partial P}{\partial y} - \sigma^2 k \frac{\partial}{\partial x} \left[U \frac{F}{B} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \\
 & - k \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[U \frac{F}{B} \frac{\partial V}{\partial y} \right] - k \frac{\partial}{\partial z} \left[U \frac{F}{B} \frac{\partial V}{\partial z} \right] - k \sigma^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{F}{B} U \frac{\partial W}{\partial y} \right]; \\
 3. \quad & 0 = - \frac{1}{F_r} - \frac{1}{F_r} \frac{\partial P}{\partial z} - k \sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{F}{B} U \frac{\partial U}{\partial z} \right] - k \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{F}{B} U \frac{\partial V}{\partial z} \right] - \\
 & - 2 \sigma^2 k \frac{\partial}{\partial z} \left[U \frac{F}{B} \frac{\partial W}{\partial z} \right]; \\
 4. \quad & \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

В приведенных уравнениях:

$F_r = \frac{U_{cp}^2}{gH}$ (U_{cp} — средняя скорость до расширения канала); члены имеющие порядок выше σ^2 отброшены.

Решение системы уравнений ищется в виде рядов по степеням малого параметра σ .

$$\begin{aligned}
 P &= P_0 + \sigma P_1 + \sigma^2 P_2 + \dots; \\
 U &= U_0 + \sigma U_1 + \dots; \\
 V &= V_0 + \sigma V_1 + \dots; \\
 W &= W_0 + \sigma W_1 + \dots; \\
 \eta &= \eta_0 + \sigma \eta_1 + \dots
 \end{aligned}$$

Подставляя значения P , U , V , W и η в систему полученных уравнений, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях σ в правых и левых частях каждого уравнения, получим систему дифференциальных уравнений, позволяющую определить значения U_0 , V_0 , W_0 , P_0 , U_1 , V_1 , W_1 и т. д.

Так, например, для нулевого приближения получится следующая система:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{i}{F_r} = k \left(\frac{F}{B} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[U_0 \frac{\partial U_0}{\partial z} \right]; \\
 2. \quad & \frac{1}{F_r} \frac{\partial P_0}{\partial y} = - k \left(\frac{F}{B} \right)_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[U_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} \right]; \quad (1) \\
 3. \quad & 0 = - \frac{1}{F_r} - \frac{1}{F_r} \frac{\partial P_0}{\partial z}; \\
 4. \quad & \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

Согласно граничному условию (1) $P = 0$ при $z = \tau_1(x, y)$ или $P_0 + \sigma P_1 + \dots = 0$ при $z = \tau_0 + \sigma \tau_1 + \dots$

Разлагая P в ряд Тейлора вблизи η_0

$$P = P(\eta_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=\eta_0} (z - \eta_0) + \dots$$

и учитывая, что на свободной поверхности

$$z - \eta_0 = \sigma\eta_{11} + \sigma^2\eta_{12} + \dots$$

получим

$$P = P(\eta_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=\eta_0} (\sigma\eta_{11} + \dots) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)_{z=\eta_0} (\sigma\eta_{11} + \dots)^2 + \dots$$

или

$$P(\eta_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=\eta_0} (\sigma\eta_{11} + \dots) + \dots + \sigma \left\{ P_1(\eta_0) + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)_{z=\eta_0} (\sigma\eta_{11} + \dots) + \dots \right\} + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю сумму коэффициентов при нулевой степени получим первое граничное условие в нулевом приближении

$$P_0 = 0 \text{ при } z = \eta_0.$$

В первом приближении будем иметь:

$$P_1 + \frac{\partial P_0}{\partial z} \eta_{11} = 0 \text{ при } z = \eta_0.$$

Аналогично граничное условие (4), в нулевом приближении, имеет вид:

$$W_0 = \frac{\partial \eta_0}{\partial x} U_0 + \frac{\partial \eta_0}{\partial y} V_0 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, соответствующие нулевому приближению граничные условия выразятся так:

1. $P_0 = 0$ при $z = \eta_0$;
2. $U_0 = V_0 = W_0 = 0$ при $z = m(y - b/2)$,
3. $U_0 = V_0 = W_0$ при $z = 0$;
4. $W_0 = U_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial y}$ при $z = \eta_0$;
5. $\eta_0 = h_y$ при $x = 0$.

Без особого ущерба для точности решения можно положить, что $\sigma\eta_{11} = \sigma^2\eta_{12} = \dots = 0$ при $x = 0$.

Решение задачи

Решением системы (1) будут выражения для трех составляющих скоростей и давления в нулевом приближении

$$U_0 = \sqrt{\frac{i}{kF_r \left(\frac{F}{B}\right)_0} [z^2 - m z (y - b/2)]};$$

$$V_0 = - \frac{\partial(\tau_0 - z)}{\partial y} \frac{U_0}{i};$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{i}{kF_r \left(\frac{F}{B}\right)_0} \left\{ \left[\frac{1}{2 \left(\frac{F}{B}\right)_0} \frac{\partial \left(\frac{F}{B}\right)_0}{\partial x} - \frac{\partial^2(\tau_0 - z)}{\partial y^2} - \frac{1}{2 \left(\frac{F}{B}\right)_0} \frac{\partial \left(\frac{F}{B}\right)_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\tau_0 - z)}{\partial y} \right] \cdot \frac{2z - m(y - b/2)}{4} + \frac{m}{2} \frac{\partial(\tau_0 - z)}{\partial y} - \frac{m \operatorname{tg}^2 \alpha}{2} \right\} \cdot \sqrt{z^2 - m z (y - b/2)},$$

$$P_0 = \tau_0 - z.$$

Граничные условия 4 и 5, которые не были использованы при определении значения скоростей и давления, используются для определения неизвестной τ_0 . Действительно, подставив в граничное условие 4 найденные значения U_0, V_0, W_0 , получим дифференциальное уравнение относительно τ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F/B)}{\partial x} \sqrt{\frac{i}{kF_r \left(\frac{F}{B}\right)_0} \frac{1}{2 \left(\frac{F}{B}\right)_0} \frac{2\tau_0 - m \operatorname{tg} \alpha (y - b/2)}{4}} = \\ = \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \sqrt{\frac{i}{kF_r \left(\frac{F}{B}\right)_0}} + \frac{m \operatorname{tg}^2 \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Отношение $\left(\frac{F}{B}\right)_0$ выразится через τ_0 следующим образом:

$$\left(\frac{F}{B}\right)_0 = \frac{\tau_0}{2} \left[\frac{2 + \frac{2\tau_0}{m(b_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)}}{1 + \frac{2\tau_0}{m(b_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)}} \right].$$

Подставляя это выражение в последнее дифференциальное уравнение получим

$$A(x, y) \frac{\partial \tau_0}{\partial x} = \frac{q^2 \operatorname{tg} \alpha}{(1 + q)(2 + q)\tau_0} \frac{2\tau_0 - \operatorname{tg} \alpha (y - b/2) m}{4} + m \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

где

$$q = \frac{2 \tau_0}{m (b_0 + 2x \operatorname{tg} \alpha)} ;$$

$$A(x, y) = \frac{2 + 2q + q^2}{\tau_0 (1 + q) (2 + q)} \frac{2 \tau_0 - m \operatorname{tg} \alpha (y - b/2)}{4} - 2.$$

Это квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое решается методом конечных разностей. Здесь производная по x заменяется отношением конечных разностей следующим образом:

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial x} = \frac{\tau_0^{i+1, j} - \tau_0^{i, j}}{l},$$

где l — величина шага по оси x .

Для нахождения значения скоростей U_1, V_1, W_1 и давления P_1 в первом приближении получается следующая система уравнений

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{F}{B} \right)_0 \frac{\partial (U_0 U_1)}{\partial z} + \left(\frac{F}{B} \right)_1 \frac{1}{2} \frac{\partial U_0^2}{\partial z} \right] = 0;$$

$$2. \quad 0 = -\frac{1}{F_2} \frac{\partial P_1}{\partial y} - k \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{F}{B} \right)_1 U_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} + \left(\frac{F}{B} \right)_0 \left[U_0 \frac{\partial V_1}{\partial z} + U_1 \frac{\partial V_0}{\partial z} \right] \right];$$

$$3. \quad 0 = -\frac{1}{F_r} \frac{\partial P_1}{\partial z};$$

$$4. \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0.$$

В этом случае граничные условия описываются следующим образом

$$1. \quad P_1 + \frac{\partial P_0}{\partial z} \tau_{11} = 0 \quad \text{при } z = \tau_0;$$

$$2. \quad U_1 = V_1 = 0 \quad \text{при } z = m(y - b/2);$$

$$3. \quad U_1 = V_1 = W_1 = 0 \quad \text{при } z = 0;$$

$$4. \quad \frac{\partial W_0}{\partial z} \tau_{11} + W_1 = U_0 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial z} \tau_{11} \frac{\partial \tau_0}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial z} \tau_{11} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial y} + U_1 \frac{\partial \tau_{10}}{\partial x} + V_1 \frac{\partial \tau_{10}}{\partial y} \quad \text{при } z = 0;$$

$$5. \quad \tau_{11} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

С учетом первых двух приближений выражения для составляющих скоростей U и V после перехода к размерным величинам будут иметь вид:

$$U = \sqrt{\frac{ig}{kh_0}} \left\{ 1 - \frac{\eta_1}{h_0} \frac{2 + 2q + q^2}{2(1+q)(2+q)} \right\} \left[\frac{2(1+q)}{2+q} \right]^{1/2} \sqrt{z^2 - zm(y - b/2)}$$

$$V = \sqrt{\frac{g}{ikh_0}} \left\{ \frac{\partial(\eta_0 - z)}{\partial y} \left[-1 + \frac{\eta_1(2 + 2q + q^2)}{2h_0(2+q)(1+q)} \right] - \frac{\partial\eta_1}{\partial y} \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{2(1+q)}{2+q} \right]^{1/2} \sqrt{z^2 - zm(y - b/2)}$$

Ниже приводится пример расчета прямолинейного канала с расширяющимся участком длиной 1 м. Уклон дна канала $i = 0,002$; $n = 0,010$ м; ширина канала по дну до расширения $b_0 = 0,30$ м; коэффициент откосов канала $m = 1$; расход воды $Q = 12$ л/сек; угол расширения канала $\alpha = 17^\circ$; глубина $h_0 = 0,047$ м.

Результаты расчета глубин с точностью нулевого приближения приведены на графике рис. 1. Там же нанесены экспериментальные

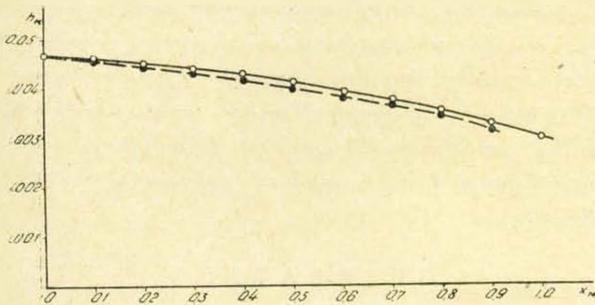


Рис. 1. Вид свободной поверхности на расширяющемся участке канала.

точки. Как видно из графика нулевое приближение уже удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Максимальное отклонение расчетных точек от опытных составляет примерно 4%. В большинстве случаев можно ограничиться нулевым приближением. Однако, для уточнения результатов расчета можно воспользоваться следующим приближением. Кроме глубин вычислены также значения продольной составляющей скорости U в сечениях $x = 0,2$ м и $x = 1,0$ м. Площадь поперечного сечения в створе $x = 1,0$ равна $F = 0,0149$ м²; средняя скорость $u_{ср} = 0,786$ м/сек. Исходя из этих данных получаем $Q = 11,7$ л/сек.

В створе $x = 0,2$ м имеем $u_{ср} = 0,63$ м/сек; $F = 0,018$ м²; $Q = 11,3$ л/сек.

Помимо определения вида свободной поверхности при установившемся движении, полученные формулы дают возможность изучить также изменение скоростей.

Ի. Գ. ՔՐԻՍՏՈՍՏՈՒՐՅԱՆ

ԱԶԱՏ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵՎ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳԱՇՏԻ ՍՏԱՅՈՒՄԸ,
ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ ՇԱՐԺՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ, ՋՐԱՏԱՐԻ ԼԱՅՆԱՅՆՈՂ ՄԱՍՈՒՄ
ԱՆԱԿՏԻԿՈՐԵՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Չհաստատված շարժման ուսումնասիրությունը բայց ջրատարներում, մասնավորապես թողքի ալիքի տարածումը ջրատարի լայնացող կամ նեղացող մասերում, բերվում է պիֆերենցիալ հավասարումների մի սխեմի լուծման, որի ստաջին հավասարումը բնութագրում է չհաստատված դանդաղ փոփոխվող շարժում, իսկ երկրորդը անխզկլիություն հավասարումն է:

Ուսումնասիրվում է ուղղաձիգ ջրատար, սեղանաձև կտրվածքով 20 մետր երկարությամբ, ալը ջրատարը մեջակողում՝ 10 մետրի վրա ճյուղավորվում է: Նախքան ճյուղավորումը, ջրատարն ունի լայնացող մաս 2 մետր երկարությամբ: Այստեղ մակերևույթի տեսքը հաստատված շարժման ժամանակ, այսինքն $h = h(x, y)$, պայման է հանդիսանում սկզբնական չհաստատված շարժման խնդրի լուծման համար: Այլ կորի տեսքը սովորաբար դանդաղ է փորձնական ճանապարհով: Ստորևից փոփոխությունը բոլոր ժամանակի սկզբնական կտրվածքում՝ $h = h(t)$ սահմանափակ պայման է հանդիսանում:

Տվյալ աշխատանքում փորձ է արվում ստանալ $h = h(x, y)$ ֆունկցիայի տեսքը տեսականորեն:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II, М., 1950.
2. Рахшмайер Р. Д. Разностные методы решения кривых задач, М., 1960.
3. Стокер Дж. Дж. Волны на воде, 1959.
4. Сухомел Г. И. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений, Киев, 1949.