

ГИДРАВЛИКА

Э. Т. ДЖРБАШЯН

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ
ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Изучение движения тяжелых частиц в турбулентном потоке является существенным при рассмотрении транспортирующей способности наносонесущего потока, ибо суммарное взаимодействие между твердыми частицами и жидкостью в основном обуславливается относительной скоростью между ними. При построении теории движения наносонесущих потоков, различные авторы по-разному подходят к решению этой сложной проблемы. Одни из них принимают продольные составляющие скорости частиц и потока одинаковыми, а вертикальные составляющие скорости отличающимся лишь на величину гидравлической крупности твердых частиц (М. А. Великанов, Г. И. Баренблатт). Тем самым силы сопротивления и работу взвешивания они относят только к части гидравлической крупности частиц в вертикальном направлении. Другие авторы (Ф. И. Франкль, В. Г. Саноян, А. К. Ананян и Г. С. Телетов), рассматривают наносонесущий поток как движение двух непрерывных сред.

Ряд исследователей изучает движение твердых частиц в турбулентном потоке, как движение дискретных тел. И поскольку в вопросах группового движения твердых частиц, даже в неподвижной среде, пока не все исследовано, то в некоторых случаях задача об относительной скорости твердых частиц и жидкости в качестве первого приближения упрощается и сводится к рассмотрению движения одиночной частицы в турбулентном потоке [1—6].

В работе [1], по-видимому впервые получены выражения относительных скоростей твердых частиц и жидкости для мелких наносов, с радиусом $r=10^{-4} \div 10^{-2}$ см при линейном и нелинейном законах сопротивления. Процесс описанный в работе [1] скорее граничит с диффузией. Для случая нелинейного закона сопротивления в работе [1] применен анализ размерностей. Рассматривался также случай с синусоидальным законом изменения относительной скорости. В работе [2] выведены общие уравнения движения тяжелой частицы в турбулентном потоке при линейном и квадратичном законах сопротивле-

ния. Методом операционного исчисления дается решение этих уравнений, заранее принимая для турбулентных пульсаций их периодичность.

В частности, векторное уравнение движения тяжелой частицы для квадратичного закона сопротивления имеет вид:

$$(\rho_s D + \mu) \frac{dW_r}{dt} + C W_r w_r = -(\rho_s - \rho) D \frac{dW}{dt} + (\rho_s - \rho) D g, \quad (1)$$

где $W(u, v)$ — вектор скорости потока, $W_s(u_s, v_s)$ — вектор абсолютной скорости движения частицы, $W_r(u_r, v_r)$ — вектор относительной скорости движения частицы и жидкости, ρ и ρ_s — плотности жидкости и частицы соответственно, D — объем частицы, g — вектор ускорения силы тяжести, μ — коэффициент присоединенных масс, C — коэффициент сопротивления.

В работах [3 и 4] приводятся аналогичные уравнения для линейного и квадратичного законов сопротивления и дается их решение с применением статистических методов исследования непрерывных полей. В указанных работах уравнения выведены для движения водяной капли в атмосфере, и потому в работе [4] пренебрежена ρ по сравнению с ρ_s , так как $\rho_s \gg \rho$. При рассмотрении же движения наносов в воде, где $\rho_s/\rho = 1, 3 \div 2, 7$ этого делать нельзя.

Рассмотрим плоскую задачу, направляя координатные оси X — в направлении движения и Y — в перпендикулярном направлении ко дну потока. Проектируем все силы, действующие на частицу, по направлению движения (ось X), тогда уравнение (1) примет вид:

$$(\rho_s D + \mu) \frac{dU}{dt} + C U^2 = -(\rho_s - \rho) D \frac{dU}{dt} + (\rho_s - \rho) D g \sin \alpha. \quad (2)$$

В работе сделана попытка решить уравнение (2) и эти результаты сравнить с данными эксперимента.

Введя обозначения $C = \frac{(\rho_s - \rho) D g}{W_{cr}^2}$, $a = \frac{(\rho_s - \rho) D g}{W_{cr}^2 (\rho_s D + \mu)}$,

$$K = \frac{\rho D + \mu}{\rho_s D + \mu}, \quad l = \frac{(\rho_s - \rho) D g \sin \alpha}{\rho_s D + \mu}.$$

$U_r = U_s - U$ и подставляя в уравнение (2) получим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dU_s}{dt} + a (U_s - U)^2 = K \frac{dU}{dt} + l. \quad (3)$$

Учитывая, что в обычных русловых потоках, согласно экспериментам М. А. Великанова, Е. М. Минского и автора пульсационная составляющая скорости $U'(t)$ составляет приблизительно 10–25% от осредненной скорости, для мгновенных скоростей принимаем выражение:

$$U(t) = \bar{U} + \varepsilon U_1(t), \quad (4)$$

где $\varepsilon U_1(t) = U'(t)$ а $U_1(t)$ имеет порядок $\bar{U}$. Тогда для ε получим, что $0 < \varepsilon < 1$. Решение уравнения (3) отыскивается при помощи рядов расположенных по степеням ε

$$U_s(t) = U_{s0}(t) + \varepsilon U_{s1}(t) + \varepsilon^2 U_{s2}(t) + \dots \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечную систему дифференциальных уравнений.

Остановимся на первых трех уравнениях этой системы.

Решение первого уравнения этой системы экспоненциально затухающее и при $t \gg T$, при $\frac{1}{T} = 2\sqrt{a\Gamma}$, будет иметь вид:

$$U_{s0} - \bar{U} = \sqrt{\frac{\bar{U}}{a}} = W_{\text{ст}} \sqrt{\sin \alpha}, \quad (6)$$

где $W_{\text{ст}}$ — групповая скорость падения твердых частиц в жидкости.

Нулевое приближение в решении (3) дает продольную составляющую скорости падения частицы в ламинарном потоке движущемся со скоростью $\bar{U}$. Оно по существу не отличается от решения Панчева [3].

Решение второго уравнения с учетом (6) будет иметь вид:

$$U_{s1} = K U_1(t) + \frac{1-K}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} U_1(t-\tau) d\tau. \quad (7)$$

Это решение отличается от решения Панчева [4] членом $KU_1(t)$.

Решение третьего уравнения системы с учетом (7) будет иметь

$$\text{вид: } U_{s2} = -(K-1)^2 \cdot a \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_1}{T}} \cdot [U_1(t-\tau_1)]^2 \cdot d\tau_1 - \right.$$

$$- \frac{2}{T} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau+\tau_1}{T}} U_1(t-\tau) \cdot U_1(t-\tau-\tau_1) d\tau \cdot d\tau_1 +$$

$$\left. + \frac{1}{T^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau+\tau_1+\tau_2}{T}} U_1(t-\tau-\tau_1) U_1(t-\tau-\tau_2) d\tau \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \right\}. \quad (8)$$

Это существенно отличается от решения Панчева.

После подстановки полученных выражений (6), (7) и (8) в (5), имея в виду, что $\varepsilon U_1(t) = U'(t)$ и осредняя полученное выражение по времени, будем иметь:

$$\bar{U}_s - \bar{U} = \sqrt{\frac{\bar{U}}{a}} - (K-1)^2 \cdot a \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} [\overline{U'(t-\tau)}]^2 +$$

$$+ \frac{2(K-1)^2 a}{T^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\tau+\tau_1}{T}} \overline{U'(t-\tau_1) U'(t-\tau_1-\tau)} d\tau \cdot d\tau_1.$$

$$- \frac{(K-1)^2 a}{T^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\tau+\tau_1+\tau_2}{T}} \overline{U'(t-\tau_1) U'(t-\tau-\tau_2)} \cdot d\tau \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2. \quad (9)$$

Дальнейший анализ и преобразование полученного результата ведется при помощи статистических методов исследования непрерывных полей, нашедших за последние годы широкое применение в теоретических исследованиях турбулентности благодаря работам А. Н. Колмогорова, А. М. Обухова, А. М. Яглома и др.

Следуя А. Н. Колмогорову введем временную структурную функцию:

$$D(\tau) = \overline{[U(t) - U(t-\tau)]^2},$$

где τ — время, за которое определяется структурная функция.

Подинтегральное выражение четвертого члена правой части — равенства (9) может быть представлено через структурную функцию в виде:

$$\overline{U'(t-\tau-\tau_1) U'(t-\tau-\tau_2)} = \frac{1}{2} D(\tau_1 - \tau_2) + \overline{[U'(t-\tau)]^2};$$

третий член в правой части (9) в виде:

$$\overline{U'(t-\tau_1) U'(t-\tau_1-\tau)} = \frac{1}{2} D(\tau) + \overline{[U'(t-\tau)]^2}.$$

Подставляя это выражение в (9), получим:

$$\begin{aligned} \overline{U_s - U} = & \sqrt{\frac{l}{a}} - (K-1)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{T}} \cdot D(\tau) d\tau + \\ & + \frac{(K-1)^2 a}{2 T} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_1+\tau_2}{T}} D(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 \cdot d\tau_2 \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Пользуясь преобразованием, приведенным в работе [6] получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\tau_1+\tau_2}{T}} D(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 \cdot d\tau_2 = T \int_0^\infty e^{-\frac{\tau''}{T}} D(\tau'') d\tau'';$$

$$\overline{U_s - U} = \sqrt{\frac{l}{a}} - \frac{(K-1)^2 a}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{T}} D(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Выражение (11) при $\frac{1}{T} = 2 \sqrt{al}$ примет вид

$$\overline{U_s} - \overline{U} = \sqrt{\frac{l}{a}} \left[1 - \frac{(K-1)^2 a}{l} \cdot \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T}} D(\tau) d\tau \right]. \quad (12)$$

Автором статьи сделана попытка определить аналитический вид функции $D(\tau)$ на основе экспериментальных данных.

Обрабатывались хронограммы продольных пульсационных скоростей, полученных при помощи установки „следящая щель“ [7] для двух точек потока глубиной $H = 6,0$ см.

Значения $\Delta U'(t) = U'(t) - U'(t - \tau)$ определялись графически для десяти различных значений τ на глубине $H_1 = 2,0$ см и восьми значений τ на глубине $H_2 = 4,4$ см. Величина τ при этом колебалась в пределах от 0,08 до 21,7 сек.

При построении структурной функции вместо значений $[\Delta U'(t)]^2$ пользовались значениями $|\Delta U'(t)|$,² вычисление которых, во-первых, проще вычисления значений τ , и, во-вторых, отдельные большие значения $\Delta U'(t)$ сильно отличающиеся от остальных, заметно сглаживаются.

Известно, что значение структурной функции отличается от $[\Delta U'(t)]^2$ постоянным множителем и при нормальном распределении вероятности она определяется теоретически и равна $\pi/2$.

С целью дополнительной проверки значений K , были построены экспериментальные и теоретические кривые распределения вероятностей $\Delta U'$ для различных значений τ , и определены необходимые условия существования нормального закона распределения $\Delta U'$. Результаты обработки этих кривых приведены в табл. 1, где β_1 и β_2 —

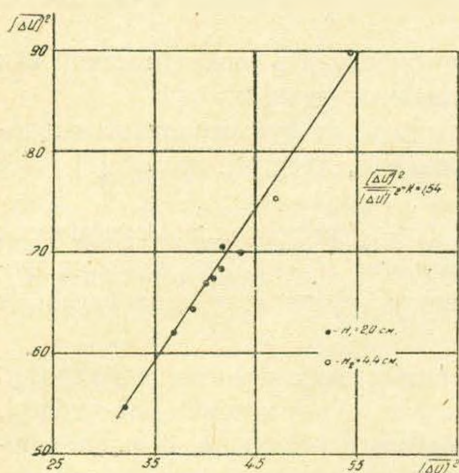
Таблица 1

Высота точки	№№	τ сек	$ \Delta U' $	σ	β_1	β_2	$\frac{\chi^2 - a_{\chi^2}}{\sigma_{\chi^2}} < 3$	$D_{\max}$	λ	$P(\lambda) \wedge 0,05^*$
$H = 2,0$ см	1	0,08	5,66	7,38	0,096	-0,02	-0,73	—	—	—
	2	0,28	6,07	7,9	0,101	-0,45	0,32	—	—	—
	3	0,7	6,23	8,01	0,131	-0,6	-0,8	—	—	—
	4	1,4	6,32	8,17	-0,049	-0,22	-0,71	—	—	—
	5	2,0	6,47	8,24	-0,266	-0,52	2,3	—	—	—
	6	3,18	6,45	8,39	-0,120	-0,23	1,61	—	—	—
	7	4,44	6,39	8,21	0,047	-0,38	1,44	15,5	0,694	0,71
	8	5,86	6,61	8,36	-0,024	-0,34	-0,44	—	—	—
	9	11,45	6,53	7,96	-0,270	-0,62	1,36	—	—	—
	10	21,74	6,60	8,18	-0,270	-0,52	2,07	—	—	—

коэффициенты асимметрии и эксцесса; χ^2 — критерии К. Пирсона; D — максимальная разница эмпирической и теоретической кривых распределения в критерии согласия А. Н. Колмогорова.

* Значение $P(\lambda)$ соответствует максимальному значению D для всех возможных величин τ .

На рис. 1 представлена экспериментальная кривая $[\Delta U'(t)]^2 = f_2([\Delta U'(t)]^2)$ коэффициент наклона прямой $K=1,54$, что соответствует



значению $\approx \frac{\pi}{2} = 1,57$.

Экспериментальные данные хорошо аппроксимируются степенной функцией вида:

$$D(\tau) = A \tau^\beta \quad (13)$$

К аналогичному выводу пришли в своих работах А. Н. Колмогоров и А. М. Обухов.

На рис. 2 представлены кривые $\frac{[\Delta U']}{U} = f(\tau)$.

По выражению (13) на рис. 3 в логарифмических координатах определены значения:

$$\sqrt{A_1} = 0,0596 \quad \beta_1 = 0,06 \text{ для глубины } H_1 = 2,0 \text{ см};$$

$$\sqrt{A_2} = 0,06 \quad \beta_2 = 0,10 \text{ для глубины } H_2 = 4,4 \text{ см}.$$

После подстановки (13) в выражение (12) и преобразований получим:

$$\bar{U}_s - \bar{U} = \sqrt{\frac{l}{a}} \left[1 - \frac{(K-1)^2 \cdot a \cdot A T^2}{4l} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{T}} \left(\frac{\tau}{T} \right)^\beta \cdot d \left(\frac{\tau}{T} \right) \right]. \quad (14)$$

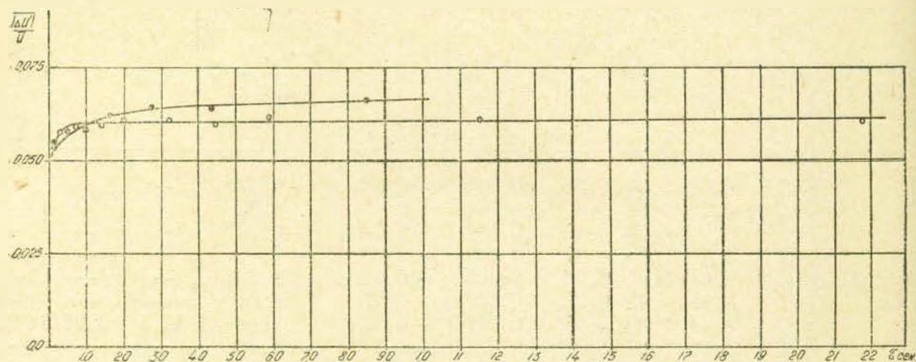


Рис. 2. Кривые зависимости $\frac{[\Delta U']}{U} = f(\tau)$

где интеграл из себя представляет γ — функцию и равен $\Gamma(1+\beta)$. По этому получим окончательно

$$\bar{U}_s - \bar{U} = \sqrt{\frac{l}{a}} \left[1 - \frac{(K-1)^2 \cdot a \cdot A T^2}{4l} \cdot \Gamma(\beta+1) \right]. \quad (15)$$

По кривой $\Gamma(1+\beta) = f_1(\beta)$ на рис. 4 определены значения $\Gamma(1+\beta)$ для полученных двух значений β и по формуле (15) произведен расчет для следующих параметров потока и наносов. Резуль-

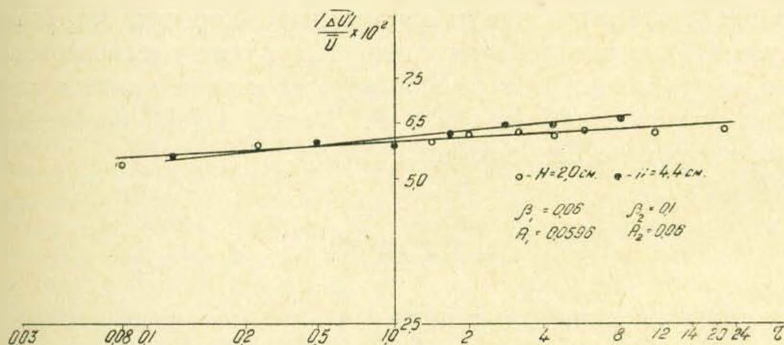


Рис. 3. Логарифмическая кривая для определения значения β и A .

таты этого расчета сопоставлены с экспериментальными данными автора. (рис. 5). При расчетах приняты $H=6,0$ см; уклон потока к горизонту $i=0,005$; объемный вес наносов $\gamma=1,4$ т/м³; диаметр наносов $d_{cp}=0,85$ мм; гидравлическая крупность наносов $W_0=3,85$ см/сек. По формулам и кривым работы [8] произведен переход от скорости падения одиночной частицы к их групповой скорости падения. Однако большой разницы между ними

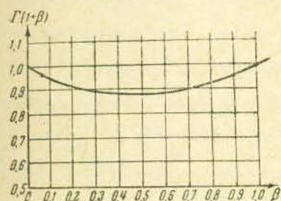


Рис. 4. Зависимость $\Gamma(1+\beta) = f_1(\beta)$

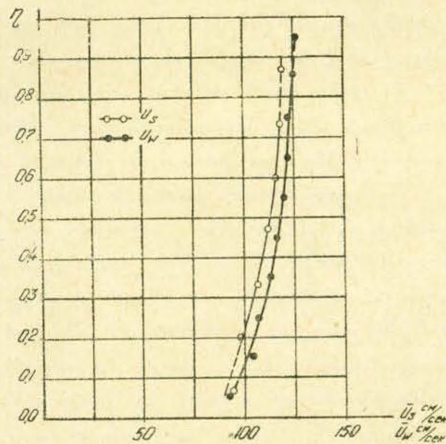


Рис. 5. Экспериментальные кривые $U = f_3(\gamma)$ для твердых частиц и взвешенной жидкости.

при этом не наблюдается, так как средняя мутность потока весьма мала. Скорость стесненного падения частиц получилась равной 3,79 см/сек. Относительные скорости твердых частиц и жидкости, рассчитанные по формуле (15), получились равными: $\bar{U}_s - \bar{U} = -2,0$ см/сек при $H_1=2,0$ см; $\bar{U}_s - \bar{U} = -3,2$ см/сек, при $H_2=4,4$ см. Те же скорости, определенные по экспериментальной кривой, приведенной на рис. 5 составляют соответственно $-5,0$ см/сек и $-4,0$ см/сек.

Необходимо отметить, что качественная сторона полученных результатов по расчету и по эксперименту хорошо совпадает, т. е. в обоих случаях жидкость опережает твердые частицы.

Расчеты по определению относительных скоростей проведены также для одной и той-же точки расположенной на глубине $H=2,0$ см. от дна, при трех средних мутностях потока.

Интересно отметить, что относительные скорости, определенные по формуле (15), с увеличением средней мутности уменьшаются. Этот результат в определенной мере согласуется с результатами экспериментальных исследований автора и J. Tesarik-a [9], проведенных в вертикальной трубе с восходящим потоком.

Է. Տ. ԶՐԲԱՇՅԱՆ

ՏՈՐՐՈՒԼՆԵՏ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԿՈՇՏ ՄՈՍՆԻԿՆԵՐԻ ՀԱՐԱՐԵՐԱԿԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Տորրուլենտ հոսանքներում ծանր մասնիկների շարժման հարցը հիդրոտրանսպորտի ուսումնասիրման ժամանակ էական հարցերից մեկն է, քանի որ ծանր մասնիկների և կրող ջրի փոխազդեցությունը հիմնականում պայմանավորված է նրանց միջև գոյություն ունեցող հարաբերական արագությամբ:

Տարբեր հեղինակներ տարբեր ձևով են լուսաբանում այդ հարցը գրականության մեջ: Չկարողանալով ճիշտ որոշել այդ արագությունը, նրանք կատարում են այս կամ այն ընդունելություններ:

Աշխատանքում հետազոտված է ծանր մասնիկի շարժումը տորրուլենտ հոսանքում, վերջինիս ցուցաբերած դիմադրության քառակուսային օրենքի ստեղծմամբ: Մասնիկի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կախված միայն ժամանակից լուծվում է փոքր պարամետրի մեթոդով: Ստացված են մասնիկի շարժման արագության երեք մոտավորությունները, որոնք համապատասխանում են ε փոքր պարամետրի զերո, առաջին և երկրորդ աստիճաններին: Այս և լրիվ լուծումը մինչև երկրորդ աստիճանի ε -ի համար, հետադադում կիրառելով ստրուկտուրային ֆունկցիաների գաղափարը պատահական անընդատ դաշտերի ուսումնասիրման վիճակագրական տեսությունից այն բերվում է (12) հավասարմանը, որը և հնարավորություն է տալիս $D(\varepsilon)$ ֆունկցիայի անկախության պայմաններում, որոշել ծանր մասնիկի և կրող հեղուկի հարաբերական արագությունը:

Աշխատանքում փորձ է արված էքսպերիմենտալ ճանապարհով որոշել $D(\varepsilon)$ ֆունկցիայի տեսքը և վերջինիս օգնությամբ հաշվել հարաբերական արագությունները ծանր մասնիկի և կրող հեղուկի համար: Հասկանալի է, որ $D(\varepsilon)$ փորձնական որոշման ժամանակ հաշվի են առնված սահմանային պայմանները: Այսպիսով (15) բանաձևը հնարավորություն է տալիս առաջին մոտավորությամբ որոշել ծանր մասնիկի և տարող հեղուկի շարժման հարաբերական արագությունը: (15) բանաձևով ստացված արդյունքները համեմատված են հեղինակի փորձերի հետ (պժ. 5):

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tchen-Chon-mon*. Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. Hague, 1947.
2. *Хаскинд М. Д.* К теории наносов. О движении тяжелой частицы в турбулентном потоке. Известия АН СССР (ОТН), № 11, 1956.
3. *Панчев Ст.* Движение тяжелых частиц в турбулентном потоке при линейном законе сопротивления. Доклады Болгарской АН, т. 12, № 3, 1959.
4. *Панчев Ст.* Движение тяжелых частиц в конвекционном турбулентном потоке при квадратичном законе сопротивления. Доклады Болгарской АН т. 12, № 4, 1959.
5. *Дементьев А. М.* Опыт теории расчета гидротранспорта. Изв. ВНИИГ т. 36, 1948.
6. *Яглом А. М.* Об учете инерции метеорологических приборов при измерениях в турбулентной атмосфере. Тр. Геофизического института, № 24, 1954.
7. *Джрбашян Э. Т. и Карапетян Р. М.* Установка „Следящая щель“ для измерения турбулентных характеристик потока. Вторая Закавказская конференция молодых научных работников, Тбилиси, 1962.
8. *Минц Д. М. и Шуберт С. А.* Гидравлика зернистых материалов. МКХ РСФСР, М., 1955.
9. *Tesarik J.* The fluidization of granulated particles and flocs in water, La Houille Blanche № 6, 1959.