

ГИДРАВЛИКА

В. Г. САНОЯН

О ВЗВЕШИВАНИИ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ
ТРУБЕ

Гидротранспорт зернистых материалов имеет большое практическое значение. Частным случаем гидротранспорта в вертикальной трубе является взвешивание зернистого слоя в восходящем потоке. Этот вопрос имеет практическое значение также для ряда отраслей техники, в том числе для водоснабжения при промывке водоочистных фильтров. Ниже делается попытка теоретического решения задачи, используя основные законы механики и не делая пока никаких допущений.

Ф. И. Франклем [1] были получены дифференциальные уравнения движения двухкомпонентных потоков. При выводе этих уравнений он использовал теорию количеств движения в Эйлеровском представлении. Те же уравнения в векторном виде можно получить применяя теорему об изменении количества движения в обычном виде (приравнявая индивидуальную производную по времени от главного вектора количеств движения главному вектору внешних массовых и поверхностных сил). Этот вывод здесь не приводится. Напишем уравнения для твердой компоненты

$$\rho_s \frac{\partial s \vec{V}}{\partial t} + \rho_s (\Delta \cdot \vec{V}) s \vec{V} = \rho_s s \vec{F} - s \operatorname{Div} P \quad (1)$$

и для жидкой компоненты

$$\rho \frac{\partial (1-s) \vec{V}}{\partial t} + \rho (\Delta \cdot \vec{V}) (1-s) \vec{V} = \rho (1-s) \vec{F} - (1-s) \operatorname{Div} P. \quad (2)$$

К ним присоединяются уравнения неразрывности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} (s \vec{V}) = 0 \quad (3)$$

для твердой компоненты, и

$$\frac{\partial (1-s)}{\partial t} \operatorname{div} (1-s) \vec{V} = 0 \quad (4)$$

для жидкой компоненты.

Уравнения (1)–(4) относятся к мгновенным значениям величин. При этом приняты следующие обозначения

t — время; ρ_s и ρ — плотности соответственно твердых и жидких частиц; $\vec{V}$ — вектор мгновенной скорости жидких и твердых частиц*; $\vec{P}$ — тензор напряжения — интенсивность объемного действия поверхностных сил; $\vec{F}$ — интенсивность массовых сил; s — функция, равна 1 внутри твердых частиц и 0 внутри жидких;

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Уравнения (1)–(4) выполнены как внутри твердых, так и внутри жидких частиц [2]. В самом деле, (1) и (3) выполнены внутри твердых частиц ($s=1$) на основании общих законов механики сплошной среды, а внутри жидкости потому, что там $s=0$. Уравнения (2) и (4) выполнены внутри жидких частиц согласно общим законам механики сплошной среды, а внутри твердых частиц потому, что там $1-s=0$.

Подставив в уравнение (1) $(\Delta \cdot \vec{V}) s \vec{V} = \text{Div} (\vec{V} \vec{V}) s$ и осреднив (1) и (3) по объему, занятому твердыми частицами согласно формуле

$$f_s = \frac{\bar{f} \cdot \bar{s}}{\bar{s}}$$

получим

$$\rho_s \frac{\partial s \vec{V}_s}{\partial t} + \rho_s \cdot \text{Div} \bar{s} (\vec{V}_s \vec{V}_s) - \bar{s} \text{Div} \bar{P} - \overline{s' \text{Div} P'} - \rho_s \bar{s} \vec{F}_s = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \text{div} (\bar{s} \vec{V}_s) = 0, \quad (6)$$

где $s' = s - \bar{s}$, $P' = P - \bar{P}$.

В написанных выражениях черточки сверху обозначают знак осреднения; $\bar{s}$ — представляет собой мутность в данной точке.

Аналогичным образом, заменяя $(\Delta \cdot \vec{V}) (1-s) \vec{V} = \text{Div} (\vec{V} \vec{V}) (1-s)$ и осредняя уравнения (2) и (4) по объему, занятому жидким веществом согласно формуле

$$f = \frac{\bar{f} (1-\bar{s})}{1-\bar{s}},$$

и не меняя обозначение скорости, получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial (1-\bar{s}) \vec{V}}{\partial t} + \rho \text{Div} (1-\bar{s}) (\vec{V} \vec{V}) - (1-\bar{s}) \text{Div} \bar{P} + \\ + \overline{s' \text{Div} P'} - (1-\bar{s}) \vec{F} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

* В силу прилипания жидкости к твердым частицам для скорости $\vec{V}$ мы будем иметь векторное поле.

$$\frac{\partial (1-\bar{s})}{\partial t} - \operatorname{div}(1-\bar{s}) \vec{V} = 0. \quad (8)$$

В уравнениях (5)–(8), величина $\overline{s' \operatorname{Div} P'} = \vec{R}$, представляет собой интенсивность распределения сопротивления, испытываемого твердой компонентой и эта величина входит в уравнения (5) и (7) с противоположным знаком.

Воспользуемся обобщенным законом Ньютона о линейной связи между тензором напряжений P и тензором скоростей деформации S , предполагая, что и твердые частицы и жидкость несжимаемы. Тогда

$$P = 2\mu S + p \cdot E, \quad (9)$$

где μ — коэффициент вязкости, p — давление, E — единичный тензор.

Аналитически это выражается формулой:

$$P_{ij} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) & \text{при } j \neq i, \\ -p + 2\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_i} & \text{при } j = i. \end{cases} \quad (10)$$

Подстановка (10) в (5) и (8) приводит к системе, состоящей из двух векторных и двух скалярных уравнений или, что то же самое, из восьми скалярных уравнений. Неизвестными будут

$$\vec{V}_s, \vec{V}, p, \bar{s} \text{ и } \vec{R}.$$

Напишем уравнение движения (5) и (7) в координатной форме, обозначая проекции скоростей твердых и жидких частиц соответственно через u_x, u_y, u_z и v_x, v_y, v_z :

$$\begin{aligned} \rho_s \left(\frac{\partial s u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} s u_x u_x + \frac{\partial}{\partial y} s u_y u_x + \frac{\partial}{\partial z} s u_z u_x \right) &= \\ &= s \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) + R_x + R_s s F_x; \\ \rho_s \left(\frac{\partial s u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} s u_x u_y + \frac{\partial}{\partial y} s u_y u_y + \frac{\partial}{\partial z} s u_z u_y \right) &= \\ &= s \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) + \rho_s s F_y + R_y; \\ \rho_s \left(\frac{\partial s u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} s u_x u_z + \frac{\partial}{\partial y} s u_y u_z + \frac{\partial}{\partial z} s u_z u_z \right) &= \\ &= s \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) + \rho_s s F_z + R_z, \end{aligned} \quad (11)$$

для твердой компоненты,

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (1-s) v_x + \frac{\partial}{\partial x} (1-s) v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} (1-s) v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} (1-s) v_z v_x \right] =$$

$$= (1-s) \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) + \rho_s s F_x - R_x;$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (1-s) v_y + \frac{\partial}{\partial x} (1-s) v_y v_x + \frac{\partial}{\partial y} (1-s) v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} (1-s) v_y v_z \right] =$$

$$= (1-s) \left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) + \rho_s s F_y - R_y;$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} (1-s) v_z + \frac{\partial}{\partial x} (1-s) v_z v_x + \frac{\partial}{\partial y} (1-s) v_z v_y + \frac{\partial}{\partial z} (1-s) v_z v_z \right] =$$

$$= (1-s) \left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) + \rho_s s F_z - R_z. \quad (12)$$

для жидкой компоненты.

Уравнения неразрывности: для твердой компоненты,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s u_x}{\partial x} + \frac{\partial s u_y}{\partial y} + \frac{\partial s u_z}{\partial z} = 0; \quad (13)$$

для жидкой компоненты

$$\frac{\partial (1-s)}{\partial t} + \frac{\partial (1-s) u_x}{\partial x} + \frac{\partial (1-s) u_y}{\partial y} + \frac{\partial (1-s) u_z}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Приводим решение для простейшего случая, когда имеем стационарное движение двухкомпонентного восходящего или нисходящего потока в вертикальной трубе. Направляя ось z вертикально вверх, а x и y по диаметральному сечению трубы (рис. 1) будем иметь:

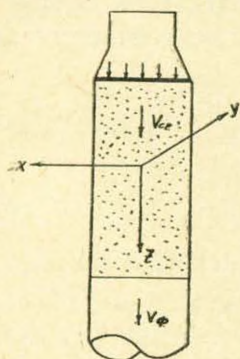


Рис. 1.

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -g,$$

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$$

Кроме того примем, что внутри твердых частиц касательные напряжения равны нулю:

$$p_{xy} = p_{zz} = p_{yz} = 0.$$

Тогда система (11) примет вид:

$$R_x - s \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$R_y - s \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad R_z - s \frac{\partial p}{\partial z} - \rho_s s g = 0. \quad (15)$$

Уравнение неразрывности (13) превращается в тождество. Внутри жидких частиц имеем

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p, \quad p_{yx} = p_{xy} = 0;$$

$$p_{yz} = p_{zy} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad p_{xz} = p_{zx} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v_z}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя эти выражения в (12), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} R_x + (1-s) \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ R_y + (1-s) \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ R_z - (1-s) \left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) \right] + \rho (1-s) g &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычитая первые два уравнения из системы (15) и (17) получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Вычитание вторых уравнений той же системы дает

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает, что

$$p = p(z) \quad (20)$$

Иначе говоря, в рассматриваемом случае давление по сечению не меняется.

Исключая из третьих уравнений системы (15) и (17) неизвестную R_z , получим:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{1}{(1-s)\mu} \left(\rho_s s g + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho (1-s) g \right). \quad (21)$$

Опыты показывают, что мутность при одинаковых размерах твердых частиц по сечению трубы не меняется ($s = \text{const}$). Это может случиться только тогда, когда обе части уравнения постоянны.

Поэтому из (21) получим:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \text{const} = C; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\mu(1-s)} \left[\rho_s s g + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho (1-s) g \right] = C. \quad (23)$$

Решение (22) дает

$$v_z = -\frac{C}{4} (a^2 - r^2) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (24)$$

где a — радиус трубы.

Определим среднюю скорость

$$v_{cp} = \frac{1}{\pi a^2 (1-s)} \int_0^a 2\pi r (1-s) v_z dr = -\frac{Ca^2}{8}. \quad (25)$$

Отсюда

$$C = -\frac{8v_{cp}}{a^2}. \quad (26)$$

Уравнение (23) можно представить в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = -(\rho_s - \rho) sg + C\mu (1-s). \quad (27)$$

Подставляя значение C из (26) получим

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) = (\rho_s - \rho) sg + \frac{8\mu (1-s) v_{cp}}{a^2}. \quad (28)$$

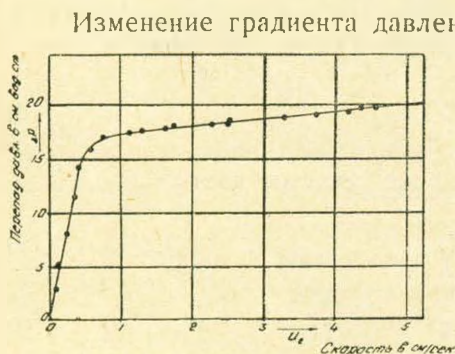


Рис. 2.

Изменение градиента давления от скорости показано на графике рис. 2, который заимствован из работы [3], где в наших обозначениях $\Delta p = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) U_s \equiv v_{cp}$.

Как видно из графика, начиная с точки с которой имеет место полное взвешивание твердых частиц, градиент давления в зависимости от скорости меняется линейно, в согласии с формулой ((28).

Замечая, что

$$v_{cp} = (1-s) v^\Phi,$$

где $v^\Phi = \frac{Q}{\pi a^2}$ — скорость фильтрации, уравнение (27) приводим к виду:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) = (\rho_s - \rho) sg + \frac{8\mu v^\Phi}{a^2}. \quad (29)$$

В исследованиях обычно не учитывают (см. например, [4, 5]) влияние скорости на перепад давления принимая, что последний постоянен и равен весу жидкости столба твердых частиц с единичной площадью. В рассматриваемом случае (29) принимает вид:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) = (\rho_s - \rho) sg.$$

Уравнение (29) можно использовать для определения средней мутности потока при помощи соединенных к трубе пьезометров. Действительно, введя обозначение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{l}$$

и имея в виду, что

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\gamma (l + \Delta H)}{l} = \gamma \left(1 + \frac{\Delta H}{l} \right),$$

получим,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \left(1 + \frac{\Delta H}{l} \right).$$

Подставляя это выражение в (29) находим:

$$\frac{\Delta H}{l} = \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} s + \frac{8\mu v^\Phi}{\gamma a^2} \quad (30)$$

Имея разность уровней в пьезометрах ΔH (рис. 3) и расстояние между точками их соединения к трубе l , по этой формуле можно определить мутность в сечении между этими пьезометрами.

В частном случае, когда двухкомпонентная смесь состоит из воды и воздуха, удельным весом воздуха (γ_s) по сравнению с удельным весом воды можно пренебречь, тогда (30) примет вид:

$$\frac{\Delta H}{l} = -s + \frac{8\mu V^\Phi}{\gamma a^2} \quad (31)$$

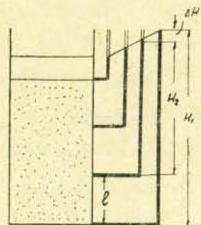


Рис. 3.

Опыты, поставленные в лаборатории ИВП по измерению мутности ультразвуковым методом подтвердили формулу (30). Некоторое отклонение порядка 20% объяснялось неравномерностью диаметров твердых частиц.

Определим силу сопротивления твердых частиц движению жидкости. Согласно первым двум уравнениям системы (17)

$$R_x = -(1-s) \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$R_y = -(1-s) \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Но так как по (18) и (19) $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ получается

$$R_x = R_y = 0,$$

т. е. в поперечном направлении частицы сопротивления не испытывают.

Продольную составляющую R_z определим из последнего уравнения (15). Имеем

$$R_z = s \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_s s g.$$

Согласно (27)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -(\rho_s - \rho) g - \rho g - \frac{8\mu v^\Phi}{a^2}.$$

Следовательно

$$R_z = s(1-s) \left[(\rho_s - \rho) g - \frac{8\mu(1-s)v_{cp}}{a^2} \right] \quad (32)$$

или

$$R_z = s(1-s) \left[(\rho_s - \rho) g - \frac{8\mu v^\Phi}{a^2} \right] \quad (32')$$

Из (32) или (32') видно, что когда $s=0$ (чистая жидкость) и $s=1$ (твердые частицы) $R_z=0$. Как видно из приведенных выражений они не учитывают влияния диаметра частиц.

Վ. Գ. ՍԱՆՈՅԱՆ

ՌԵԶՈՆԱՆՏԻ ԽՈՐԱԳՈՐԾԱԿՈՒՄ ՄԱՆՐ ԿԱՆՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՇԱՐՔԻՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. Վ.

Հոգվածում արվում է հրկրադարիչ հեղուկների շարժման (1)–(4) դիֆերենցիալ հավասարումները: Նման հավասարումներ առաջին անգամ արվել են Ֆ. Ի. Ֆրանկլի |1, 2| կողմից, ընդունելով, որ լարվածութունների թեկնդորը նույնն է թե կոշտ և թե հեղուկ մասնիկների ներսում: Մեղ մոտ ընդունվում է, որ լարվածութունները կոշտ մասնիկներում բացակայում են (որովհետև նրանց դեֆորմացիան չնչին է), իսկ հեղուկ մասնիկներում այն ենթարկվում (10) ընդհանրացած օրենքին, որի համաձայն լարվածութունների թեկնդորը գծաչորեն է կախված արագութունների դեֆորմացիայի թեկնդորից: Օգտագործելով հավասարումները, լուծված է խնդիր, որի զեպքում մասնիկները գտնվում են կախված վիճակում ուղղաձիգ խողովակի մեջ: Այդ զեպքում ստացվում է, որ ջրի մասնիկների արագութունները բավարարում են (22) հավասարմանը, իսկ ճնշման անկումն արտահայտվում է (29) առնչությամբ: Վերջինս կարելի է օգտագործել նաև խողովակում հեղուկի պոտրությունը որոշելու համար (30):

Հոգվածի վերջում արվում է (32) և (32') արտահայտությունները, որոնց միջոցով կարելի է որոշել հեղուկ և կոշտ մասնիկների միասին ծավալին համապատասխանող փոխադրեցություն ուժերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных наносов. ДАН СССР, т. 92, № 2, 1953.
2. Франкль Ф. И. Уравнения энергии для движения жидкостей со взвешенными наносами. ДАН СССР, т. 102, № 5, 1955.
3. Tesarik J. Fluidization des particules granuleuses et des flocons dans l'eau—La Houille Blanche, № 6, Novembre, 1959.
4. Минц Д. М. О взвешивании зернистого слоя в восходящем потоке жидкости. ДАН СССР, т. 82, № 1, 1952.
5. Минц Д. М. О гидродинамическом сопротивлении взвешенного в потоке зернистого слоя. ДАН СССР, т. 83, № 4, 1952.