ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտուր. սերիա XVI, № 1, 1963 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

К. М. ХУБЕРЯН

НАПРЯЖЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЕ, ОТВЕЧАЮЩИЕ НАИМЕНЬШЕМУ ЕЕ ВЕСУ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ УСИЛИЯХ

Сообщение 1

Задача о минимуме теоретического веса статически неопределимой фермы, рассматриваемого в виде функции усилий и напряжений при строгой ее постановке подчинена следующим условиям: усилия и напряжения связаны уравнениями равновесия и уравнениями неразрывности деформаций в форме канонических уравнений метода напряжений; напряжения подчинены неравенствам, а именно, ни одно из них не должно превышать соответствующего допускаемого напряжения; допускаемые напряжения, по крайней мере для сжатых стержней, являются функциями усилий и напряжений; гибкости стержней также подчинены неравенствам, т. е. ни одна из них не должна превышать соответствующей допускаемой гибкости; перемещения некоторых узлов фермы также подчинены неравенствам, т. е. прогиб фермы не должен превышать допускаемой величины.

Исследования указанной задачи в подавляющем большинстве ограничивались случаем расчета статически неопределимой фермы на единственное загружение статической нагрузкой, велись на основе упрощающих допущений, по пути решения частных задач. Этот вопрос рассматривался М. Леви, В. Л. Кирпичевым, И. М. Рабиновичем, Н. И. Безуховым,, Ю. А. Радцигом, Д. Сведом, Н. А. Серовым, Ф. И. Слюсарчуком, Л. К. Шмидтом, Л. М. Лоши, автором и др. Допущения, позволяющие обойти некоторые из указанных выше условий, облегчают решение задачи, но отдаляют ее от реальных условий проектирования ферм.

Один из возможных путей решения указанной задачи состоит в том, что задавшись величинами лишних неизвестных при каждом расчетном воздействии в пределах их области существования и определив усилия во всех стержнях от всех расчетных воздействий, решаем частную задачу о распределении напряжений, отвечающем наименьшему теоретическому весу фермы при фиксированных усилиях. Затем задаемся иными величинами лишних неизвестных в пределах их области существования и снова решаем указанную частную задачу и т. д. Получив достаточное число таких решений, выявим наивыгоднейшее из них, удовлетворяющее нормам прочности, устойчивости, гибкости и жесткости. Частную задачу, в случае расчета статически неопределимой фермы на единственное загружение статической нагрузкой, исследовали И. М. Рабинович [1] и автор [2]. В общем случае расчета статически неопределимой фермы на многие загружения и воздействия ход решения этой задачи указан автором. Ниже рассмотрен частный случай. Другой частный случай будет рассмотрен в следующем сообщении.

Случай расчета однократно статически неопределимой фермы на два загружения статическими нагрузками

Ограничимся случаем, когда для заданных двух загружений существует общая картина знаков[1] и она принимается при обоих загружениях. В этом случае из двух усилий $\overset{I}{S}_i$ и $\overset{II}{S}_i$, вызываемых в стержне i нагрузками I и II, опасным будет большее по абсолютной величине усилие. Ход изложенного ниже решения остается в силе и для случая, когда каждому загружению отвечает своя картина знаков.

Записав каноническое уравнение метода напряжений для каждого загружения фермы, оставив в этих уравнениях без изменения напряжения, отвечающие положительным усилиям, умножив на минус единицу напряжения, отвечающие отрицательным усилиям, сгруппировав полученные в результате положительные и отрицательные члены уравнений и сгруппировав члены с опасными напряжениями и члены с неопасными напряжениями, получим так называемые модулярные канонические уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=f} a_i \overset{I}{\sigma}_i + \sum_{i=f+1}^{i=s} a_i \overset{I}{\sigma}_i - \sum_{i=s+1}^{i=h} a_i \overset{I}{\sigma}_i - \sum_{i=h+1}^{i=m} a_i \overset{I}{\sigma}_i = 0; \\ &\sum_{i=1}^{i=f} a_i \overset{II}{\sigma}_i + \sum_{i=f+1}^{i=s} a_i \overset{II}{\sigma}_i - \sum_{i=s+1}^{i=h} a_i \overset{II}{\sigma}_i - \sum_{i=h+1}^{i=m} a_i \overset{II}{\sigma}_i = 0, \end{aligned}\right| \qquad (1.1)$$

где символы a_i, $\overset{I}{\sigma}_i$, $\overset{II}{\sigma}_i$ выражают существенно положительные величины (модули): $a_i = \overset{1}{S}_i l_i$; $\overset{1}{S}_i$ — абсолютная величина усилия в стержне i основной статически определимой системы от сил $X=1$, приложенных к разрезанной лишней связи; l_i — длина стержня i; $\overset{I}{\sigma}_i$ — абсолютная величина напряжения в стержне i статически неопределимой фермы от нагрузки I; $\overset{II}{\sigma}_i$ — абсолютная величина напряжения в том же стержне от нагрузки II; s — число положительных членов в каждом

---

[1] Картиной знаков называется совокупность одновременно существующих знаков усилий во всех стержнях фермы при определенной статической нагрузке или определенном воздействии, неизменном в пределах данного расчетного состояния фермы.

из уравнений; m — число условно необходимых стержней (опорные стержни фермы в это число не входят); номерами $1, 2, \cdots f$, $s+1$, $s+2$, $\cdots h$ обозначены стержни, в которых опасные усилия, а, следовательно, и опасные напряжения вызывает нагрузка I; номерами $f+1$, $f+2$, $\cdots s$; $h+1$, $h+2$, $\cdots m$ обозначены стержни, в которых опасные усилия и опасные напряжения вызывает нагрузка II.

Такое преобразование канонических уравнений, названное модуляризацией, в принципе ничего не меняет в методе напряжений, но улучшает технику расчета статически неопределимых ферм по этому методу и, в частности, облегчает решение задач о распределении напряжений, отвечающем наименьшему теоретическому весу фермы при фиксированных усилиях.

Поскольку для любого стержня i при обоих загружениях должна получиться одна и та же площадь сечения и, следовательно, абсолютные величины напряжений и усилий в этом стержне связаны пропорцией $\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i \big| \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i = \overset{\mathrm{I}}{S}_i \big| \overset{\mathrm{II}}{S}_i$, можно абсолютную величину каждого неопасного напряжения в уравнениях (1.1) выразить при помощи указанной пропорции через абсолютную величину опасного напряжения. Тогда неопасные напряжения будут исключены из модулярных канонических уравнений (1.1) и последние примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=f} a_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma} + \sum_{i=f+1}^{i=s} a_i \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}{\overset{\mathrm{II}}{S}_i} \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i - \\
&-\sum_{i=s+1}^{i=h} a_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma} - \sum_{i=h+1}^{i=m} a_i \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}{\overset{\mathrm{II}}{S}_i} \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i = 0; \\
&\sum_{i=1}^{i=f} a_i \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i}{\overset{\mathrm{I}}{S}_i} \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum_{i=f+1}^{i=s} a_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i - \\
&-\sum_{i=s+1}^{i=h} a_i \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i}{\overset{\mathrm{I}}{S}_i} \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i - \sum_{i=h+1}^{i=m} a_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где символы коэффициентов, усилий и опасных напряжений выражают существенно положительные величины.

Выразив площадь каждого стержня в виде отношения абсолютной величины опасного усилия к абсолютной величине опасного напряжения получим следующую формулу теоретического объема всех условно необходимых стержней фермы:

$$T = \sum_{i=1}^{i=f} \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} + \sum_{i=f+1}^{i=s} \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i} + \sum_{i=s+1}^{i=h} \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} + \sum_{i=h+1}^{i=m} \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i}. \tag{1.3}$$

Выбрав среди опасных напряжений какие-нибудь два напряжения в качестве „зависимых“, например, напряжения $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{m-1}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_m$ и решив относительно них уравнения (1.2), запишем полученные выражения их модулей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{m-1} &= \sum_{i=1}^{i=f} A_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum_{i=f+1}^{i=s} \pm A_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i - \sum_{i=s+1}^{i=h} A_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum_{i=h+1}^{i=m-2} \pm A_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i;\\ \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_m &= -\sum_{i=1}^{i=f} B_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum_{i=f+1}^{i=s} \pm B_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i + \sum_{i=s+1}^{i=h} B_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum_{i=h+1}^{i=m-2} \pm B_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i,\end{aligned}\right| \tag{1.4}$$

где

$$A_i = \frac{a_i\left(1 - \dfrac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i}{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}\cdot\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}{a_{m-1}\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}; \tag{1.5}$$

$$i = 1, 2, \cdots f,\ s+1,\ s+2,\ \cdots h;$$

$$\pm A_i = \frac{a_i\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}{\overset{\mathrm{II}}{S}_i} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}{a_{m-1}\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}; \tag{1.6}$$

$$i = f+1,\ f+2,\ \cdots s,\ h+1,\ h+2,\ \cdots m-2;$$

$$B_i = \frac{a_i\left(1 - \dfrac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i}{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}\cdot\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}}\right)}{a_m\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}; \tag{1.7}$$

$$i = 1, 2, \cdots f,\ s+1,\ s+2,\ \cdots h;$$

$$\pm B_i = \frac{a_i\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i}{\overset{\mathrm{II}}{S}_i} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}}\right)}{a_m\left(\dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{S_{m-1}} - \dfrac{\overset{\mathrm{I}}{S}_m}{\overset{\mathrm{II}}{S}_m}\right)}; \tag{1.8}$$

$$i = f+1,\ f+2, \cdots s,\ h+1,\ h+2,\ \cdots m-2.$$

Поскольку в формулах (1.5)—(1.8) все символы выражают модули, а номера стержней $m-1$ и m при надобности можно взаимно обменять, то всегда можно считать, что

$$\frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m-1}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1}} - \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_{m}}{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m}} > 0. \tag{1.9}$$

В уравнениях (1.2), а, следовательно, и в формулах (1.5) (1.8) любое отношение усилий является отношением абсолютной величины неопасного усилия к абсолютной величине опасного усилия. Поскольку обоим загружениям отвечает одна и та же картина знаков, каждое указанное отношение меньше единицы. Поэтому, учитывая неравенство (1.9), из формул (1.5), (1.7) видно, что величины A_i и B_i действительно являются существенно положительными:

$$A_i > 0;\ B_i > 0; \tag{1.10}$$

$$i = 1, 2, \cdots f,\ s+1,\ s+2,\ \cdots h.$$

Рассматривая теоретический объем стержней как функцию опасных напряжений, для решения задачи об относительном минимуме этой функции подставим выражения (1.4) в формулу (1.3). Получим

$$T = \sum_{i=1}^{i=f} \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} + \sum_{i=f+1}^{i=s} \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i} + \sum_{i=s+1}^{i=h} \frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} + \sum_{i=h+1}^{i=m-2} \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i} +$$

$$+ \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1} l_{m-1}}{\sum\limits_{i=1}^{i=f} A_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum\limits_{i=f+1}^{i=s} \pm A_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i - \sum\limits_{i=s+1}^{i=h} A_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum\limits_{i=h+1}^{i=m-2} \pm A_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i} +$$

$$+ \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m} l_{m}}{-\sum\limits_{i=1}^{i=f} B_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum\limits_{i=f+1}^{i=s} \pm B_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i + \sum\limits_{i=s+1}^{i=h} B_i \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i + \sum\limits_{i=h+1}^{i=m-2} \pm B_i \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i}. \tag{1.11}$$

Производные от этой функции по опасным напряжениям $\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_1$, $\overset{\mathrm{I}}{\sigma}_2, \cdots \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_f,\ \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_{s+1},\ \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_{s+2}, \cdots \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_h$ приравняем к нулю:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} = -\frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}{}_i^2} - \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1} l_{m-1} A_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_{m-1}^2} + \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_m l_m B_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_m^2} = 0; \\ &\qquad i = 1, 2, \cdots f; \\ &\frac{\partial T}{\partial \overset{\mathrm{I}}{\sigma}_i} = -\frac{\overset{\mathrm{I}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{I}}{\sigma}{}_i^2} + \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_{m-1} l_{m-1} A_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_{m-1}^2} - \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_m l_m B_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_m^2} = 0; \\ &\qquad i = s+1,\ s+2, \cdots h, \end{aligned}\right| \tag{1.12}$$

где правые части формул (1.4) ради компактности заменены их левыми частями.

Возьмем также производные от функции (1.11) по опасным напряжениям $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{f+1}$, $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{f+2}$, $\cdots$ $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{s}$, $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{h+1}$, $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{h+2}$, $\cdots$ $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{m-2}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \overset{\mathrm{II}}{\sigma}_i} = -\frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_i l_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_i^2} \pm \frac{S_{m-1} l_{m-1} A_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_{m-1}^2} \pm \frac{\overset{\mathrm{II}}{S}_m l_m B_i}{\overset{\mathrm{II}}{\sigma}{}_m^2}; \tag{1.13}$$

$$i = f+1,\ f+2,\ \cdots s,\ h+1,\ h+2,\ \cdots\ m-2.$$

Поскольку выражение каждой из производных (1.12) содержит члены с разными знаками, а все символы в них обозначают модули, каждую такую производную можно обратить в нуль путем изменения входящих в ее выражение опасных напряжений и, следовательно, мы были вправе приравнять такие производные к нулю.

Иное положение может получиться с производными (1.13), выражения которых содержат величины $\pm A_i$, $\pm B_i$, определяемые формулами (1.6), (1.8). Знаки этих величин для некоторых из производных (1.13) могут оказаться такими, что все три члена выражения производной будут отрицательными. Отрицательный знак такой производной очевидно невозможно изменить путем варьирования входящих в ее выражение опасных напряжений и, следовательно, такую производную нельзя приравнять к нулю. Она взята по такой независимой переменной, по которой функция (1.11) имеет граничный минимум. Для уменьшения T опасные напряжения, по которым взяты существенно отрицательные производные, необходимо приравнять к допускаемым напряжениям.

Те из производных (1.13), которые не оказались существенно отрицательными, приравняем к нулю. Эти уравнения четвертой степени совместно с уравнениями (1.12), (1.4) следует решить на электронной цифровой машине. Если среди решений указанной системы уравнений четвертой степени окажется вещественное решение, при котором все искомые неизвестные (модули опасных напряжений) положительны и не превышают допускаемых величин, то задача решена. Если все искомые неизвестные получатся положительными, но некоторые опасные напряжения превысят допускаемые напряжения, то эти опасные напряжения приравняем к допускаемым напряжениям и задачу о минимуме функции (1.11) решим заново при меньшем количестве независимых переменных. Если и в этом решении все искомые неизвестные получатся положительными, но некоторые из них превысят допускаемые величины, то поступим так же, как в предыдущем решении и т. д. Если в результате таких попыток не удастся получить удовлетворительное решение, то в качестве „зависимых" опасных напряжений вместо $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_{m-1}$ и $\overset{\mathrm{II}}{\sigma}_m$ придется выбрать другие опасные напряжения и повторить расчет заново.

Таким путем, удастся найти решение, при котором все искомые неизвестные положительны и не превышают допускаемых величин. Следовательно, удастся найти распределение опасных напряжений, отвечающее наименьшему теоретическому объему стержней при заданной величине усилия в лишней связи от нагрузки I и заданной величине усилия в той же связи от нагрузки II, если только принятые величины этих лишних неизвестных находятся в пределах их области существования.

ТНИСГЭИ Поступило 2.I.61.

Կ. Մ. ԽՈՒԲԵՐՅԱՆ

ՍՏԱՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՈՐՈՇԵԼԻ ՖԵՐՄԱՅԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՆՐԱ ԱՄԵՆԱԹԵԹԵՎ ՔԱՇԻՆ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆՈՂ ՀԱՍՏԱԴՐՎԱԾ ՃԻԳԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ստատիկորեն անորոշելի ֆերմայում նրա տեսականորեն ամենաթեթև քաշին համապատասխանող հաստադրված ճիգերի դեպքում լարումների բաշխման խնդիրը, որը հանդիսանում է ստատիկորեն անորոշելի ամենափոքր քաշի ֆերմայի վերաբերյալ խնդրի բաղկացուցիչ մասը, լուծված է երկու մասնավոր պայմանների համար՝ 1) ստատիկորեն միակի անորոշելի ֆերմայի հաշվարկի դեպքում ստատիկական բեռնավորման երկու բեռնվածքի այն պայմանով, որ յուրաքանչյուր ձողում ճիգը երկու բեռնվածքից էլ ունենում է միևնույն նշանը. 2) նույնանման ֆերմայի ստատիկական բեռնվածքով՝ համակերպված բազմաթիվ ջերմային անհավասարաչափ ազդեցություններից յուրաքանչյուրի հետ հաշվարկի դեպքում, ըստ որում ճիգերի նշանների պայմանը պահպանելով նույնը, ինչ որ նախորդ դեպքում է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. М Рабинович.* К теории статически неопределимых ферм, Трансжелдориздат, 1933.
2. *К. М. Хуберян.* К расчету статически неопределимых ферм. Тбилисский научно-исследовательский институт сооружений (ТНИС), вып. XXXII, 1938.
3. *К. М. Хуберян.* Усовершенствованный метод расчета портальных ферм сегментных затворов, „Сборник аннотаций научно-исследовательских работ по строительству, Работы, выполненные в 1952 г,“, Госстройиздат, 1954.