ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XV, № 6, 1962 Серия технических наук

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. НАЗАРОВ

О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОДОБИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Сообщение Б

Здесь приводится дальнейшее развитие представления о статистическом подобии, данном в [1].

§ 1. Тождественность материалов и конструкций в статистическом смысле

Два материала тождественны в статистическом смысле, если обе серии опытных образцов, изготовленных из них одним и тем же способом, при испытании на произвольную однотипную нагрузку приводят к статистически тождественным результатам.

Важно иметь ввиду следующее обстоятельство. Материалы, тождественные в статистическом смысле, вообще говоря, являются неоднородными, причем статистические закономерности и распределения неоднородностей неизвестны. Поэтому требуется изготовление больших количеств однотипных образцов для получения необходимого статистического материала по их механическим характеристикам. Далее в определении тождественности материалов указывается, что сравниваемые серии образцов должны быть изготовлены одним и тем же способом. Тождественность технологии изготовления является необходимым условием, так как технология может внести искажения в механические характеристики образцов. Трудность заключается также в том, что необходимо перед исследованием установить, является ли материал изотропным или анизотропным. Ввиду неоднородности материала постановка этого вопроса также должна быть дана в статистическом смысле.

Материал является изотропным в статистическом смысле, если его механические свойства тождественны в статистическом смысле во всех направлениях. Материал является анизотропным в статистическом смысле, если его механические свойства в статистическом смысле меняются в зависимости от направления.

Здесь мы не останавливаемся на критериях тождественности материалов, что должно являться предметом специальных исследований.

Имея ввиду многообразие способов загружения конструкций в современной технике, представляется во многих случаях целесообразным устанавливать тождественность материалов в узких, специализированных пределах изменения нагрузок.

§ 2. Простое подобие в статистическом смысле

Положим, что имеются две серии тел $\{A_i\}$ и $\{A_i'\}$, различающихся между собою лишь масштабным множителем α. Если они обладают в сходственных своих точках одинаковыми механическими свойствами в статистическом смысле, то будем говорить, что имеет место простое подобие в статистическом смысле. Ясно, что в этом случае материалы серий тел $\{A_i\}$ и $\{A_i'\}$ не являются статистически тождественными. Действительно, по условию материал образца A_i неоднороден. Стало быть, для обеспечения подобия в статистическом смысле, материал образца A_i' также должен быть неоднороден. Поскольку образцы A_i' отличаются по своим размерам от образцов A_i в α раз, то размеры неоднородностей материала тела A_i' должны отличаться от размеров неоднородностей материалов тела A_i в α раз. Таким образом, действительно материалы тел A_i и A_i' не могут быть статистически тождественными. Иначе говоря геометрические параметры структур материалов тел A_i и A_i' должны различаться между собою также α раз. Это показывает на то интересное обстоятельство, что на неоднородные материалы можно смотреть как на своего рода конструкции, которые имеют геометрическое подобие. Мы видим также, что при подходящем подборе структуры материалов M и M' в указанном выше смысле, условия статистического подобия должны быть обеспечены и поэтому масштабный эффект не будет иметь места. Не всегда возможно устанавливать непосредственным путем геометрическое подобие структур материалов, из которых изготовлены тела A_i и A_i'. Все же возможно указать путь для установления простого подобия материалов в статистическом смысле и для этих случаев. Пусть имеются неоднородные материалы M и M', для которых нужно проверить, имеет ли для них место простое подобие в статистическом смысле при заданном множителе подобия α.

Из материала M изготовляем однотипные серии опытных образцов, скажем серии кубиков, призм и пр. Из материала M' также изготовляем однотипные серии опытных образцов, но отличающихся от предыдущих серий по своим размерам геометрическим множителем подобия α. Если результаты испытаний серий образцов из материалов M и M' тождествены в статистическом смысле, в пределах какого-либо критерия согласия, то объявляем, что между неоднородными материалами M и M' имеет место простое подобие в статистическом смысле при множителе подобия α.

Приведенное выше определение можно принять за критерий простого статистического подобия между материалами M и M'. Аналогичным же образом можно распорядиться при рассмотрении случая простого статистического подобия при той или иной анизотропии в свойствах неоднородного материала. В частном случае, когда $\alpha=1$, мы приходим к случаю статистически тождественных материалов, рассмотренному в предыдущем параграфе. Задача усложняется, если требуется искать то значение α, при котором осуществляется статистическое подобие. В этом случае необходимо предпринимать пробные испытания различных серий при разных значениях α.

Из изложенного вытекает важный вывод для практики моделирования по простому подобию. Положим, что из материала M изготовлен оригинал A, а из материала M' модель A' при множителе геометрического подобия α. Если для оригинала изготовлены контрольные образцы для определения механических свойств материала M при некотором характерном размере l, то для модели необходимо изготовить контрольные образцы для определения механических свойств материала M', при характерном размере αl. Или, иначе говоря, ***контрольные образцы для оригиналов и моделей должны находиться в том же геометрическом отношении, как размеры оригинала и модели.*** Если при этом контрольные образцы для материалов M и M' окажутся в простом статистическом подобии, то можно утверждать, что материалы для оригинала модели подобраны правильно. Как уже указывалось в [1], чем крупнее размеры контрольных образцов, тем устойчивее будут результаты испытаний в смысле разброса и поэтому можно ограничиться испытанием меньшего количества образцов. Средние же значения прочностей образцов палают с увеличением их размеров.

Простое подобие неоднородного материала поэтому не является обязательным условием реализации простого подобия между оригиналом и моделью. Действительно, допустим, что неоднородность материала проявляется лишь в элементе объема, пренебрежимо малом как в сравнении с размерами модели, так и в сравнении с размерами оригинала. С такими случаями часто встречаются, например, когда материалом служит металл. В этом случае, понятно, простое подобие между оригиналом и моделью можно реализовать из материалов не подобных, а ***тождественных*** в статистическом смысле. Поэтому в таких случаях пробные образцы материалов для модели и оригинала могут быть изготовлены одинаковых размеров.

Из этого примера следует, что не всегда требуется ортодоксально придерживаться простого подобия материалов в том же масштабе α для оригиналов и моделей, изготовляемых из них для обеспечения подобия.

Можно указать на промежуточные случаи, при которых возможно хотя бы частично нарушить условие в подборе геометрического множителя подобия α для пробных образцов оригинала и модели.

Положим, например, что оригинал построен из бетона с максимальной крупностью гравия порядка 5 *см*. По-видимому, для такой крупности гравия желательны контрольные образцы на сжатие в виде куба со стороною 50 *см*. Если масштаб модели составляет 1/50 от натуры, то, строго говоря, пробные кубики должны иметь в стороне 1 *см*, а песок не крупнее 1 *мм*, что, конечно, не реально с точки зрения экспериментальной техники. Здесь может быть допущено некоторое уменьшение пробного кубика для оригинала, с доведением его до 30 *см*, а для модели увеличение пробного кубика до 3—5 *см* в стороне и при этом условии добиться осуществления механического подобия между ними. Ясно, что введение такого рода изменений само требует некоторой исследовательской работы для каждого конкретного случая. При этом следует иметь в виду, что чем меньше размеры пробных кубиков из неоднородного материала, тем более флуктуации в их прочностях и поэтому следует изготовить большее их количество для получения статистически достоверных результатов.

Если же в оригинале имеются неоднородности материалов крупных масштабов, соизмеримые с его размерами, то соблюдение отношения масштабов между образцами модели и образцами оригинала, равным α для соответственных контрольных образцов обязательно.

В качестве примера рассмотрим крупноблочное здание. Здесь элементом здания является крупный блок, статистические характеристики прочности которого считаем определенными. Для модели естественно принять крупные блоки в линейном масштабе α и для них добиться тех же статистических характеристик прочности. В данном случае естественно было бы за контрольные образцы принять самые блоки и, таким образом, выдерживать одинаковый линейный множитель подобия α как для зданий в целом, так и для их элементов. Для таких случаев, когда возможны крупные неоднородности материала, примерно такого же порядка размеров как и сооружение из него, для испытуемого образца материала модели необходимо соблюдение того же геометрического подобия, что и для модели.

Таким образом можем сделать следующие выводы:

1. Если материал оригинала имеет крупные неоднородности того же порядка, что и размеры самого оригинала, необходимо для моделирования обеспечить простое подобие материалов в том же масштабе α, в каком обеспечивается геометрическое подобие оригинала и модели. В этом случае пробные образцы для модели и оригинала должны быть выдержаны в том же геометрическом подобии как для самих моделей и оригиналов.

2. Если материал оригинала имеет очень мелкую неоднородность (зернистость металла), то для обеспечения простого подобия между оригиналом и моделью достаточно их изготовлять из статистически тождественного материала, свойства которого описаны в § 1. В этом случае подобные образцы для оригинала и модели могут быть одинаковой величины.

В промежуточных случаях между этими двумя крайними пределами можно принять геометрический множитель подобия для пробных образцов отличными от геометрического множителя подобия для самих модели и оригинала. Установление разумных отклонений в этих величинах является предметом обсуждения.

§ 3. Подобие в статистическом смысле в общем случае

До настоящего времени рассматривалось простое подобие. Формулировать условия подобия в статистическом смысле в общем случае значительно труднее.

Сначала приведем определение статистического подобия для материалов M и M' конструкций A и A'. После этого сформулируем статистическое подобие между ансамблями оригиналов $\{A_i\}$ и моделей $\{A'_i\}$. Два материала M и M' будем называть статистически подобными при множителях подобия α, β, γ, η если выполняются следующие условия:

1. Испытываются по две серии опытных образцов из материалов M и M' на различные виды напряженных состояний (напр. растяжение, кручение и др.), причем масштабы образцов отличаются множителем геометрического подобия α (если для образца из материала M характерный линейный размер l то для подобного образца из материала M' характерный размер должен быть $l' = \alpha\, l$).

2. Средне-арифметические значения компонентов напряжений и деформаций серий опытных образцов удовлетворяют условиям:

$\bar{\sigma}' = \beta\,\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}' = \gamma\,\bar{\varepsilon}$ в моменты времени t и $t' = \eta\, t$.

3. Плотности распределения безразмерных механических величин, полученных по испытаниям опытных образцов, изготовленных из материалов M и M', тождественны.

Значение первого условия ясно из определения простого подобия, данного в § 2. Оно полностью сохраняется и для подобия в общем случае и, как мы уже знаем, таким путем учитывается геометрическое подобие неоднородностей материалов M и M'.

Второе условие, поскольку оно касается всех возможных компонентов напряжений и деформаций, является весьма жестким, трудно выполнимым на практике. Как следует из этого условия, опытные образцы должны подвергаться напряженным состояниям различных интенсивностей и для них должны фиксироваться деформации в различные моменты времени. По существу мы здесь имеем дело со случайными функциями. Задача упрощается при отсутствии деформации текучести, в частности, деформаций ползучести. В этом случае выключается из рассмотрения фактор времени.

Третье условие, несмотря на кажущееся ограничение, касающееся только безразмерных механических величин, в действительности распространяется и на все размерные механические величины. Действительно, приняв, например, какие-либо характерные напряжения $\bar{\sigma}_0$ и $\bar{\tau}_0$, и характерные деформации $\bar{\varepsilon}_0$ и $\bar{\gamma}_0$ в каких-либо сходственных точках, мы можем ввести безразмерные величины $\frac{\tau}{\sigma_0}$ и $\frac{\sigma'}{\sigma_0}$, а также $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ и $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}$ для всего поля напряжений и деформаций для оригинала и модели. Для этих отношений также должны быть тождественными плотности распределения вероятностей.

При $\beta = \gamma = \eta = 1$ мы получим случай простого подобия в статистическом смысле. Если еще дополнительно принять $\alpha = 1$, то получим случай тождественности двух материалов в статистическом смысле.

Теперь можно привести определение статистически подобных конструкций.

Ансамбли конструкций $\{A_i\}$ *и* $\{A_i'\}$, *изготовленных в сходственных элементах из статистически подобных материалов* M *и* M', *при одинаковом качестве работ, называются статистически подобными.*

Данное выше определение механического подобия можно существенно смягчить, отказавшись от требования о тождественности плотностей распределения вероятностей и ограничившись упрощенными интегральными характеристиками статистической тождественности. К таковым, в первую очередь, можно отнести равенства математических ожиданий и моментов второго порядка для случайных отвлеченных механических величин сравниваемых материалов.

Имеет место следующая теорема: *Если статистически подобные ансамбли тел* $\{A_i\}$ *и* $\{A_i'\}$ *загрузить подобными внешними силами, то возникшие в них напряжения, деформации, перемещения и прочие механические величины будут также статистически подобными.*

Пусть заданы оба ансамбля с достаточно большим и одинаковым количеством n. Пусть вектор X_i $(i = 1, 2 \cdots n)$ имеет своими компонентами количественные признаки, характеризующие механические свойства экземпляра A_i из ансамбля оригиналов $\{A_i\}$. Они в основном представляют собою зависимости между деформациями и напряжениями всех элементов экземпляра A_i. Совокупность всех векторов X_i, характеризующих все n экземпляров ансамбля $\{A_i\}$ будем рассматривать, для компактности изложения, как пространство X. Выделим из пространства X достаточно малую область $(X, X + \Delta X)$, определяемую интервалами $(X_i, X_i + \Delta X_i)$. Пусть этой области отвечают n_1 экземпляров из ансамбля $\{A_i\}$. Аналогично для ансамбля $\{A_i'\}$, также в количестве n экземпляров, определяется пространство X'. Из определения статистического подобия обоих рассматриваемых ансамблей следует, что сходственные компоненты векторов X_i и X_i' в сходственных точках различаются между собою лишь множителями подобия. Сходственная малая область в пространстве X' обозначится как $(X',$ $X' + \Delta X')$. Пусть этой области отвечают n_1' экземпляров из ансамбля $\{A_i'\}$. В силу закона больших чисел мы можем при достаточно большом n утверждать, что n_1 и n_1 приблизительно одинаковые числа [1] и таким образом, отбрасывая лишние экземпляры, мы можем с точностью до ΔX и $\Delta X'$ осуществить попарное сопоставление экземпляров из ансамблей $\{A_l\}$ и $\{A_l\}$, в сходственных интервалах $(X, X + \Delta X)$ и $(X', X' + \Delta X')$, как уже подобных в обычном, детерминистическом смысле. Если теперь приложить к полученным попарно-подобным телам A_l и A_l подобные внешние силы, то в силу основной теоремы о подобии, деформации, напряжения, перемещения и прочее также будут подобными. Такой вывод справедлив для обоих ансамблей в целом, ввиду произвольности рассмотренного значения X. Отсюда действительно вытекает, что в результате приложения к экземплярам ансамблей $\{A_l\}$ и $\{A_l\}$ внешних подобных сил, будут подобны в статистическом смысле все механические величины, что и требовалось доказать.

Возможны различные статистические характеристики для различных механических величин, но они будут тождественными для каждой механической величины в отдельности для обоих сопоставляемых ансамблей. Теорема эта придает смысл приведенным выше определениям статистического подобия материалов и конструкций из них.

Допустим теперь, что внешняя нагрузка для оригинала является случайной функцией координат точек тела и времени. Рассмотрим серию реализаций этой случайной функции. Каждая из реализаций случайной нагрузки может рассматриваться как детерминистическая функция от координат и времени. Построив подобную нагрузку для модели мы получим реализацию случайной нагрузки и для нее. Повторяя этот мысленный эксперимент со всеми возможными реализациями случайной функции нагрузок, а также над всеми сходственными экземплярами ансамблей оригиналов и моделей, в смысле изложенном в [1], приходим к утверждению, что статистически подобные случайные нагрузки для ансамблей тел $\{A_l\}$ и $\{A_l\}$ отличаются между собою теми же множителями подобия как и при детерминистически подобных нагрузках, а статистика их тождественна.

Область применения понятия о статистическом подобии можно существенно расширить, если рассмотреть условия статистического подобия для составных тел. Напомним, что условия подобия для составных тел в обычном смысле были рассмотрены в [2].

Положим, что тело A_l составлено из тел B_{kl} в определенном порядке и определенным способом. По принятой нами символике в упомянутой работе, составные тела A_l условимся изображать в следующей алгебраической форме:

$$A_l = B_{1l} + B_{2l} + \cdots + B_{kl} + \cdots + B_{ml}.$$

Принимаем при этом самый общий случай, когда каждый ансамбль $\{B_{kl}\}$ имеет свои статистические характеристики. Положим далее, что имеем ансабли $\{B'_{kl}\}$, статистически подобные ансамблям $\{B_{kl}\}$, причем все множители подобия α, β, γ, η для всех ансамблей $\{B_{kl}\}$, т. е. при любом k, неизменимы. Если теперь экземпляры из этих ансамблей скрепить между собой в том же порядке и тем же способом, как тела B_{kl}, то получим составное тело

$$A_l = B_{1l} + B_{2l} + \cdots + B_{kl} + \cdots + B_{ml}.$$

Возникает вопрос, являются ли теперь ансамбли $\{A_l\}$ и $\{A_l\}$ статистически подобными? На это можно ответить утвердительно. Сходственные элементы ансамблей $\{A_l\}$ и $\{A_l\}$ являются статистически тождественными, стало быть, статистически тождественными являются и сами ансамбли. Кроме того они и подобны в статистическом смысле поскольку все элементы их составляющие, являются статистически подобными с одними и теми же множителями подобия по условию.

Из построения статистически подобных составных тел A_l и A_l следует, что их результирующие статистические характеристики могут сильно отличаться от статистических характеристик составляющих их тел. Это непосредственно вытекает даже из чисто формальных рассуждений в рамках рассмотренных операций по отбору элементов, поскольку для A_l будут иметь место комбинации различных вероятностей встреч элементов B_{lk} с данными механическими свойствами. Их можно даже подсчитать чисто формально по правилам комбинаторики. Это различие вытекает также и из существа дела, так как механические характеристики составных тел отличаются от механических характеристик их составляющих. В связи с этим будут изменены и статистические характеристики ансамбля $\{A_l\}$ в сравнении с таковыми для ансамблей $\{B_{kl}\}$.

Интересно отметить, что разброс для случайных величин, отвечающих составным телам, менее нежели разброс для случайных величин их составляющих. Обстоятельство это приводит к более устойчивым прочностным условиям для статистически-неопределимого сооружения в целом, при относительно большем разбросе таковых для их элементов. Полученные здесь выводы могут быть полезными для изучения на моделях статистических характеристик сооружений в натуре.

§ 4. Статистическое подобие при динамических процессах

Динамическое состояние системы отличается от статистического тем, что дополнительно рассматривается сила инерции. Поэтому для обеспечения статистического подобия динамических процессов необходимо лишь одно дополнительное условие, касающееся распределения плотностей в подобных телах. Простейшее условие — это обеспечение детерминистического условия $\rho' = \delta\rho$, $\delta = \mathrm{const}$ во всех сходственных точках обоих подобных тел в статистическом смысле. Можно пойти на дальнейшее усложнение определения подобия в статистическом смысле для динамических процессов, допуская возможность флуктуации значений δ в некоторых пределах.

Статистическое подобие динамических процессов удобнее всего описывать с помощью случайных функций, теория которых особенно хорошо разработана для линейных стационарных процессов. Следует подчеркнуть, что все результаты теории подобия автоматически переносятся и на случай подобия в статистическом смысле.

Изложенная теория открывает возможность установления статистических свойств однотипных натурных сооружений путем исследования статистических свойств их моделей, что является по-видимому единственной возможностью исследования таких свойств крупных объектов.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
АН Армянской ССР
Поступило 15.IX.1962

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՒ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՍԵՅՍՄԱԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հաղորդում 6

Ամփոփում

Սույն հաղորդման մեջ ընդլայնված ձևով բերված է հաղորդում 5-ում հրատարակված աշխատանքին վերաբերող հեղինակի ուսումնասիրության նոր արդյունքները նվիրված նմանության տեսությանը ֆիզիկական հասկացությամբ: Տրված է պարզ նմանության ֆիզիկական հասկացության բնորոշումը: Ցույց է տրված, որ օրիգինալի և մոդելի նյութի միանման կեռերում պարզ նմանության պահպանման համար անհրաժեշտ է, որպեսզի նյութերի առաձգականության երկրաչափական պարամետրերը, որոնք բնութագրում են նրանց ոչ միատարրությունը, պահպանվեն α մասշտաբով: Միայն այս պայմանի պահպանման դեպքում հնարավոր է խույս տալ մասշտաբային էֆեկտից: Այստեղից հետևում է օրիգինալի համար կարևոր մի եզրակացություն, այն է՝ մոդելի համար վերցված ստուգման նմուշները պետք է տարբերվեն օրիգինալի համար վերցված ստուգման նմուշներից α անգամ: Ցույց է տրված դեպքերից մեկը, երբ այս պահանջը հնարավոր է մեղմացնել: Տրված է ֆիզիկական ստույգ նմանության բնորոշումը ամենաընդհանուր դեպքում: Առաջարկված է հետևյալ թեորեմը՝ եթե ֆիզիկականորեն իրար նման մարմինների անսամբլը $[A_i]$ և $[A'_i]$ բևեռատորերին իրար նման պատահույթին ամենով, ապա նրանցում առաջացող լարումները, դեֆորմացիաները, տեղափոխությունները և այլ մեխանիկական մեծությունները նույնպես կլինեն ֆիզիկական տեսակետից իրար նման:

Հիշված թեորեմի նշանակությունը կայանում է տարածվել նաև պատահական բնութագրումների դեպքի վրա, որի համար պահանջվում է միայն, որպեսզի բնութագրումները իրարից տարբերվեն նմանության միանման բազմապատկիչով և նրանց մոտ լինի միանման ֆիզիկայնություն: Թեորեմի տարած-

վում է նաև կայծալքի մարմինների վրա. միայն թե նրանց միատեսակ տարրերը պետք է լինեն իրար նման՝ նմանության միանման բազմապատկիչների առկայության դեպքում, իսկ մինակարգությունը պետք է արտահայտի նույնությունը:

Շարադրված տեսությունը հնարավորություն է տալիս սահմանելու միատեսակ երկրային կառուցվածքների մինակարգային հատկությունները. այդ կառուցվածքների մոդելների մինակարգային հատկությունների ուսումնասիրման միջոցով, որը հավանաբար հանդիսանում է խոշոր օբյեկտների հիշված հատկությունների ուսումնասիրման եղանակի հնարավորությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. Г.* „Известия АН Армянской ССР“, серия ТН, т. XIV, № 1, 1961.
2. То же, т. X, № 6, 1957.