

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

П. А. МАТЕВОСЯН

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА МАШИНАХ НЕПРЕРЫВНОГО
ДЕЙСТВИЯ

Расчеты различных электрических цепей в целом ряде случаев сводятся к решению матричных уравнений вида

$$M\bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

где M — неособая, квадратная, в ряде случаев симметричная, в общем случае несимметричная матрица параметров электрической цепи;

$\bar{x}$ — многомерный вектор искомых неизвестных,

$\bar{b}$ — многомерный вектор заданных величин.

Существует целый ряд аналитических и численных методов решения таких уравнений, однако все эти методы (метод исключений, метод разложения на треугольную матрицу, метод последовательных приближений, метод релаксации и др.) в большинстве случаев связаны с громоздкими вычислениями.

Вычислительные машины непрерывного действия (ВМНД), предназначенные, главным образом, для решения дифференциальных уравнений, в целом ряде случаев могут быть успешно использованы для решения матричных уравнений вида (1).

Целесообразность использования ВМНД для решения таких уравнений особенно возрастает, когда требуется находить решения уравнений при различных значениях параметров электрической цепи и различных величинах $\bar{b}$. Здесь путем изменения коэффициентов усиления отдельных операционных усилителей, соответствующих параметрам электрической цепи, за сравнительно небольшое время можно получить решение большого числа различных уравнений. Существуют также задачи, где отдельные схемы моделирования матричных уравнений входят в состав более сложных схем, описываемых в общем случае дифференциальными уравнениями.

За последние годы разработан ряд методов моделирования уравнений вида (1) на ВМНД, из числа которых наиболее простым, с точки зрения использования наименьшего числа решающих элементов, считается метод прямого моделирования [9]. Здесь каждое уравнение

системы разрешается относительно одного из неизвестных, после чего составляется „машинное“ уравнение. Однако в практике этим методом пользуются мало, так как в большинстве случаев собранная на машине схема дает неустойчивое решение.

В общем случае для системы n -уравнений с n неизвестными возможно $n!$ различных вариантов разрешения уравнений относительно неизвестных.

Как показала практика, из числа всех этих вариантов только несколько позволяют на ВМНД получить устойчивые решения, а все остальные варианты оказываются неустойчивыми.

Исследование показало, что при решении алгебраических уравнений на ВМНД благодаря наличию в решающих усилителях паразитных элементов, главным образом, паразитной емкости в обратной связи усилителя фактически решаются дифференциальные уравнения [7], [11], коэффициенты которых зависят от выбранного варианта разрешения уравнений относительно неизвестных.

В практике при решении матричных уравнений не всегда удобно составлять указанное дифференциальное уравнение и исследовать полученные коэффициенты методами теории устойчивости, так как это связано с большим объемом вычислений.

Учитывая ряд особенностей матричных уравнений, можно будет воспользоваться упрощенными приемами для выбора варианта, приводящего к устойчивому решению на ВМНД.

Исследование показало, что в общем случае все условия устойчивости [11], кроме условия $\left\| \frac{a_{11}}{a_{11}} \right\|^n > 0$, зависят, как от значений коэффициентов исследуемых уравнений, так и от значений паразитных емкостей в обратной связи усилителей.

Выражение $\left\| \frac{a_{11}}{a_{11}} \right\|^n$ представляет собой матрицу преобразованной системы из n -уравнений, полученной из заданной системы при составлении „машинных“ уравнений для решения методом прямого моделирования.

Выполнение условия $\left\| \frac{a_{11}}{a_{11}} \right\|^n > 0$ зависит от выбранного варианта преобразования уравнений, в то время как все остальные условия при всех вариантах можно будет удовлетворить путем подключения в обратную связь одного или двух усилителей емкости порядка 100 пф.

Исходя из опыта моделирования большого числа уравнений рассматриваемого вида, следует заметить, что при удовлетворении указанного условия почти во всех случаях было получено устойчивое решение без какого-либо подключения в обратную связь усилителей дополнительных емкостей.

Члены разложения $\left\| \frac{a_{11}}{a_{11}} \right\|^n$ представляют собой частное от деле-

ния членов разложения определителя заданной системы уравнений на один из них, причем последний представляет собой произведение коэффициентов при неизвестных, относительно которых разрешено каждое уравнение системы.

Знак $\begin{bmatrix} a_{ii} \\ a_{ii} \end{bmatrix}$ зависит от того, относительно каких неизвестных разрешается заданная система уравнений, так как при преобразовании уравнений знаки этих неизвестных представляются положительными.

При решении матричных уравнений электрических цепей (как было отмечено выше) приходится иметь дело с неособой, квадратной, и ряде случаев симметричной, в общем случае несимметричной матрицей параметров электрической цепи. Так, в частности, матрица коэффициентов уравнений контурных токов электрических цепей является симметричной, в каждой строке которой абсолютное значение элемента главной диагонали больше суммы абсолютных значений остальных элементов этой же строки. При моделировании такой системы уравнений следует каждое уравнение системы выразить относительно неизвестного при диагональном элементе.

При выборе такого варианта разрешения уравнений относительно неизвестных условие $\left\| \frac{a_{ii}}{a_{ii}} \right\|_1^* > 0$ будет всегда выполняться, так как при моделировании такого типа уравнений корни характеристического уравнения, составленного на основе указанного ранее дифференциального уравнения, будут находиться в пределах круга в левой половине плоскости комплексного переменного [10], в то время как для удовлетворения условия $\left\| \frac{a_{ii}}{a_{ii}} \right\|_1^* > 0$ достаточно, чтобы корни характеристического уравнения находились бы во всей левой половине плоскости комплексного переменного.

При расчете электрических цепей синусоидального тока пользуются символическим методом, при котором токи, напряжения, сопротивления и проводимости выражаются при помощи комплексных величин.

В общем случае систему из n комплексных уравнений вида

[illegible]

можно преобразовать в систему из $2n$ уравнений с действительными составляющими путем разделения комплексных уравнений на уравнения с действительными и мнимыми составляющими, которые представим так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 - b_{11}y_1 + a_{12}x_2 - b_{12}y_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_{1n}y_n &= V_1 \\ b_{11}x_1 + a_{11}y_1 + b_{12}x_2 + a_{12}y_2 + \dots + b_{1n}x_n + a_{1n}y_n &= 0 \\ a_{21}x_1 - b_{21}y_1 + a_{22}x_2 - b_{22}y_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_{2n}y_n &= V_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 - b_{n1}y_1 + a_{n2}x_2 - b_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}x_n - b_{nn}y_n &= V_n \\ b_{n1}x_1 + a_{n1}y_1 + b_{n2}x_2 + a_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}x_n + a_{nn}y_n &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В системе уравнений (2), составленных по методу контурных токов, уравнения, в которых $|a_{ii}| > |b_{ii}|$, в качестве первого варианта следует выразить относительно неизвестных при коэффициенте a_{ii} , а уравнения, в которых $|b_{ii}| > |a_{ii}|$ следует выразить относительно неизвестных при b_{ii} .

На большом числе примеров выявлено, что при преобразовании уравнений с произвольно выбранными коэффициентами, при котором каждое уравнение системы разрешается относительно неизвестных, произведение коэффициентов которых дает наибольший член разложения определителя заданной системы, в большинстве случаев усло-

ние $\left| \frac{a_{ii}}{a_{ii}} \right|_1 > 0$ выполнялось. В этом можно также убедиться из рассмотрения композиции законов распределения значений всех членов разложения определителя заданной системы уравнений. Здесь, в частности, весьма грубо можно предположить, что величина каждого члена разложения, кроме наибольшего по абсолютной величине, подчиняется закону распределения равной вероятности, область значений которых ограничена пределами, равными абсолютной величине наибольшего члена разложения определителя.

Конечно не исключена возможность моделирования уравнений, коэффициенты которых могут иметь значение, когда условие $\left| \frac{a_{ii}}{a_{ii}} \right|_1 > 0$, с выбором отмеченного выше первого варианта не будет выполняться. В таком случае следует установить второй по абсолютной величине после наибольшего член разложения и относительно неизвестных при коэффициентах этого члена разложения разрешить уравнения системы. В этом варианте условие устойчивости должно выполняться еще с большей вероятностью, так как невыполнение этого условия в первом варианте в значительной степени зависит от знака второго по абсолютной величине члена разложения определителя.

Надо отметить, что целесообразность выбора в первую очередь именно таких вариантов связано также с точностью получаемого решения, так как при этом в схеме моделирования имеет место наименьшее число контуров, произведение коэффициентов усиления которых больше единицы.

При моделировании матричных уравнений с произвольным значением коэффициентов наибольший по абсолютной величине член разложения определителя, в частности, можно установить выборочным расчетом отдельных членов разложений, принимая во внимание только большие по абсолютной величине элементы определителя.

Помимо описанного способа моделирования матричных уравнений с произвольным значением коэффициентов находит применение и ряд других [9, 10, 12], из числа которых наиболее часто используют следующие:

а) заданную матрицу коэффициентов преобразуют к треугольному виду либо умножают ее на транспонированную матрицу [10]. В обоих случаях уравнения преобразуются к виду, позволяющему получить устойчивое решение на ВМНД. Однако здесь число вычислений, связанных с преобразованием первоначально заданной матрицы, довольно большое. Кроме того, в результате такого преобразования в новых уравнениях приходится иметь дело с другими коэффициентами, что особенно неудобно при исследовании влияния на решение уравнений первоначально заданных коэффициентов.

б) заданную систему уравнений представляют в виде системы дифференциальных уравнений путем добавления к правой части каждого уравнения производной от неизвестных заданной системы [12]. Полученную систему уравнений решают как обычную систему дифференциальных уравнений. Однако этот способ никаких новых преимуществ не дает по сравнению с описанным в настоящей статье, так как и в этом случае для получения решения требуется выполнение необходимых условий устойчивости. Кроме того, для моделирования и таких уравнений на ВМНД требуется еще дополнительно и дифференцирующих усилителей.

В заключение следует отметить, что число уравнений, решаемых на современных ВМНД, ограничено объемом этих машин. Так на машине МЛ—2 возможно решать систему до 12 алгебраических уравнений, на МПТ—9—систему 15 уравнений.

Пример: Установить значения активной P_i и реактивной Q_i мощности в начале и в конце линии электропередач, описываемой уравнениями

$$160000 \epsilon^{j\theta} = e^{j\theta} (P_1 + jQ_1) (6,34 - j235,5) + (P_2 + jQ_2) (-3,2 - j360) \quad (4)$$

$$16000 = e^{j\theta} (P_1 + jQ_1) (-3,2 - j360) + (P_2 + jQ_2) (6,34 - j235,5)$$

при значениях угла θ , изменяемых в пределах от 0 до 100° через каждые 10°.

Написанную систему уравнений преобразуем к виду

$$10000 \cos \delta = (6,34 \cos \delta + 235,5 \sin \delta) P_1 - (6,34 \sin \delta - 235,5 \cos \delta) Q_1 - \\ - 3,2 P_2 + 360 Q_2$$

$$160000 \sin \delta = (-235,5 \cos \delta + 6,34 \sin \delta) P_1 + (6,34 \cos \delta + 235,5 \sin \delta) Q_1 - \\ - 360 P_2 - 3,2 Q_2$$

$$1660000 = (3,2 \cos \delta + 360 \sin \delta) P_1 + (3,2 \sin \delta + 360 \cos \delta) Q_1 + 6,34 P_2 + \\ + 235,5 Q_2$$

$$0 = -(3,2 \sin \delta - 360 \cos \delta) P_2 - (3,2 \cos \delta - 360 \sin \delta) Q_1 - 235,5 P_2 + 6,34 Q_2 \quad (5)$$

Написанную систему 4 уравнений возможно разрешить относительно неизвестных 24 различными вариантами. Однако можно показать, что только небольшая часть из них позволит получить на ВМЧД устойчивое решение и что наибольшая точность решения будет соответствовать варианту, в котором уравнения системы разрешены относительно неизвестных, произведение которых дает наибольший член разложения определителя заданной системы уравнений.

После установления наибольшего члена разложения при $\delta = 0$ уравнения (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} Q_2 &= 444 - 0,018 P_1 + 0,009 P_2 - 0,654 Q_1, \\ P_2 &= -0,654 P_1 + 0,018 Q_1 - 0,009 Q_2, \\ Q_1 &= 444 + 0,009 P_1 - 0,018 P_2 - 0,654 Q_2, \\ P_1 &= -0,654 P_2 - 0,009 Q_1 + 0,018 Q_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в выбранном варианте первое уравнение разрешено относительно Q_2 , второе — относительно P_2 , третье — Q_1 и четвертое — P_1 .

На основе составленной системы уравнений построена блок-схема (рис. 1). Масштаб всех неизвестных принят одинаковым и равным 10 вольтам на единицу.

На основе составленной блок-схемы (рис. 1) была набрана схема на машине ИПТ-5 и получено устойчивое решение.

Далее были подсчитаны коэффициенты уравнений (5) при значениях $\delta = 10^\circ, 20^\circ$ и т. д. 100° и с помощью делителей напряжения ИПТ-5 были введены в схему моделирования.

В результате с помощью машины ИПТ-5 найдены с точностью от 0,2 до 5% значения P_1, P_2, Q_1, Q_2 для всех указанных значений δ . Точность решения в значительной степени зависит от тщательности установки на машине коэффициентов уравнения.

В ряде случаев в подобных задачах может оказаться, что при изменении коэффициентов уравнений, на определенной стадии установленный первоначально наибольший член разложения определителя станет меньше других членов разложения. Тогда построенная схема моделирования может дать неустойчивое решение. В этом случае следует описанным выше способом найти новый вариант разрешения

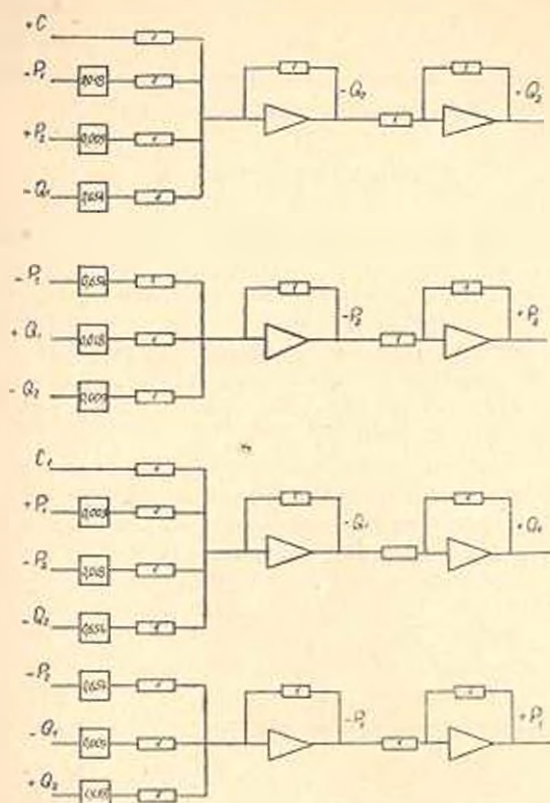


Рис. 1.

уравнений системы относительно неизвестных и построить на ВММД новую схему.

Институт энергетики АН Армянской ССР

Поступило 17.IV.1962 г.

Պ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԴՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՆ ՄԵԲԵՆԱՆԵՐԻ ՎՐԱ ԻՋԵՏՐԱԿԱՆ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՄԱՍԼԱՄԱՅՐԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Աշխատանքը նվիրված է անընդհատ դործողության հաշվիչ մեքենաների վրա էլեկտրական շղթաների մաքսիմալիզացիային (մատրիցային) հավասարումների ուղղակի եղանակով մոդելացմանը, որի ղեկավարում սխեմայի լուրջաքանչյուր հավասարումը որոշվում է անհայտներից որևէ մեկի նկատմամբ: Ինչպիսիք է տվել պրակտիկան ու անհայտներով ու հավասարումների սխեմայի ու տարբերակների հնարավոր լուծումներից միայն մի քանիսն են թույլ տալիս հաշվիչ մեքենաների վրա ստանալ կախյալ լուծում, իսկ մնացած բոլոր պարբերակները բերում են անկախ լուծման: Աշխատանքում, առաջին պարբերակի դերում, առաջարկվում է կախյալ լուծում ստանալու համար սխեմայի

համապատասխանորդ լուծել ախն հնչալսնորի նկատմամբ: որոնց դործակիցների արտադրյալը ապրիս է սխառմի բացված որոշիչի ամենամեծ անգամը: նման տարրերակի ընտրութլան նպատակահարմարութլունը հաստատոված է պրակտիկալում մեծ թվով համապատասխանորի լուծման փորձով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вороков Р. А. Общая теория четырехполюсников и многополюсников. Госэнергоиздат, 1951.
2. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд. АН СССР, 1951.
3. Сизорский В. П. Общая теория четырехполюсника. Изд. АН УССР, 1955.
4. Carbeiler P. Matrix analysis of electric networks. New York, John. Wiley, 1950.
5. Synge V. I. The fundamental theorem of electrical networks. Quart Appl. Math., 1951, v. 9, № 2, 1953, № 11, № 2.
6. Ленов Н. Н. Об устойчивости электронных моделирующих схем с усилителями постоянного тока. Цифровая техника и вычислительные устройства. Изд. АН СССР. Институт электронных управляющих машин. Москва, 1959.
7. Гродштейн И. С., Тафт В. А. Исследование влияния собственных параметров усилителей в матричных системах. Изд. АН СССР, № 1, 1946.
8. Брук И. С. О некоторых методах механического решения системы линейных алгебраических уравнений. Журн. "Электричество" № 11, 1945.
9. Этерман И. И. Математические машины непрерывного действия. Машгиз, Москва, 1937.
10. Кобринский И. Е. Математические машины непрерывного действия. ГИТЭЛ, Москва, 1954.
11. Матевосян П. А. Некоторые вопросы построения электронных устройств для решения алгебраических уравнений. Тр. семинара по точности в машинном построении и приборостроении. Вып. 15, 1961.
12. Корн Г., Корн Т. Электронные моделирующие устройства, ИИЛ, 1955.