А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 64 НОЯБРЬ, 2021 ВЫПУСК 4

БЕЛЫЕ КАРЛИКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОРОДНОГО ШАРА, С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ОТО

Г.С.БИСНОВАТЫЙ-КОГАН[1,2], Е.А.ПАТРАМАН[1]

Поступила 1 сентября 2021

Предельная масса холодных белых карликов впервые была вычислена Е.Стонером в рамках приближенной модели однородной звезды, и была вскоре уменьшена на ~20% в работах С.Чандрасекара и Л.Д.Ландау, на основе точного решения уравнений для равновесия звезды. Здесь рассмотрены однородные модели белых карликов с учетом эффектов общей теории относительности и влияния конечной температуры. Решения получены в виде конечных аналитических формул и, для масс, не более чем на ~20% отличаются от точных решений, получаемых при численном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия звезды.

Ключевые слова: *белые карлики: однородная модель: общая теория относительности*

1. *Введение*. При исследовании строения белых карликов было обнаружено, что их равновесие возможно только для масс, не превышающих некоторый предел, который известен как Чандрасекаровский. Для углеродно-кислородного химического состава, где на один электрон приходится два нуклона, $\mu_e = 2$, этот предел равен $\approx 1.46 M_\odot$. Впервые вывод о существовании верхнего предела массы для холодных звезд, равновесие которых поддерживается давлением вырожденных электронов, был сделан в работе Стонера [1], который рассматривал модель белого карлика однородной плотности, см. также [2]. Он обобщил рассмотрение давления вырожденных электронов, сделанное в работах [3,4] на случай большой плотности в условиях ультрарелятивистского вырождения, в котором уравнение состояния для холодного вещества принимает вид [5]

$$P(\rho) = \frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c}{\left(\mu_e m_u\right)^{4/3}} \rho^{4/3} = K \rho^{4/3} . \qquad (1)$$

Здесь μ_e - количество нуклонов на один электрон, m_u - атомная единица массы, равная 1/12 массы изотопа ^{12}C. Масса политропной звезды, соответствующей $\gamma = 4/3$, $n = 3$, согласно теории Эмдена, не зависит от плотности и однозначно определяется параметром K в виде [5]

$$M_p = 4\pi\left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} M_3\,, \quad M_3 = 2.018\,. \qquad (2)$$

Используя (2), Чандрасекар [6] и Ландау [7], независимо и почти одновременно получили для уравнения состояния (2) предельную массу белого карлика в виде

$$M_{wd} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{M_3}{(\mu_e m_u)^2} = \frac{5.83}{\mu_e^2} M_\odot\,. \qquad (3)$$

Для определения предельной массы наблюдаемых белых карликов Чандрасекар [6], следуя Стонеру [1], использовал значение $\mu_e = 2.5$, получив значение $M_{wd} = 0.933 M_\odot$. Это уточняло значение Стонера $M_{wd} = 1.1 M_\odot$, полученное при том же $\mu_e = 2.5$ в модели с однородной плотностью. Из теории эволюции звезд, а также из наблюдений следует, что почти все белые карлики состоят из смеси углерода ^{12}C и кислорода ^{16}O, для которой $\mu_e = 2$ [8], а $M_{wd} = 1.46 M_\odot$. В работе [7] впервые было получено реалистическое значение предела массы белого карлика, который заслуживает более справедливое название, как предел Стонера-Чандрасекара-Ландау.

Отметим, что здесь приводятся значения предельных масс белых карликов с использованием уточненных современных величин для всех констант, что привело к отличию на несколько процентов от величин, приведенных в оригинальных работах.

В данной работе однородная модель используется для построения приближенных моделей белых карликов произвольной массы при конечной температуре с учетом пост-ньютоновских поправок к ньютоновской гравитации за счет эффектов общей теории относительности (ОТО). Из сравнения результатов для предельных масс белых карликов в точной и однородной моделях, ошибки в определении всех величин в однородной модели составляют 20%.

2. *Белые карлики в приближении шара постоянной плотности.* Для приближенного рассмотрения однородных звезд взят энергетический метод, использованный Стонером [1] для белых карликов, и позже для общего случая в работах [9,10]. Распределение плотности принимается заданным, с единственным параметром в виде центральной плотности, при изменении которой изменения в звезде происходят гомологически.

Для однородных звезд таким параметром является постоянная по звезде плотность. Запишем полную энергию однородной звезды ε в виде

$$\varepsilon = E_T M + \varepsilon_G = E_T M - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} = E_T M - \frac{3}{5} G \left(\frac{4\pi M^5}{3}\right)^{1/3} \rho^{1/3}\,. \qquad (4)$$

Здесь E_T - внутренняя энергия единицы массы, гравитационная энергия однородного шара ε_G определена в [11]. Равновесное состояние и условие устойчивости для звезды массы M определяются, соответственно, соотношениями

$$0=\frac{d\,\varepsilon}{d\,\rho^{1/3}}=3MP\rho^{-4/3}-\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi M^5}{3}\right)^{1/3};\quad \frac{d^2\,\varepsilon}{d\left(\rho^{1/3}\right)^2}=9MP\rho^{-5/3}\left(\gamma-\frac{4}{3}\right)>0. \tag{5}$$

Здесь использованы термодинамические соотношения [12]

$$P=\rho^2\left(\frac{\partial E_T}{\partial\rho}\right)_{|S};\quad \gamma=\left(\frac{\partial\ln P}{\partial\ln\rho}\right)_{|S}. \tag{6}$$

Из первого соотношения для равновесия в (5) получаем единственное решение для массы однородной звезды M_u, в случае уравнения состояния $P=K\rho^{4/3}$, в виде

$$M_u=5.463\left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}. \tag{7}$$

Из сравнения масс M_u из (7) и M_p из (3) получаем для предельной массы

$$M_u=\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{3}}{M_3}M_{ud}=1.199\,M_{ud}. \tag{8}$$

Таким образом, приближенное значение для предельной массы однородной звезды, по Стонеру, примерно на 20% превышает точное. Для произвольного уравнения состояния из (5) получаем следующее выражение для зависимости массы звезды от плотности

$$M_u=5.463\left(\frac{P\rho^{-4/3}}{G}\right)^{3/2}. \tag{9}$$

Для холодных белых карликов с уравнением состояния [5]

$$P=\frac{m_e^4c^5}{24\pi^2\hbar^3}\left[y\left(2y^2-3\right)\sqrt{y^2+1}+3\sinh^{-1}y\right],\quad y=\left(\frac{3\pi^2\rho}{\mu_e m_u}\right)^{1/3}\frac{\hbar}{m_e c}=\left(\frac{1.027\rho}{10^9\mu_e}\right)^{1/3} \tag{10}$$

получаем приближенную зависимость $M(\rho)$ для белого карлика в однородной модели, представленную сплошной линией на рис.1. В ультрарелятивистском пределе из (10) получаем уравнение состояния (1), из которого следует приближенное значение предельной массы (7), (8). При учете малых поправок за счет отклонения от ультрарелятивистского газа при $y>>1$ и малых температурных поправок $\alpha=m_ec^2/kT>>1$, уравнение состояния принимает вид [5]

$$P = \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} y^4 \left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2}\right) =$$
$$= P(\rho) = \frac{\left(3\pi^2\right)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c}{\left(\mu_e m_u\right)^{4/3}} \rho^{4/3} \left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2}\right). \tag{11}$$

Тогда в однородной модели зависимость массы от плотности при больших плотностях, с учетом (9), записывается в виде

$$M_u = 5^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{\left(\mu_e m_u\right)^2} \left(1 - \frac{1}{y^2} + \frac{2\pi^2}{3\alpha^2 y^2}\right)^{3/2}. \tag{12}$$

3. *Модели однородных белых карликов с учетом малых поправок на ОТО.* Рассмотрим модели однородных белых карликов с учетом пост-ньютоновских поправок на ОТО.

Для равновесных звезд пост-ньютоновские поправки к энергии рассчитаны в [9], см. также [13] в интегральном виде, которые для однородного шара вычисляются аналитически:

$$\Delta E = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 ,$$
$$I_1 = -\frac{G}{c^2} E_T \int m \frac{dm}{r} = -\frac{9}{25} \frac{G^2}{c^2} \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{2/3} M^{7/3} ,$$
$$I_2 = -\frac{G^2}{2c^2} \int m^2 \frac{dm}{r^2} = -3^{1/3} \frac{G^2}{14c^2} (4\pi\rho)^{2/3} M^{7/3} ,$$
$$I_3 = -\frac{G}{c^2} \int \left(\int E_T dm\right) \frac{dm}{r} = -\frac{9}{25} \frac{G^2}{c^2} \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{2/3} M^{7/3} , \tag{13}$$
$$I_4 = \frac{G^2}{c^2} \int \left(\int \frac{m dm}{r}\right) \frac{dm}{r} = 3^{4/3} \frac{G^2}{35c^2} (4\pi\rho)^{2/3} M^{7/3} ,$$
$$I_5 = -\frac{G^2}{c^2} \int \left(\int m r dr\right) \frac{m dm}{r^4} = -3^{1/3} \frac{G^2}{35c^2} (4\pi\rho)^{2/3} M^{7/3} .$$

В итоге получаем поправку на ОТО для однородной звезды в виде

$$\Delta E = -\frac{6}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{G}{c^2} M^{5/3} E_T \rho^{1/3} - \frac{3}{70} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} M^{7/3} \rho^{2/3} . \tag{14}$$

Для политропного шара имеют место соотношения [5]

$$\varepsilon_T = E_T M = -\frac{n}{3} \varepsilon_G = \frac{n}{5} G \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} M^{5/3} \rho^{1/3} . \tag{15}$$

Учитывая (15) в первом члене (14), получаем выражение поправки на ОТО для политропной звезды однородной плотности в виде

$$\Delta E = -1.982 \frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho^{2/3} . \tag{16}$$

Для эмденовской политропной модели с $n=3$ поправки на ОТО составляют [9]

$$\Delta E = -0.93 \frac{G^2}{c^2} M^{7/3} \rho^{2/3} . \tag{17}$$

При учете поправки на ОТО приближенное уравнение равновесия в однородной модели, с учетом (5) и (16), запишется в виде

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\varepsilon}{d\rho^{1/3}} = 3MP\rho^{-4/3} - \frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi M^5}{3}\right)^{1/3} + \frac{d\Delta E}{d\rho^{1/3}} = \\ = 3MP\rho^{-4/3} - \frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi M^5}{3}\right)^{1/3} - 3.964\frac{G^2}{c^2}M^{7/3}\rho^{1/3} . \end{aligned} \tag{18}$$

Зависимость $M(\rho)$ в однородной модели белого карлика с учетом эффектов ОТО, следующая из (18), с использованием уравнения состояния (10), приведена на рис.1. Максимум массы достигается при $\rho_m = 4.689 \cdot 10^9$ г/см^3, $M_m = 1.672\, M_\odot$. Аналогичные кривые для белых карликов в точных политропных моделях построены в работе [10].

Из сравнения видно, что кривые для однородной модели примерно на 20% выше, чем на соответствующих кривых из [10], и теряют устойчивость за счет эффектов ОТО при плотности приблизительно в 5 раз меньшей из-

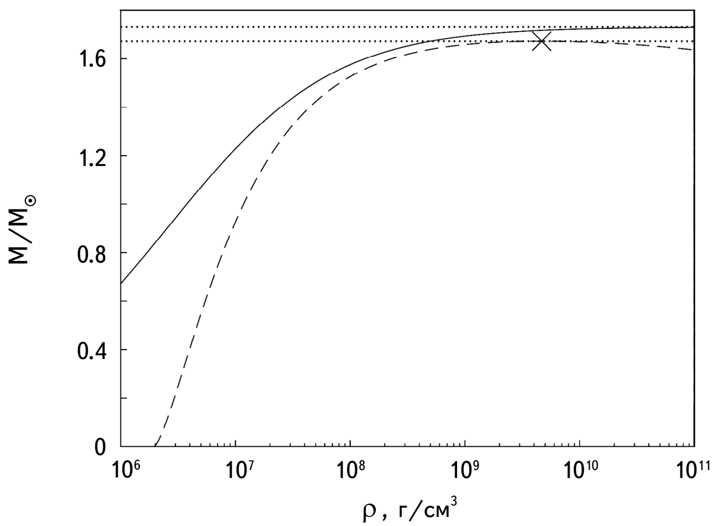

Рис.1. Зависимости массы от плотности без учета и с учетом эффектов ОТО. Сплошной линией обозначена однородная модель без учета эффектов ОТО. Штриховой линией представлена однородная модель с учетом малых поправок на ОТО. Максимум достигается в точке $\rho_m = 4.689 \cdot 10^9$ г/см^3, $M_m = 1.672\, M_\odot$.

за большого влияния этих эффектов в однородной модели, по сравнению с точной политропной моделью $n = 3$. Используя уравнения (11) и (18), получаем уравнение для массы однородного белого карлика с учетом эффектов ОТО при конечной температуре.

$$M = \left(\frac{-\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} + \sqrt{\left(\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\right)^2 + 47.568\frac{G^2}{c^2}\rho^{-1}P}}{7.928\frac{G^2}{c^2}\rho^{1/3}} \right)^{3/2}. \qquad (19)$$

Зависимость массы от плотности однородных белых карликов для разных температур, с учетом эффектов ОТО, приведена на рис.2.

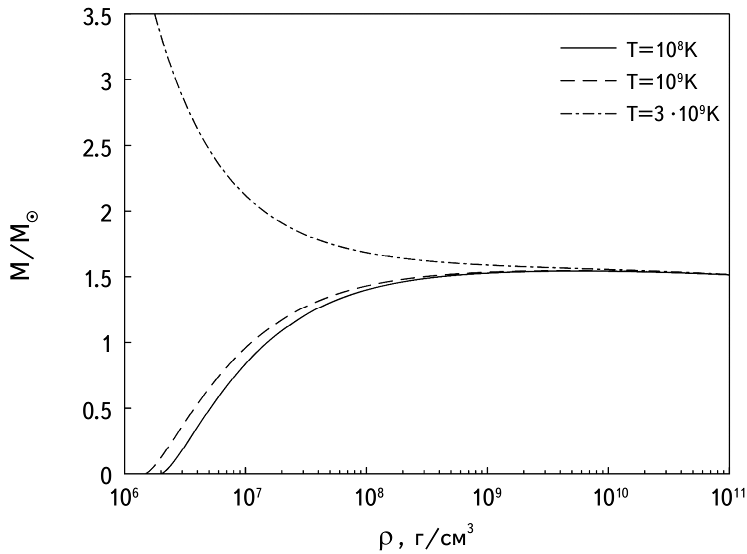

Рис.2. Кривые для изотермических однородных белых карликов при больших плотностях с учетом эффектов ОТО.

Зависимость массы от плотности для изотермических белых карликов в политропной модели получена в работе [10]. Отметим, что влияние эффектов ОТО на устойчивость белых карликов впервые исследовано Капланом [14].

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ 20-02-00455.

[1] Институт космических исследований РАН, Москва, Московский физико-технический институт МФТИ, г. Долгопрудный, e-mail: gkogan@iki.rssi.ru
[2] Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва

WHITE DWARFS IN A UNIFORM SPHERE APPROXIMATION, WITH ACCOUNT OF GENERAL RELATIVITY EFFECTS

G.S.BISNOVATYI-KOGAN[1,2], E.A.PATRAMAN[1]

A limiting mass of cold white dwarfs was first calculated by E.Stoner in the frame of approximate model of a uniform star, and was decreased soon by ~20% in works of S.Chandrasekhar and L.D.Landau, basing on exact solution of stellar equilibrim equations. Uniform models of white dwarfs are considered here with account of General Relativity effects, and influence of a finite temperature. Solutions are obtained in the form of finite analytic formulae, and, for masses, not more than ~20% differ from exact solutions, obtained by numerical integration of differential equations of stellar equilibrium.

Keywords: *white dwarf: uniform model: general relativity*

ЛИТЕРАТУРА

1. *E.C.Stoner*, Phil. Mag., **9**, 944, 1930.
2. *E.G.Thomas*, Phil. Mag., **91**, 3416, 2011.
3. *R.H.Fowler*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **87**, 114, 1926.
4. *J.Frenkel*, Zs. Phys., **50**, 234, 1928.
5. *Г.С.Бисноватый-Коган*, Физические вопросы теории звездной эволюции, М., Наука, 1989.
6. *S.Chandrasekhar*, Astrophys. J., **74**, 81, 1931.
7. *L.D.Landau*, Phys. Zs. Sowjet., **1**, 285, 1932.
8. *E.Schatzman*, White dwarfs, Amsterdam, North Holland, 1958.
9. *Я.Б.Зельдович*, *И.Д.Новиков*, УФН, **86**, 447, 1965.
10. *Г.С.Бисноватый-Коган*, Астрон. ж., **43**, 89, 1966, (Sov. Astron, **10**, 69, 1966).
11. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифщиц*, Теория поля, М., Физматгиз, 2001.
12. *Л.Д.Ландау*, *Е.М.Лифщиц*, Статистическая фозика, М., Наука, 1976.
13. *Я.Б.Зельдович*, *И.Д.Новиков*, Теория тяготения и эволюция звезд, М., Наука, 1971.
14. *С.А.Каплан*, Уч. зап. Львовского гос. ун-та, серия физ-мат., **15**, 109, 1949.