ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XIII, № 3, 1960 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. ХАЧИЯН

К ДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ НА СИЛЫ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

При расчете обычных сооружений на сейсмическое воздействие их представляют в виде жестко заделанного невесомого бруса, несущего сосредоточенные массы (массы перекрытия и часть стены), расположенные на уровне перекрытия (рис. 1).

Деформационное состояние сооружения аналогично деформационному состоянию бруса при учете только деформации сдвига (пунктирная линия на рис. 1).

Рассмотрим динамический расчет такой системы при горизонтальных колебаниях основания по произвольному закону.

1. Обозначим массы через m_i и соответствующие им горизонтальные прогибы через y_i. Силы инерции, развиваемые массами, будут $m_i \ddot{y}_i$. Из равновесия внутренних сил и сил инерций в сечении между массами с индексами $n-1$ и n, где n — число сосредоточенных масс, при свободных колебаниях будем иметь:

Рис. 1

$$m_n \ddot{y}_n + a_n (y_n - y_{n-1}) = 0, \qquad (1.1)$$

где a_n — жесткость соответствующего бруса. В сечении между массами с индексами $n-1$ и $n-2$ получим:

$$m_n \ddot{y}_n + m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + a_{n-1} (y_{n-1} - y_{n-2}) = 0. \qquad (1.2)$$

Учитывая (1.1), (1.2) примет вид:

$$m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + a_{n-1} (y_{n-1} - y_{n-2}) - a_n (y_n - y_{n-1}) = 0. \qquad (1.3)$$

Легко видеть, что уравнение типа (1.3) можно написать для каждой массы. Таким образом, при свободных колебаниях системы получим систему дифференциальных уравнений в виде:

$$m_1 \ddot{y}_1 + a_1 y_1 - a_2 (y_2 - y_1) = 0;$$

. . . .

$$m_{n-1}\ddot{y}_{n-1}+a_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})-a_n(y_n-y_{n-1})=0; \qquad (1.4)$$

$$m_n\ddot{y}_n+a_n(y_n-y_{n-1})=0.$$

Уравнения (1.4) можно получить и с помощью уравнений Лагранжа. Действительно кинетическая и потенциальная энергии системы равны:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{y}_i^2,\quad U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)^2 \qquad (1.5)$$

Совершив дифференциальные операции над (1.5) и подставляя их в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right)-\frac{\partial U}{\partial y_i}=0,$$

легко получить уравнения (1.4).

Полученные уравнения (1.4) принадлежат к так называемым штурмовым системам [1]. Подставив в (1.4)

$$y_k=C_k\sin\omega t, \qquad (1.6)$$

где ω — круговая частота свободных колебаний, получим систему алгебраических уравнений для определения C_i в виде:

$$-m_1C_1\omega^2+a_1C_1-a_2(C_2-C_1)=0;$$

. . . .

$$-m_{n-1}\omega^2C_{n-1}+a_{n-1}(C_{n-1}-C_{n-2})-a_n(C_n-C_{n-1})=0; \qquad (1.7)$$

$$-m_nC_n\omega^2+a_n(C_n-C_{n-1})=0.$$

Приравнивая нулю определитель полученной системы, получим уравнение частот в виде:

$$\Delta_n(\omega^2)=\begin{vmatrix} a_1+a_2-m_1\omega^2 & -a_2\ \ldots & 0\\ -a_2 & a_2+a_3-m_2\omega^2\ \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & a_n-m_n\omega^2\end{vmatrix}=0. \qquad (1.8)$$

для которого имеет место следующее рекурентное соотношение [1]

$$\Delta_n(\omega^2)=(a_{n-1}+a_n-\omega m_n)\,\Delta_{n-1}(\omega^2)-a_n^2\,\Delta_{n-2}(\omega^2) \qquad (1.9)$$

$$k=2,\ 3\ \ldots\ n,\ \Delta_0=1,$$

что существенно облегчает получение уравнений частот при больших числах сосредоточенных масс.

2. Пусть теперь основание системы колеблется в направлении оси y по закону $y_0(t)$.

Заменяя в уравнения (1.4) $\ddot{y}_i$ через $\ddot{y}_i+\ddot{y}_0$, получим уравнения вынужденных колебаний в виде:

$$m_{n-1}(\ddot{y}_{n-1}+\ddot{y}_0)+a_{n-1}(y_{n-1}-y_{n-2})-a_n(y_n-y_{n-1})=0. \qquad (2.1)$$

Для нахождения решения системы (2.1) заменим в них неизвестные величины y_i через обобщение координаты q_i следующим образом:

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} C_{ik}\, q_k(t), \qquad (2.2)$$

где C_{ik} определяются из уравнений (1.7). Подставив выражения (2.2) в уравнения (2.1), получим систему уравнений относительно новых координат q_k:

$$m_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} C_{n-1\,k}\,\ddot{q}_k+\ddot{y}_0\right)+a_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} C_{n-1\,k}\,q_k-\sum_{k=1}^{n} C_{n-2\,k}\,q_k\right)-$$

$$-a_n\left(\sum_{k=1}^{n} C_{nk}\,q_k-\sum_{k=1}^{n} C_{n-1\,k}\,q_k\right)=0. \qquad (2.3)$$

Умножив (2.3) на C_{ij} и суммируя все уравнения получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[C_{ij}\,m_{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} C_{n-1\,k}\,\ddot{q}_k+\ddot{y}_0\right)\right]+\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\left[a_{n-1}\sum_{k=1}^{n} C_{n-1k}\,q_k-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n} C_{n-2\,k}\,q_k\right)\Bigg]-\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\left[a_n\left(\sum_{k=1}^{n} C_{nk}\,q_k-\sum_{k=1}^{n} C_{n-2\,k}\,q_k\right)\right]=0. \qquad (2.4)$$

Используя условия взаимности виртуальных работ (теорема Бетти) в виде [2]

$$m_1 C_{1i} C_{1k}+m_2 C_{2i} C_{2k}+\ .\ .\ .+m_n C_{ni} C_{nk}=0 \qquad (2.5)$$

и соотношение (1.7), получим:

$$\ddot{q}_j+\omega_j^2 q_j=-\frac{\sum_{k=1}^{n} C_{kj}\,m_k}{\sum_{k=1}^{n} C_{kj}^2\,m_k}\,\ddot{y}_0 \qquad (2.6)$$

При составлении дифференциальных уравнений влияние внутреннего трения не учтено. Однако, если рассеяние энергии при колебаниях принять по гипотезе Е. С. Сорокина в форме А. Г. Назарова [3], то дифференциальные уравнения (2.6) с учетом рассеяния энергии будут:

$$\ddot{q}_j + \alpha_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{kj} m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{kj}^2 m_k} \ddot{y}_0 . \qquad (2.7)$$

где α_j — коэффициент внутреннего трения.

Общее решение уравнения (2.7) будет:

$$q_j(t) = e^{-\frac{\alpha_j \omega_j}{2} t} (A_j \sin \omega_j t + B_j \cos \omega_j t) - \frac{1}{\omega_j} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{kj} m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{kj}^2 m_k} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \ddot{y}_0(u)\, e^{-\frac{\alpha_j \omega_j}{2}(t-u)} \sin \frac{2\pi}{T_j} (t-u)\, du \qquad (2.8)$$

При заданном законе движения основания $y_0(t)$ легко по формулам (2.8) и (1.2) определить перемещения $y_i(t)$, а также полные перемещения $y_i(t) + y_0(t)$ и, следовательно, силы инерции при колебаниях. Однако можно определить силы инерции без предварительного знания закона движения основания $y_0(t)$. В самом деле, при колебаниях силы инерции находятся в равновесии с упругими силами следующим образом*:

$$m_k (\ddot{y}_k + \ddot{y}_0) + R_{k1} y_1 + R_{k2} y_2 + \ldots \; R_{kn} y_n = 0, \qquad (2.9)$$

где R_{kr} — сила действующая в точке k, если в точке r выбран единичный прогиб. На основании (2.9) для сейсмической нагрузки в точке k получим:

$$S_k = m_k (\ddot{y}_k + \ddot{y}_0) = -\sum_{s=1}^{n} R_{ks} y_s . \qquad (2.10)$$

Подставив сюда значения (2.2) и (2.8) и принимая, что при $t=0$, $y_i = \dot{y}_i = 0$, будем иметь:

$$S_k = -\sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir}^2 m_i} \left(\sum_{i=1}^{n} C_{ir} R_{ki} \cdot \frac{1}{\omega_r} \times \right. \right.$$

* Здесь пренебрегаются силы неупругого сопротивления.

$$\times \int_0^t \ddot{y}_0(u)\, e^{-\frac{\alpha_r \pi}{T_r}(t-u)} \sin\frac{2\pi}{T_r}(t-u)\, du \Bigg)\Bigg| \qquad (2.11)$$

При свободных колебаниях из (2.9) видно, что имеет место соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ir} R_{ki} = -m_k \omega_r^2 C_{kr}; \qquad (2.12)$$

поэтому по формуле (2.11) получим:

$$S_k = m_k \sum_{r=1}^{n} C_{kr} \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{ir} m_i}{\sum_{i=1}^{n} C_{ir}^2 m_i} \times$$

$$\times \frac{2\pi}{T_r} \int_0^t \ddot{y}_0(u)\, e^{-\frac{\alpha_r \pi}{T_r}(t-u)} \sin\frac{2\pi}{T_r}(t-u)\, du, \qquad (2.13)$$

где $T_r = \frac{2\pi}{\omega_r}$ период r-го тона свободных колебаний. Отметим, что в выражение (2.13) входит один и тот же интеграл

$$F(T_r, \alpha_r, t) = \frac{2\pi}{T_r} \int_0^t \ddot{y}_0(u)\, e^{-\frac{\alpha_r \pi}{T_r}(t-u)} \sin\frac{2\pi}{T_r}(t-u)\, du, \qquad (2.14)$$

характеризующий действия данного землетрясения на упругий маятник с периодом T_r и коэффициентом внутреннего трения α_r.

3. Рекурентное соотношение (1.9), для сооружений, имеющих равные сосредоточенные массы, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга при неизменной жесткости сооружения по высоте (обычные жилые здания), принимает вид

$$\Delta_n(p) = (2-p)\,\Delta_{n-1}(p) - \Delta_{n-2}(p). \qquad (3.1)$$

Частотные уравнения для сооружений, имеющих до пяти этажей, соответственно принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\text{при } n=1 \quad && -p+1=0;\\
&\text{при } n=2 \quad && p^2-3p+1=0;\\
&\text{при } n=3 \quad && -p^3+5p^2-6p+1=0; \qquad (3.1\\
&\text{при } n=4 \quad && p^4-7p^3+15p^2-10p+1=0;\\
&\text{при } n=5 \quad && -p^5+9p^4-28p^3+35p^2-15p+1=0.
\end{aligned}$$

где $$p = \frac{ml}{kFG}\omega^2; \tag{3.3}$$

m — масса сосредоточенной нагрузки;

l — расстояние между массами;

kFG — обобщенная жесткость эквивалентной фиктивной балки, работающей на сдвиг. Для рамных конструкций $\frac{l}{kFG}$ можно заменить величиной $\frac{l^3}{12EI}$, где E модуль упругости, а I — суммарный момент инерции стоек.

Корни уравнений (3.2), которые легко вычислить по методу Лобачевского — Греффе [3], следующие:

$$
\begin{aligned}
&\text{при } n=1 \quad p_1=1;\\
&\text{при } n=2 \quad p_1=0{,}382,\ p_2=2{,}618;\\
&\text{при } n=3 \quad p_1=0{,}198,\ p_2=1{,}555,\quad p_3=3{,}252;\\
&\text{при } n=4 \quad p_1=0{,}121,\quad p_2=1,\quad p_3=2{,}345,\quad p_4=3{,}528;\\
&\text{при } n=5 \quad p_1=0{,}0811,\quad p_2=0{,}686,\quad p_3=1{,}663;\\
&\qquad\qquad\quad p_4=2{,}822,\quad p_5=3{,}659.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Причем имеет место соотношение $\sum_{i=1}^{n} p_i = 2n-1$.

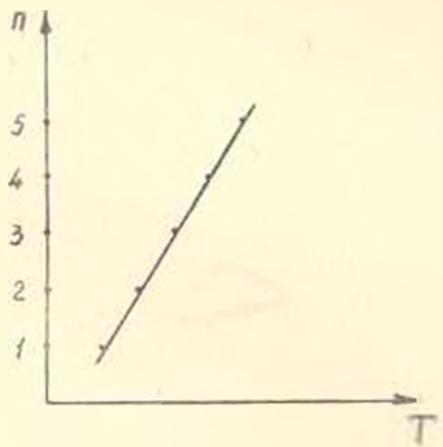

Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость периода свободных колебаний основного тона T от этажности здания. Такую прямолинейную зависимость периода от высоты здания на основании натурных измерений рекомендуют Калифорнийские нормы [6] в виде

$$T = 0{,}05\frac{H}{\sqrt{b}},$$

где H — высота здания; b — ширина здания в рассматриваемом направлении.

Часто возникает вопрос, можно ли здание рассматривать как брус постоянного сечения с преобладанием деформации сдвига. С этой целью были определены частоты колебаний бруса со сосредоточенными массами и эквивалентного бруса с распределенной массой (рис. 3). Для бруса с распределенной массой частоты определились по формулам

$$p_j = \frac{2j-1}{2l}\pi\sqrt{\frac{kFG}{m}}.$$

Результаты этих вычислений показывают, что для сооружений, этажность которых выше четырех, при определении частоты первого и второго тонов их можно с точностью до 10—15% рассматривать как брус постоянного сечения с равномерно распределенной массой при учете только деформации сдвига.

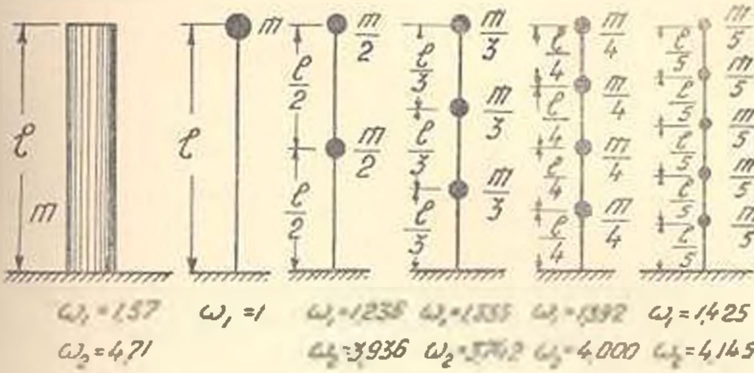

Рис. 3.

Для получения представления о распределении инерционных сил по высоте сооружения в приводимой таблице даются значения коэффициентов

$$\xi_{kr} = C_{kr} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir}^2 m_i} \tag{3.5}$$

Заметим, что для коэффициентов ξ_{kr} имеем

$$\sum_{r=1}^{n} \xi_{kr} = 1 \text{ для } k = 1, 2 \cdots n.$$

Число этажей	По первой форме					По второй форме				
	ξ_{11}	ξ_{21}	ξ_{31}	ξ_{41}	ξ_{51}	ξ_{12}	ξ_{22}	ξ_{32}	ξ_{42}	ξ_{52}
$n=1$	1									
$n=2$	0.723	1,170				0.276	−0.170			
$n=3$	0,513	0.978	1,220			0.353	0.160	−0.283		
$n=4$	0,433	0.813	1,095	1,236		0,333	0,333	0	−0,333	
$n=5$	0,357	0.685	0,957	1,152	1,250	0.298	0.392	0,217	−0,107	−0,365

Число этажей	По третьей форме					По четвертой форме				
	ξ_{13}	ξ_{23}	ξ_{33}	ξ_{43}	ξ_{53}	ξ_{14}	ξ_{24}	ξ_{34}	ξ_{44}	ξ_{54}
$n=3$	0.106	−0,133	0,059							
$n=4$	0.184	−0,063	−0,162	0.120		0,052	−0,080	0.070	−0.027	
$n=5$	0,205	0,069	−0,182	0,131	0,162	0.107	−0,088	−0,034	0,116	−0,063

Вычисление коэффициента C_{kr} существенно облегчается, так как для них получается рекуррентное соотношение в виде:

$$C_{kr} = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta_{n-1}(p)} C_{nr}, \tag{3.6}$$

где

$$\Delta_k(p) = (2-p)\,\Delta_{k-1}(p) - \Delta_{k-1}(p),$$

причем (3.7)

$$\Delta_0=0,\ \Delta_1(p) = p, \quad k=2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ n.$$

Для иллюстрации допустим, что в основании сооружения имеет место сейсмический удар. В рассматриваемом случае выражение (2.14) принимает вид [5]

$$F(T_r, \alpha_r, t) = \frac{2\pi v}{T_r} e^{-\frac{\alpha_r \pi}{T_r} t} \sin \frac{2\pi}{T_r} t, \tag{3.8}$$

где v — скорость основания в момент $t=0$.

Сейсмические нагрузки по формуле (2.13) принимают вид:

$$S_k = m_k \sum_{r=1}^{n} C_{kr} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir} m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{ir}^2 m_i} \cdot \frac{2\pi v}{T_r} e^{-\frac{\alpha_r \pi}{T_r} t} \sin \frac{2\pi}{T_r} t. \tag{3.9}$$

Выражения (3.9) показывают, что максимальные значения сейсмических нагрузок могут получаться в неограниченном интервале времени $0<t<\infty$. Однако, если принять во внимание затухание колебаний, то для получения максимальных значений достаточно ограничиться рассмотрением окрестности первой четверти первого периода [5].

Ниже приводятся максимальные значения сейсмических сил для зданий от одного до пяти этажей при $\alpha_r = 0{,}08$, уменьшенные на величину $D = \sqrt{\frac{mkFG}{l}}\, v$.

Одноэтажное здание

$S_1=0{,}93962$

Двухэтажное здание

$S_1=0{,}70348$	при $t/T_1=0{,}13$
$S_2=0{,}89378$	„ 0,27
$S_1+S_2=1{,}04138$	„ 0,18

Трехэтажное здание

$S_1=0{,}68310$	при $t/T_1=0{,}08$
$S_2=0{,}57974$	„ 0,17
$S_3=0{,}84112$	„ 0,28
$S_2+S_3=1{,}06402$	„ 0,22
$S_3+S_2+S_1=1{,}04971$	„ 0,13

Четырехэтажное здание

$S_1=0{,}68540$	при $t/T_1=$	$0{,}06$
$S_2=0{,}57363$	„	$0{,}13$
$S_3=0{,}52898$	„	$0{,}20$
$S_4=0{,}78665$	„	$0{,}28$
$S_4+S_3=1{,}061573$	„	$0{,}24$
$S_4+S_3+S_2=1{,}08637$	„	$0{,}18$
$S_4+S_3+S_2+S_1=1{,}05172$	„	$0{,}11$

Пятиэтажное здание

$S_1=0{,}71160$	при $t/T_1=$	$0{,}05$
$S_2=0{,}64283$	„	$0{,}11$
$S_3=0{,}53512$	„	$0{,}17$
$S_4=0{,}48541$	„	$0{,}22$
$S_5=0{,}74178$	„	$0{,}28$
$S_5+S_4=1{,}04918$	„	$0{,}25$
$S_5+S_4+S_3=1{,}12208$	„	$0{,}20$
$S_5+S_4+S_3+S_2=1{,}08716$	„	$0{,}14$
$S_5+S_4+S_3+S_2+S_1=1{,}04714$	„	$0{,}09$

При учете только первой формы свободных колебаний максимальные значения сейсмических сил в основании сооружения будут равны:

$$\text{при } n=1 \quad S_1=0{,}93962$$

$$\text{при } n=2 \quad \sum_{i=1}^{2} S_i=1{,}09639$$

$$\text{при } n=3 \quad \sum_{i=1}^{3} S_i=1{,}14539$$

$$\text{при } n=4 \quad \sum_{i=1}^{4} S_i=1{,}16888$$

$$\text{при } n=5 \quad \sum_{i=1}^{5} S_i=1{,}17828$$

Приведенные числовые данные показывают, что максимальные значения сейсмических нагрузок в основании сооружения при сейсмическом ударе почти не зависят от этажности здания как при учете только первой формы колебания, так и с учетом высших форм колебаний.

Эпюры перерезывающих сил, как показывает рис. 4, мало изменяются по высоте. Такой результат нами был получен и для бруса постоянного сечения с равно-

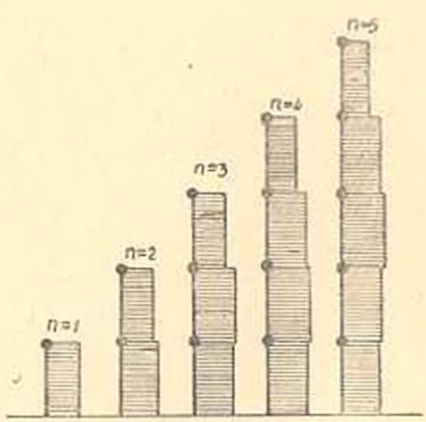

Рис. 4.

мерно распределенной массой при учете только деформаций сдвига [5].

Армянский НИИ
стройматериалов и сооружений

Поступило 27.XI 1959

Է. Ե. ԽԱՉՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԻ ՏԱԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրված են նկ. 1 բերված առաձգական սիստեմի դինամիկական տատանումները, երբ սիստեմի հիմնատակը տատանվում է կամայական օրենքով: Սիստեմի սեփական տատանումների հավասարումները տրված են (1.4) տեսքով, որը թույլ է տալիս ստանալու հաճախականությունների (2.9) ռեկուրենտ բանաձևերը: (2.2) բանաձևերով անցնելով ընդհանրացված կոորդինատների և օգտագործելով համարժեք աշխատանքների փոխադարձելիության (2.5) սկզբունքը, ստացված են ստիպողական տատանումների (2.6) հավասարումները:

Սեյսմիկ ուժերի (տատանումների ժամանակ առաջացող իներցիոն ուժերը) հաշվման համար օգտագործվում են (2.9) հավասարումները: Որոշ ձևափոխություններից հետո սեյսմիկ ուժերի համար, ստացված են (2.13) վերջնական բանաձևերը: Աշտարակային բնույթի շենքերի համար, որոնց դեպքում բոլոր կենտրոնացված մասսաները հավասար են իրար և գտնվում են իրարից հավասար հեռավորությունների վրա, հաճախականությունների հավասարումներից ստացված են (3.1) պարզ ռեկուրենտ հավասարումները:

Մինչև 5 հարկ ունեցող շենքերի համար ստացված են հաճախականությունների (3.2) հավասարումները (3.4) արտահայտությունները տալիս են այդ հավասարումների լուծումները:

Այնուհետև ընդունելով, որ սիստեմի հիմքում տեղի ունի սեյսմիկ հարված, սեյսմիկ ուժերի համար ստացված են (3.9) բանաձևերը: Նկ. 3 տրված են կտրող ուժերի էպյուրաները համապատասխանաբար մինչև 5 հարկ ունեցող շենքերի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Гостехиздат, 1950.
2. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. Машгиз, 1957.
3. *Назаров А. Г.* Метод инженерного анализа сейсмических сил. Изд. АН Армянской ССР, 1959.
4. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, 1950.
5. *Хачиян Э. Е.* „Известия АН Армянской ССР“ (серия тех. наук), т. X, № 6, 1957.
6. *Lateral Forses of Earthquake* and *Wind*. Bya Joint Committee of the San Francisco California Section, ASCE and the Structural Engineers Assocation of Northern, California (Proceedings American Society of Civil Engineers, April, 1951, vol. 77, Separate № 66).