ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XIII, № 1, 1960 Серия технических наук

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. А. МЕЛИК-ВАРТАНЯН

ЗАТУХАНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТ ФАЗЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ И ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В теории фильтров доказывается, что оптимальным решением для функции нормированных характеристических параметров фильтров, являются функции Чебышева; в этом случае синтез дает наименьшее число элементов [5].

Использование полиномов Чебышева в комплексной области — гиперболических чебышевских функций Th_n (Ω), [2], позволяет установить, что между функциями затухания и коэффициентами фазы цепочечных и мостиковых структур и функциями Th_n существует определенная зависимость.

Как известно характеристическая мера передачи симметричных цепочечных и мостиковых фильтров (рис. 1, 2) связана с сопротивлениями плеч соотношениями

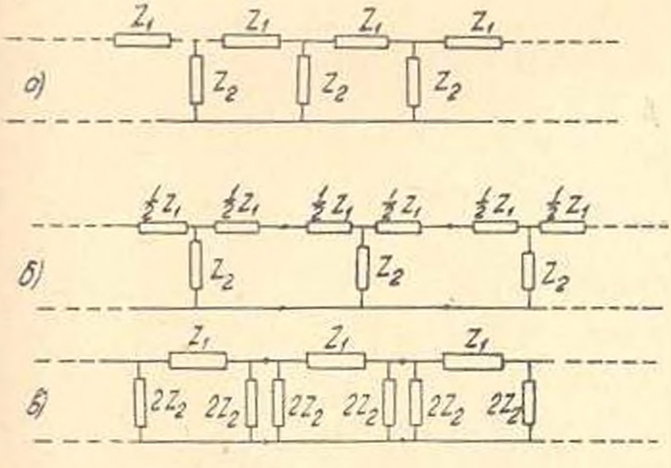


Рис. 1.

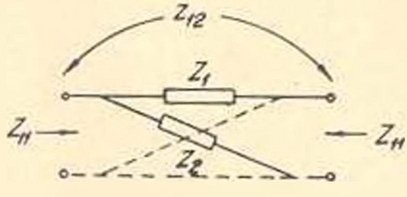


Рис. 2.

$$sh\,\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\,, \tag{1}$$

$$th\,\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}\,. \tag{2}$$

Рассмотрение полиномов Чебышева от комплексного аргумента $-j\Omega$, позволяет прийти к выводу, что выражения (1) и (2) являются частным случаем более общих соотношений:

$$T_n(-j\Omega)=\begin{cases}\mp jshn\,\dfrac{g}{2} & \text{при нечетном } n\\[2mm] \mp chn\,\dfrac{g}{2} & \text{при четном } n\end{cases} \tag{3}$$

связывающих функцию затухания b и коэффициент фазы a с сопротивлениями плеч. При этом

$$g=b+ja. \tag{4}$$

В случае цепочечных фильтров

$$\Omega=\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \tag{5а}$$

в случае мостиковых

$$\Omega=\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2-Z_1}} \tag{5б}$$

Переписав выражение (3) следующим образом

$$j^n\,T_n(-j\Omega)=\begin{cases}shn\,\dfrac{g}{2} & n=1,3\cdots\\[2mm] chn\,\dfrac{g}{2} & n=2,4\cdots\end{cases} \tag{3а}$$

введем понятие гиперболических чебышевских функций $Th_n(\Omega)$

$$Th_n(\Omega)=j^n\,T_n(-j\Omega). \tag{6а}$$

Тогда формула (3а) примет вид

$$Th_n(\Omega)=\begin{cases}shn\,\dfrac{g}{2} & \text{при } n \text{ нечетном}\\[2mm] chn\,\dfrac{g}{2} & \text{при } n \text{ четном.}\end{cases} \tag{6б}$$

Из (6б) следует, что выражения (1) и (2) имеют место при $n=1$, т. е. в случае полиномов первой степени, соответствующих Г-образному полузвену (1) или, условно, полузвену мостикового фильтра (2) (поскольку мостиковая структура не может иметь ползвена).

1. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева, играющие важную роль в теории приближения функций, в тригонометрической форме имеют вид

$$T_n(x) = \cos n \arccos x$$

и представляют собой полиномы степени n, с коэффициентом при старшем члене 2^{n-1}. В алгебраической форме они имеют вид

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right].$$

Придавая n значения целых последовательных чисел, получим:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= x, \\ T_2 &= 2x^2 - 1, \\ T_3 &= 4x^3 - 3x, \\ T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

Все нули полинома Чебышева $T_n(x)$ действительные и простые; они расположены только на основном отрезке $[-1, 1]$ и неограниченно сгущаются с возрастанием n. Расположение нулей полинома таково, что максимумы и минимумы $T_n(x)$, абсциссы которых расположены также на отрезке $[-1, 1]$, строго уравновешены, именно: все максимумы равны $+1$, все минимумы равны -1. Вне основного отрезка $[-1, 1]$ полиномы Чебышева уже не имеют колебательного характера, а монотонно убывают или монотонно возрастают (рис. 3).

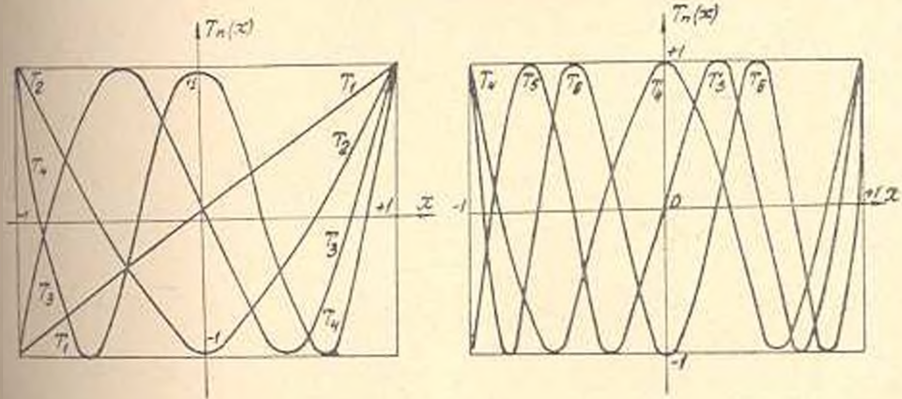


Рис. 3.

Рекуррентное соотношение для последовательного вычисления полиномов таково:

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

2. Частотные характеристики затухания и коэффициента фазы цепочечных схем на комплексной плоскости Ω

Обоснованность введения функции Ω, в качестве аргумента гиперболических чебышевских функций Th_n, вытекает из следующих соображений.

Симметричные цепочечные фильтры, состоящие из сопротивлений Z_1 в продольных ветвях и Z_2 в поперечных, можно представить в виде каскадного соединения Г, Т и П—образных звеньев (рис. 1б, в). Каждое из звеньев, также как и вся цепная схема в целом, полностью характеризуется двумя параметрами—мерой передачи g и характеристическим сопротивлением $Z_т$ или $Z_п$. В зависимости от сопротивлений плеч Z_1 и Z_2, характеристические параметры выражаются следующим образом:

$$sh\,\frac{g}{2}=\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}},$$

$$Z_т=\sqrt{Z_1Z_2}\,\sqrt{1+\frac{Z_1}{4Z_2}},\quad Z_п=\sqrt{Z_1Z_2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{Z_1}{4Z_2}}}.$$

Так как отношение $Z_1/4Z_2$ входит во все три формулы, эти схемы удобно анализировать с помощью нормализованной комплексной частоты

$$\Omega=\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}},$$

являющейся функцией частоты ω.

В общем случае, будучи отвлеченной, она может быть комплексной величиной:

$$\Omega=x+jy. \tag{7}$$

Принимая во внимание (1), (4) и (5а), получим

$$x+jy=sh\,\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}+j\,ch\,\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2} \tag{8}$$

или

$$x=sh\,\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2},$$

$$y=ch\,\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}, \tag{9}$$

откуда следует:

$$\frac{x^2}{sh^2\frac{b}{2}}+\frac{y^2}{ch^2\frac{b}{2}}=1. \tag{10}$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\frac{a}{2}} - \frac{y^2}{\sin^2\frac{a}{2}} = -1. \tag{11}$$

Выражения (10) и (12) являются уравнениями эллипса и гиперболы с совпадающими фокусами в точках $\pm j$ $(y = \pm 1)$.

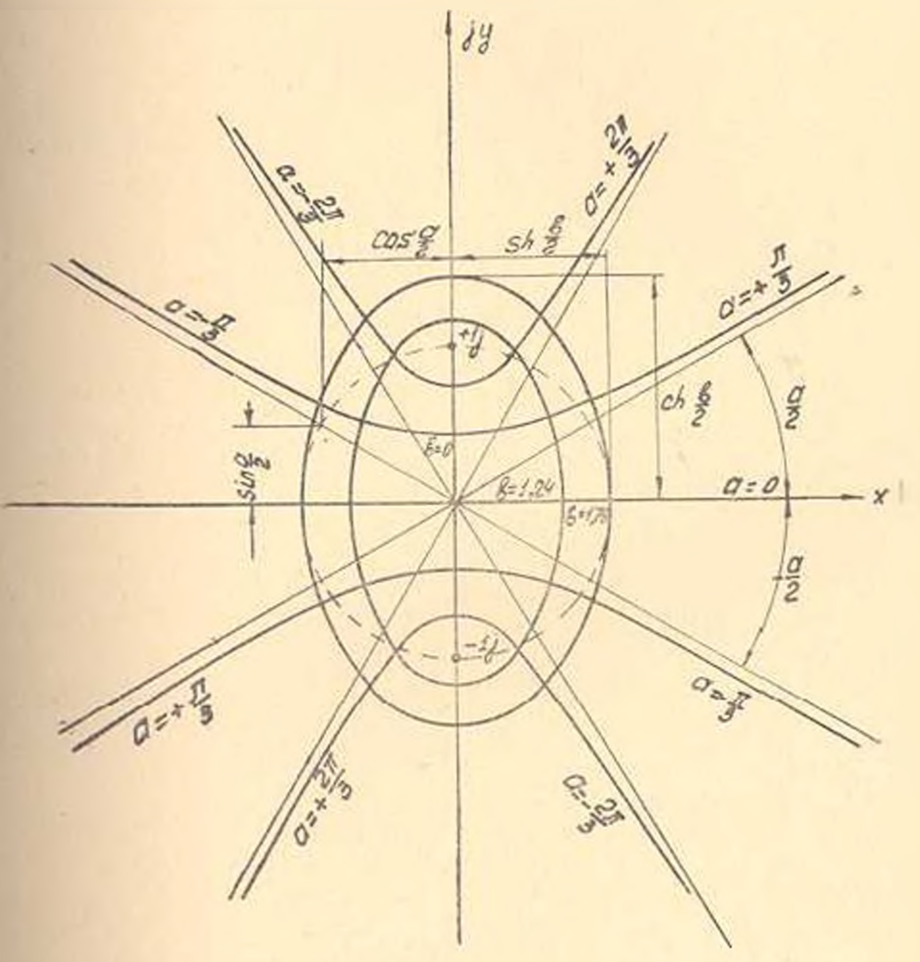


Рис. 4.

На комплексной плоскости Ω различным постоянным значениям собственного затухания b соответствует семейство софокусных эллипсов, а различным постоянным значениям фазовой меры a — семейство софокусных гипербол.

Эллипсы и гиперболы образуют семейства ортогональных функций (рис. 4).

3. Функции затухания и коэффициента фазы и полиномы Чебышева от комплексного аргумента Ω

Введем в рассмотрение новые переменные в соответствии с выражениями:

$$\rho = exp\,\frac{b}{2} = e^{\frac{b}{2}} = ch\,\frac{b}{2} + sh\,\frac{b}{2}\,, \tag{12}$$

$$\varphi = \frac{a}{2}\,. \tag{13}$$

Параметр ρ, как легко видеть из (10), представляет собой полусумму осей эллипса, проходящего через рассматриваемую точку.

Из (12) следует

$$ch\,\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cdot \tag{14}$$

$$sh\,\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\cdot \tag{15}$$

Выражения (14) и (15) дают возможность перехода от декартовых координат x, y к эллиптическим ρ, φ в соответствии с уравнениями

$$x = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \tag{16}$$

$$y = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi. \tag{17}$$

С помощью полученных эллиптических координат полиномы Чебышева от комплексного переменного выражаются в наиболее компактном виде.

Из уравнений (7), (16) и (17) следует:

$$-j\Omega = \frac{-j}{2}\left(\rho e^{j\varphi} - \frac{1}{\rho}e^{-j\varphi}\right), \tag{18}$$

$$\sqrt{(-j\Omega)^2 - 1} = \frac{1}{2}j\left(\rho e^{j\varphi} + \frac{1}{\rho}e^{-j\varphi}\right)\cdot \tag{19}$$

Складывая и вычитая (18) и (19), получим:

$$-j\Omega + \sqrt{(-j\Omega)^2 - 1} = j\rho^{-1}e^{-j\varphi}, \tag{20}$$

$$-j\Omega - \sqrt{(-j\Omega)^2 - 1} = -j\rho e^{j\varphi}, \tag{21}$$

и полиномы Чебышева принимают вид:

$$T_n(-j\Omega) = \frac{(-j)^n}{2}\left(\rho^n e^{jn\varphi} + (-1)^n\rho^{-n}e^{-jn\varphi}\right). \tag{22}$$

Переходя от функций ρ и φ к функциям затухания и коэффициента фазы, получим:

$$T^n(-j\Omega) = \frac{1}{2}(-j)^n \left[e^{n\left(\frac{b}{2}+j\frac{a}{2}\right)} + (1)^n e^{-n\left(\frac{b}{2}+j\frac{a}{2}\right)} \right]$$

или

$$T_n(-j\Omega) = \begin{cases} (-j)^n\, shn\left(\dfrac{b}{2}+j\dfrac{a}{2}\right) & n \text{ нечетное} \\ (-j)^n\, chn\left(\dfrac{b}{2}+j\dfrac{a}{2}\right) & n \text{ четное,} \end{cases}$$

что и привело к выражению (6б).

Вычислим гиперболические функции для цепочечных схем.

а) Г-образное полузвено (гиперболическая функция Чебышева 1-ой степени):

$$Th_1\left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\right) = \sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = sh\frac{g}{2}. \tag{23}$$

В случае фильтров типа k, Z_1 и Z_2 — взаимно обратные двухполюсники; следовательно Ω величина мнимая.

Для этого случая

$$sh\frac{g}{2} = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{4Z_2}\right|} = j\,|\Omega|. \tag{23a}$$

Уравнение (23а) дает известные выражения для полос пропускания и затухания фильтров типа k.

б) Т-образное или П-образное звено (гиперболическая функция Чебышева 2-ой степени):

$$Th_2\left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\right) = 2\frac{Z_1}{4Z_2} + 1 = chg \tag{24}$$

и мы приходим к известной в теории фильтров формуле

$$chg = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}.$$

в) Каскадное соединение трех Г-образных звеньев (гиперболическая функция Чебышева 3-ей степени):

$$Th_3\left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\right)^3 + 3\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} = sh\frac{3}{2}g \tag{25}$$

г) Каскадное соединение двух T или П-образных звеньев (гиперболическая функция Чебышева 4-ой степени):

$$Th_4\left(\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}\right) = 8\left(\frac{Z_1}{4Z_2}\right)^2 + \left(\frac{Z_1}{4Z_2}\right) + 1 = ch2g. \tag{26}$$

4. Функции затухания и коэффициента фазы мостиковых схем и полиномы Чебышева от комплексного аргумента Ω

Симметричный мостиковый фильтр (рис. 2) характеризуется также двумя характеристическими параметрами, связанными с сопротивлениями плеч следующими зависимостями:

$$Z_M = \sqrt{Z_1 Z_2}, \tag{27}$$

$$th\,\frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \tag{2}$$

Приведенная выше зависимость

$$Th_n\left(sh\,\frac{g}{2}\right) = \begin{cases} shn\,\frac{g}{2} & n = 1,\,3\cdots \\ chn\,\frac{g}{2} & n = 2,\,4\cdots \end{cases}$$

может быть использована путем перехода от функций $th\,\frac{g}{2}$ к функциям $sh\,\frac{g}{2}$.

Из формулы (2) нетрудно получить

$$sh\,\frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}; \tag{2a}$$

следовательно

$$Th_n\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}\right) = \begin{cases} shn\,\frac{g}{2} & n = 1,\,3\cdots \\ chn\,\frac{g}{2} & n = 2,\,4,\cdots \end{cases}$$

а) Гиперболическая функция Чебышева 1-ой степени

$$Th_n\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}\right) = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}} = sh\,\frac{g}{2}.$$

б) Гиперболическая функция 2-ой степени (мостиковая структура)

$$Th_2\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}\right) = 2\,\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1} + 1 = chg.$$

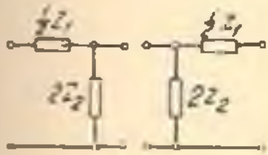
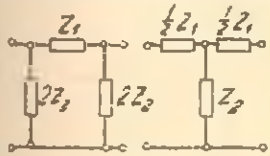
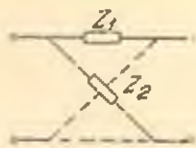
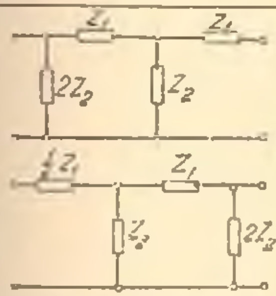
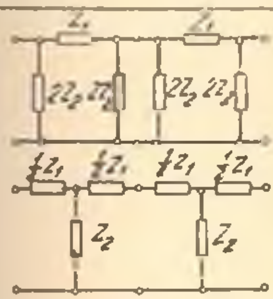
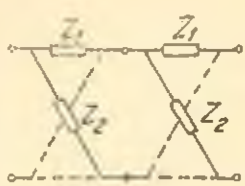
в) Гиперболическая функция 3-ей степени

$$Th_3\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_2}}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}\right)^3 + 3\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}} = sh\,\frac{3}{2}\,g.$$

г) Гиперболическая функция Чебышева 4-ой степени (две каскадно соединенные мостиковые структуры)

$$Th_4\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}}\right) = 8\left(\frac{Z^2}{Z_2 - Z_1}\right)^2 + 8\left(\frac{Z}{Z_2 - Z_1}\right) + 1 = ch2g.$$

Таблица 1

№ № п/п	Цепочечные четырехполюсники $\Omega=\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}}$	Функции Чебышева $Th_n(\Omega)$	Мостиковые четырехполюсники $\Omega=\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2-Z_1}}$
1		$Th_1(\Omega)=\Omega=sh\,\frac{g}{2}$	Пол звена мостикового 4-х полюсника (условно)
2		$Th_2(\Omega)=2\Omega^2+1=ch\,g$	
3		$Th_3(\Omega)=4\Omega^3+3\Omega=$ $=sh\,\frac{3}{2}g$	Полтора звена мостикового 4х полюсника (условно)
4		$Th_4(\Omega)=8\Omega^4+$ $+8\Omega^2+1=ch\,2g$	

Поскольку для симметричных фильтров

$$g = ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2},$$

где $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ — комплексные напряжения на входе и выходе фильтра, легко получить следующие зависимости

1) $$chln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right) = 2\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) + 1$$

2)

3) $$chln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right)^2 = 2^3\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right)^2 + 8\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) + 1$$

. . . .

$$chln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right)^n = 2^{2n-1}\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right)^n + A_1\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right)^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + A_{n-1}\left(\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}\right) + 1.$$

Для получения аналогичных зависимостей для цепочечных четырехполюсников, следует в правой части последних уравнений выражение $\frac{Z_1}{Z_2 - Z_1}$ заменить через $\frac{Z_1}{4Z_2}$; при этом показатель степени n соответствует числу мостиковых, T- или Π-образных структур, а коэффициенты A_i можно получить из соответствующих полиномов Чебышева.

Рассмотрение полиномов Чебышева в комплексной области свидетельствует о наличии связи этих функций с функциями затухания и фазы цепочечных и мостиковых фильтров.

Указанная зависимость приведена в таблице 1.

Представление характеристик четырехполюсников в виде полиномов от комплексного переменного полезно и с той точки зрения, что при этом возможно изобразить их модули на комплексной плоскости в виде семейства кривых, как это обычно делают с функциями комплексного переменного. В частности, модулям гиперболических функций второй степени, которые представляют собой характеристики симметричных мостиковых, а также T- и Π-образных цепочечных структур, соответствуют так называемые овалы Кассини. Полученные семейства кривых могут служить в качестве номограмм при решении задач на фильтры с учетом потерь.

Институт электротехники
АН Армянской ССР

Поступило 16.X 1959

Կ. Ա. ՄԵԼԻՔ-ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՖԻԼՏՐՆԵՐԻ ՄԱՐՈՒՄԸ ՈՒ ՓԱԶԱՅԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑԸ ԵՎ ՉԵԲԻՇԵՎԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԸ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԴԱՇՏՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է Չեբիշևի բազմանդամի կոմպլեքսային փոփոխականի կապը էլեկտրական ֆիլտրների մարող և փազային ֆունկցիաների հետ: Ֆիլտրների բնութագրերի ներկայացնելը կոմպլեքս փոփոխականի բազմանդամի միջոցով նպատակահարմար է նրանով, որ այս դեպքում հնարավոր է բնութագրերի արտահայտումը կոմպլեքս հարթության մեջ կորերի ընտանիքի ձևով:

Չեբիշևի երկրորդ աստիճանի ֆունկցիաների դեպքում (որը համապատասխանում է սիմետրիկ կամուրջակային և Г, П տիպի ֆիլտրներին) որպես մասնավոր դեպք, մենք ստանում ենք Կասսինիի երկրորդ աստիճանի կորերի ընտանիքը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чебышев П. Л.* Избранные труды. АН СССР. 1955.
2. *Листов В. Н.* Сравнительный анализ электрических фильтров цепочечной и мостиковой структуры. 1944.
3. *Klein W.* Tschebyscheffsche Funktionen Archiv. für Elektrotechnik, т. XXXIX, 1950, стр. 647—657.
4. *Guillemin E.* Communication networks, v. 2. 1947.
5. *Cauer W.* Theorie der linearen Wechseltromschaltungen, 1953.