ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտություններ, սերիա XIII, № 1, 1960 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. ДАРБИНЯН

СДВИГОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Вопросы сдвиговых колебаний систем с одной и с двумя степенями свободы, под действием сейсмических сил, были исследованы в работах [1, 2].

В настоящей статье рассматриваются сдвиговые колебания системы со многими степенями свободы с учетом упруго-пластических деформаций применительно к вопросам сейсмостойкости.

В качестве модели такой системы принимаем невесомый стержень с сосредоточенными массами по длине и заделанным одним концом (рис. 1).

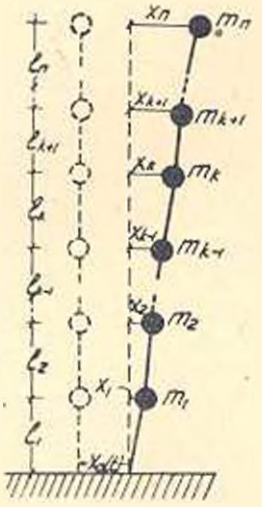

Рис. 1.

Подставленную задачу будем решать методом, изложенным в [3, 4].

Составим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы. Будем предполагать, что данная система находится под действием сейсмических сил, т. е. под действием колебания почвы, которое изменяется по данному закону $x_0(t)$ и деформируется как показано на рис. 1.

Рассматривая равновесие некоторой массы m_k, получим дифференциальные уравнения движения в общем виде следующим образом:

$$m_k \ddot{x}_k + P_k - P_{k+1} = -m_k \ddot{x}_0 \quad (k = 1, 2, \cdots n), \tag{1}$$

где P_k — внутренняя сила между массами m_{k-1} и m_k,

$$\ddot{x}_k = \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2}, \quad \ddot{x}_0 = \frac{d^2 x_0(t)}{dt^2}.$$

Так как $P_k = F_k \tau_k$, $P_{k+1} = F_{k+1} \tau_{k+1}$, то (1) можно записать в виде:

$$m_k \ddot{x}_k + F_k \tau_k - F_{k+1} \tau_{k+1} = -m_k \ddot{x}_0 \quad (k = 1, 2, \cdots n),$$

где F_k и F_{k+1} — площади поперечных сечений участков бруса с длинами соответственно l_k и l_{k+1}.

а τ_k и τ_{k+1} — касательные напряжения в этих участках.

Деформации отдельных участков, расположенных между двумя соседними точками сосредоточения масс бруса, определяются по формулам:

$$\gamma_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{l_k}, \quad (k = 1, 2, \cdots n), \tag{2}$$

притом $x_0 = 0$.

Предположим, что упруго-пластические свойства материала данной системы характеризуются диаграммой зависимости напряжений от деформации, представленной на рис. 2.

Согласно этой диаграмме зависимость между напряжением и деформацией при нагружении или разгрузке можно представить одним уравнением, предложенным В. В. Москвитиным [4, 5]

$$\tau = \alpha\beta\lambda\gamma_T + (\beta - 1)\lambda(\gamma_T + \alpha\gamma_T)G + \psi G\gamma, \tag{3}$$

где λ — коэффициент упрочнения; τ_T и γ_T — напряжение и деформация, характеризующие предел текучести.

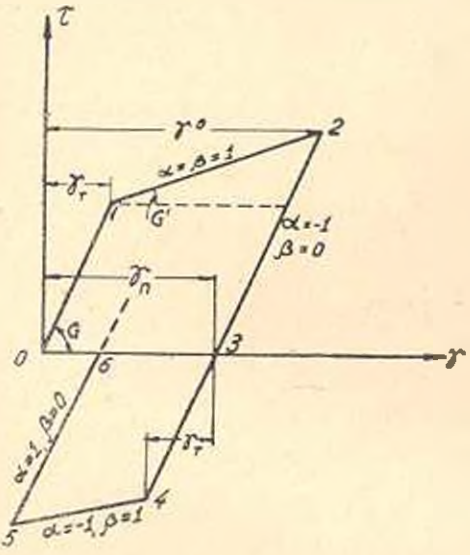

Рис. 2.

Значения параметров α и β для разных стадий нагружения или разгрузки приведены на рис. 2, притом $\psi = 1 - \beta\lambda$.

На основании (3) имеем:

$$\tau_k^{II} = G\left[\alpha_k\beta_k\lambda\gamma_T + (\beta_k - 1)\gamma_{k0} + \psi_k\gamma_k\right],$$

$$\tau_{k+1}^{II} = G\left[\alpha_{k+1}\beta_{k+1}\lambda\gamma_T + (\beta_{k+1} - 1)\times\right.$$
$$\left.\times\gamma_{k+1,n} + \psi_{k+1}\gamma_{k+1}\right],$$

где $\gamma_{k0} = \lambda(\gamma_k^0 + \alpha_k\gamma_T)$ — максимальная остаточная деформация участка с длиной l_k, а γ_k^0 — максимальные деформации, связанные с максимальными смещениями по формулам (2).

Во всех формулах величины с индексом $n+1$ следует принимать равными нулю.

В силу (2) и (3) уравнение (1) примет следующий вид:

$$m_k\ddot{x}_k + (C_k + C_{k+1})x_k - C_k x_{k-1} - C_{k+1}x_{k+1} = -m_k\ddot{x}_0 + \mu_k \quad (k = 1, 2, \cdots n) \tag{4}$$

где

$$C_k = \frac{GF_k\psi_k}{l_k}, \quad C_{k+1} = \frac{GF_{k+1}\psi_{k+1}}{l_{k+1}},$$

$$\mu_k = G\left[(F_{k-1}\alpha_{k+1}\beta_{k+1} - F_k\alpha_k\beta_k)\lambda\gamma_T + F_{k+1}(\beta_{k+1} - 1)\gamma_{k+1,0} - \right.$$
$$\left. - F_k(\beta_k - 1)\gamma_{k0}\right].$$

Так как параметры α_k, β_k, ψ_k принимают различные значения в

стадии упруго-пластического нагружения или разгрузки, то интегрирование дифференциальных уравнений движения (4) осуществляется по зонам данной диаграммы (рис. 2), с использованием условий неразрывности смещений и скоростей на границах этих зон (точки 1, 2, 3 и т. д.).

Частные решения однородных систем (4) ищем следующим образом:

$$x_k = a_k \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставляя значения x_k в (4), получим:

$$-m_k\omega^2 a_k + (C_k + C_{k+1})a_k - C_k a_{k-1} - C_{k+1}a_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots n).$$

Поскольку мы ищем не нулевые решения, то определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\Delta_k(\omega^2) = \begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1\omega^2 & -C_2 & & 0\cdots & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 - m_2\omega^2 & -C_3 & 0\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots & 0 & 0 & -C_n & C_n - m_n\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Эта система, как видно, относится к типу Штурмовых систем и для функции $\Delta_k(\omega^2)$ существует следующее рекурентное соотношение [6]:

$$\Delta_k(\omega^2) = (C_k + C_{k+1} - m_k\omega^2)\Delta_{k-1}(\omega^2) - C_k^2\Delta_{k-2}(\omega^2).$$

$$\Delta_0(\omega^2) = 1, \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

С помощью этого соотношения можно вычислить многочлен $\Delta_n(\omega^2)$, корнями которого являются квадраты частот ω_i^2 $(i = 1, 2, \ldots n)$.

На основании этих величин частот можем написать:

$$-m_k\omega_j^2 a_{kj} + (C_k + C_{k+1})a_{kj} - C_k a_{k-1,j} - C_{k+1}a_{k+1,j} = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots n), \qquad (a)$$

откуда будем иметь n соотношений для определения отношений этих постоянных:

$$\frac{a_{kj}}{a_{1j}} = A_{kj} \quad (k = 1, 2, \ldots n). \qquad (a')$$

Таким образом общие решения однородных уравнений (4) запишутся следующим образом:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \sin(\omega_j t + \varphi_j), \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \qquad (5)$$

Для удобного нахождения частных решений системы уравнений (4) соответствующим правым частям, переходим к обобщенным координатам по следующим формулам:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} q_i \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{6}$$

Подставляя (6) в левую часть (4), получим:

$$m_k \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \ddot{q}_i + (C_k + C_{k-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{ki} q_i - C_k \sum_{i=1}^{n} a_{k-1,i} q_i -$$

$$- C_{k+1} \sum_{i=1}^{n} a_{k+1,i} q_i = -m_k \ddot{x}_0 + p_k \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Умножив обе части этих уравнений на a_{kj} и суммируя, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \Big[a_{kj} m_k \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \ddot{q}_i \Big] + \sum_{k=1}^{n} \Big[a_{kj} (C_k + C_{k-1}) \sum_{i=1}^{n} a_{ki} q_i \Big] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \Big[a_{kj} C_k \sum_{i=1}^{n} a_{k-1,i} q_i \Big] - \sum_{k=1}^{n} \Big[a_{kj} C_{k+1} \sum_{i=1}^{n} a_{k+1,i} q_i \Big] =$$

$$= -\ddot{x}_0 \sum_{k=1}^{n} a_{kj} m_k + \sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k. \tag{б}$$

Далее умножая уравнения (в) на a_{kj} после суммирования будем иметь:

$$-\sum_{k=1}^{n} m_k \omega_j^2 a_{kj}^2 + \sum_{k=1}^{n} (C_k + C_{k-1}) a_{kj}^2 - \sum_{k=1}^{n} C_k a_{k-1,j} a_{kj} - \sum_{k=1}^{n} C_{k+1} a_{k+1,j} a_{kj} = 0 \tag{в}$$

С другой стороны мы имеем теорему Бетти о взаимности виртуальных работ в виде:

$$m_1 a_{1i} a_{1k} + m_2 a_{2i} a_{2k} + \ldots + m_n a_{ni} a_{nk} = 0. \tag{г}$$

Таким образом, на основании соотношений (а), (в), (г) и уравнения частот, дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах могут быть записаны в следующем виде:*

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} m_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 m_k} \cdot \ddot{x}_0(t) \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} p_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 m_k}. \quad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{7}$$

* Об ортогональности главных форм см. например [5].

Частные решения, соответствующие правым частям (7) находятся по формулам:

$$q_i = \frac{1}{\omega_i}\int_{t_1}^{t}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\gamma_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 m_k}\ddot{x}_0(u) - \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{kj} m_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2 m_k}\ddot{x}_0(u)\right]\sin\omega_j(t-u)\,du. \qquad (8)$$

Следовательно общее решение системы дифференциальных уравнений движения (4) запишется на основании (5), (6) и (8) следующим образом:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sin(\omega_j t + \varphi_j) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}[1-\cos\omega_j(t-t_1)]\sum_{j=1}^{n}\Phi_{ij}\int_{t_1}^{t}\ddot{x}_0(u)\sin\times$$
$$\times\,\omega_j(t-u)\,du$$

где

$$f_{ij} = \frac{a_{ij}\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\gamma_i}{\omega_j^2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 m_i}; \quad \Phi_{ij} = \frac{a_{ij}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}m_i}{\omega_j\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 m_i};$$

t_1 — начало отчета движения.

Имея ввиду соотношение (a'), общие решения поставленной задачи окончательно можно записать так:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}A_{ij}\sin(\omega_j t + \varphi_j) + f_{ij}[1-\cos\omega_j(t-t_1)] - \right.$$
$$\left. - \Phi_{ij}\int_{t_1}^{t}\ddot{x}_0(u)\sin\omega_j(t-u)du\right],$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3,\cdots n). \qquad (9)$$

Входящие в (9) постоянные интегрирования a_{ij} и φ_j определяются из условий сопряжений или из начальных условий.

Остальные коэффициенты, входящие в выражения f_{ij} и Φ_{ij}, определяются из уравнений (a) и (a').

Выражения для определения сейсмических сил также можно написать единой формулой в зависимости от параметров α и β.

Из дифференциальных уравнений движения видно, что

$$S_k = m_k(\ddot{x}_k + \ddot{x}_0).$$

Следовательно на основании (9) будем иметь:

$$S_k = m_k \left\{ x_0''(t) \left[1 - \sum_{j=1}^{n} \omega \Phi_j \right] - \sum_{j=1}^{n} \left[a_{1j} A_{kj} \omega_j^2 \sin (\omega_j t + \varphi_j) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - f_{lj} \omega_j^2 \cos \omega_j (t - t_1) - \omega_j^2 \Phi_{lj} \int_{t_1}^{t} x_0''(u) \sin \omega_j (t - u) \, du \right] \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{10}$$

Таким образом представленная задача решена до конца. С помощью (9) и (10) можно определить смещения и горизонтальные (сейсмические) силы, для всевозможных деформированных состояний с использованием условии сопряжения. Этими формулами можно определить также максимальные значения сейсмических сил и смещений, следовательно и величины максимальных остаточных деформации по формулам (2).

Если рассматриваемая система совершает лишь упругие колебания, то везде следует принимать $\psi_k = 1$. Если в каком нибудь участке данной системы появляются пластические деформации, то тогда ψ зависит от β, значения которого для различных стадий нагружения или разгрузки приведены на рис. 2.

Отметим, что полученные результаты можно применить и для такого случая, когда на массы m_k действуют внешние силы $q_k(t)$.

Для этого в полученных решениях следует положить $-m_k x_0'' = q_k(t)$.

Институт стройматериалов и сооружений
Госстроя Армянской ССР

Поступило 20.X 59

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ԱԶԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՍՏԻՃԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՍԻՍՏԵՄԻ ՍԱՀՔԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻՑ ԴՈՒՐՍ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրված են փոքր թվով ազատության աստիճան ունեցող սիստեմի սահքի տատանումները առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների հաշվառումով, երբ տված սիստեմը գտնվում է սեյսմիկ ուժերի ազդեցության տակ։

Ենթադրվում է, որ տված սիստեմի դեֆորմացիոն վիճակը կարելի է ընդունել նկ. 1-ում պատկերված ձևով։ Դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կապը ընդունված է ըստ նկ. 2 պատկերված դիագրամայի։ Ըստ այդ դիագրամայի այդ կապը կարելի է արտահայտել մեկ բանաձևով (4), կախված α և β պարամետրերից, որոնց արժեքները բեռնավորման և բեռնաթափման տարբեր դեպքերի համար բերված է նկ. 2-ում։

Առաջադրված խնդիրը լուծվում է [3, 4] մեթոդով, այսինքն շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների անմիջական ինտեգրման միջոցով, արագությունների և տեղափոխությունների անխզելիության պայմանների օգտագործումով:

Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները գրված են այնպիսի տեսքով, որ հաճախականությունների որոշման համար ստացվում են ռեկուրենտ բանաձևեր:

Խնդիրը ընդհանուր ձևով լուծելու նպատակով շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բերվում են ընդհանրացրած կոորդինատների, որոնց հիման վրա տեղափոխությունների և հարկադրական (սեյսմիկ) ուժերի հաշվման համար ստացված են (9) և (10) բանաձևերը, կախված սիստեմի հիմնատակի տատանման $x_0(t)$ օրենքից:

Ստացված արդյունքները կարելի է կիրառել նաև այն դեպքի համար, երբ սիստեմի վրա ազդում են $Q_i^{(t)}$ հարկադրական ուժեր, մասսաների կենտրոնացման տեղերում: Նշված դեպքի համար, ստացված բանաձևերի մեջ հարկավոր է միայն կատարել $-m_k x_0''(t) = Q_k(t)$ տիպի տեղադրում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дарбинян С. С.* К вопросу колебания системы с одной степенью свободы с учетом упруго-пластических деформаций. Изв. АН Армянской ССР, серия техн. наук, т. XII, № 1, 1959.
2. *Дарбинян С. С.* Сдвиговые колебания системы с двумя степенями свободы с учетом упруго-пластических деформаций. ДАН АН Армянской ССР, т. XXIX, № 2, 1959.
3. *Рабинович И. М.* К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. Сб. статей. Исследования по динамике сооружений. Стройиздат, 1947.
4. *Москвитин В. В.* Продольные колебания упруго-пластической системы с конечным числом степеней свободы. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 2, 1957.
5. *Москвитин В. В.* Упруго-пластические колебания плоских форм. Вестник МГУ, № 3, 1957.
6. *Гантмахер Ф. Р.* и *Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Гостехиздат, ТТЛ, М.—Л., 1950.