

## ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. М. АРАКЕЛЯН

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКА, РАСПОЛОЖЕННОГО  
В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ\*

Расчет магнитного поля постоянного тока в присутствии ферромагнитных тел представляет собой расчет поля в неоднородной и нелинейной среде. При этом, используемые методы решения и полученные формулы, благодаря формальному математическому подобию могут быть использованы в ряде других областей математической физики. Расчет поля рассеивания обмоток электрических машин, электродинамических сил, действующих на токоносители электрических машин и аппаратов, тесно связан с этим вопросом; с ним связаны также электроразведка, расчет заземлений экранирующего действия ферромагнитных масс и т. д.

Вопрос учета насыщения стали до настоящего времени почти не разработан, хотя он имеет большой практический и теоретический интерес. В качестве первого приближения для учета насыщения стали и для оценки влияния этого насыщения на распределение магнитного поля, магнитная проницаемость стали принимается конечной величиной. Однако, расчет магнитного поля при конечных значениях магнитных проницаемостей сред для многих задач представляет значительные трудности.

В настоящей работе мы рассматриваем плоскопараллельные поля и ограничиваемся случаем, когда границей между двумя областями с различными магнитными проницаемостями является произвольный двугранный угол. Линейный проводник с током расположен в одной из областей, параллельно ребру этого угла. Такая задача наиболее часто встречается на практике и, насколько нам известно, до настоящего времени не имеет общего решения доведенного до более или менее простой формы для инженерного пользования.

Как известно, влияние различных магнитных проницаемостей отдельных областей на магнитное поле тока можно учесть фиктивными „магнитными зарядами“, определенным образом распределенными на границе раздела сред [1, 2]. При этом, средю можно принять однородной с магнитной проницаемостью той области, в которой распо-

\* Работа проведена в Энергетическом институте им. Г. М. Кржижановского АН СССР под руководством проф. Э. А. Мееровича.



ложен ток\*, а влияние второй среды с иной магнитной проницаемостью можно заменить равноценным влиянием „магнитных зарядов“, расположенных на границе раздела сред.

Функция магнитного потока во всех точках обеих областей должна удовлетворить уравнению Лапласа, за исключением точки расположения тока и в бесконечно удаленной точке, где она должна иметь логарифмическую особенность. Эту функцию можно представить как сумму двух функций магнитного потока, одна из которых обусловлена током, а другая фиктивными „магнитными зарядами“. Частные производные указанных функций по выбранным направлениям представляют соответствующие составляющие напряженности магнитного поля. Общее поле, как в первой, так и во второй областях находится наложением поля обусловленного током и поля обусловленного „магнитными зарядами“. Любое распределение указанных „зарядов“ совместно с током удовлетворяет условиям задачи во всей области за исключением граничных условий, которые удовлетворяются лишь при одном единственном распределении этих „зарядов“. Следовательно такое распределение „магнитных зарядов“ по границе раздела сред, которое удовлетворяет граничным условиям, обеспечивает все условия поставленной задачи и является решением этой задачи. Такое решение получено в [3]. Оно дает возможность довольно просто определить нормальную составляющую напряженности магнитного поля на границе раздела сред и позволяет исследовать влияние изменения магнитных проницаемостей на напряженность магнитного поля для различных углов. Однако при расчете напряженности магнитного поля в остальных точках среды и при определении электродинамических усилий действующих на проводник с током, приходится сталкиваться с весьма трудоемкими и трудными математическими вычислениями. Поэтому представляет интерес расчет в общей форме непосредственно самой напряженности магнитного поля.

Ниже приводим основные этапы вывода формул расчета напряженности магнитного поля и их окончательные результаты для общего случая, когда границей между областями различных магнитных проницаемостей является произвольный двугранный угол, составляющий с  $\pi$  рациональное отношение.

Пусть произвольный угол  $AOB$  представляет в поперечном разрезе след границы раздела между первой и второй областями, которые имеют различные, но конечные магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В одной из этих областей расположен линейный проводник с током в точке, модуль которой обозначен через  $a$ , а аргумент через  $\gamma$ . Модуль и аргумент произвольной точки, в которой желаем определить

\* Магнитную проницаемость принятой однородной среды можно взять произвольно, однако удобнее ее брать равной магнитной проницаемости области, в которой расположен ток.

значение поля, обозначим соответственно через  $r$  и  $\varphi$  (рис. 1). Поверхностная плотность введенных фиктивных „магнитных зарядов“ обозначены на грани  $OA$  через  $\sigma_1$ , а на грани  $OB$  через  $\sigma_2$ . Тогда составляющие напряженности магнитного поля обусловленного этими „зарядами“  $\sigma_p$  выражаются следующими формулами:

угловая составляющая

$$H_\varphi(\sigma_p) = \frac{\sin(\varphi - \varphi_p)}{2\pi\mu_y} \int_0^\infty \frac{\sigma_p s_p ds_p}{r^2 - 2rs_p \cos|\varphi - \varphi_p| + s_p^2} \quad (1)$$

радиальная составляющая

$$H_r(\sigma_p) = \frac{1}{2\pi\mu_y} \int_0^\infty \frac{\sigma_p (r - s_p \cos|\varphi - \varphi_p|) ds_p}{r^2 - 2rs_p \cos|\varphi - \varphi_p| + s_p^2} \quad (2)$$

Здесь  $\mu_y$  — магнитная проницаемость той среды, в которой расположен ток. Индекс  $p$  показывает принадлежность данной величины к одной из граней. Величины, относящиеся к грани  $OA$ , отмечаются единицей ( $p=1$ ), а относящиеся к грани  $OB$  — двойкой ( $p=2$ ). Таким образом радиальная и угловая составляющие напряженности состоят из двух слагаемых, каждое из которых обусловлено „зарядами“, расположенными на одной из граней угла. Как отмечалось выше в [3] найдены значения этих „зарядов“, однако, их непосредственная подстановка в формулы (1) и (2) не дает возможности решить приведенный интеграл в общем виде.

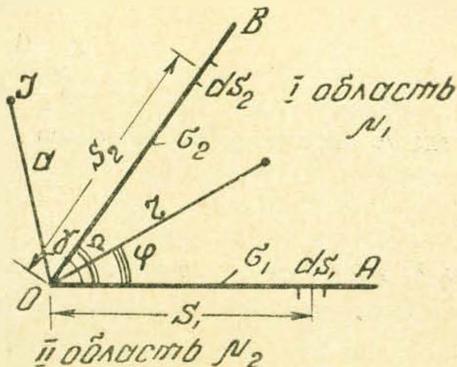


Рис. 1.

Для нахождения значений вышеуказанных составляющих напряженности магнитного поля применяем метод, подробно изложенный в [1] гл. XIV. Сущность указанного метода заключается в введении преобразованных функций от искомых, умножением последних на  $r^y$  и интегрированием по  $r$  в пределах от нуля до бесконечности. Здесь  $y$  представляет комплексную величину, отвечающую определенным требованиям, рассмотренным в цитированной работе. В результате, преобразованные функции от составляющих напряженности поля выражаются алгебраически через преобразованные функции от „магнитных зарядов“, значения которых найдены в [3] и могут быть подставлены в готовом виде.

В целях определения составляющих напряженности магнитного поля при помощи их преобразованных функций, к последним применяем обратное преобразование Римана-Меллина. Для этой цели указанные функции удалось привести к форме, позволяющей получить

ответ в удобном виде. При обратном преобразовании получаются интегралы, решаемые как суммы вычетов от функций, полюсами которых на комплексной поверхности  $v$  являются корни следующих уравнений:

$$\sin \pi v = 0; \quad (3)$$

$$\sin^2 \pi v - \alpha^2 \sin^2 (\pi - \Omega) v = 0; \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1},$$

где  $\Omega$  — величина меньшего угла раздела сред. Корнями уравнения (3) очевидно являются:

$$v = \pm q; \quad (q = 0; 1; 2; 3 \dots) \quad (5)$$

Подробное рассмотрение показало, что корнями уравнения (4) являются величины:

$$v = \pm mq; \quad (q = 0; 1; 2; 3 \dots); \quad (6)$$

$$(q = 0; 1; 2; 3 \dots);$$

$$v = \pm mq \pm \delta_k.$$

где  $m$  определяется из правильной дроби

$$\frac{n}{m} = 1 - \frac{\Omega}{\pi} \quad (7)$$

а  $\delta_k$  являются основными корнями уравнения

$$\frac{\sin \pi \delta_k}{\sin (\pi - \Omega) \delta_k} = \pm |\alpha|. \quad (8)$$

Число основных корней этого уравнения равно

$$k = m - 1 \quad (9)$$

а величина этих корней находится в пределах

$$0 < \delta_k \leq \frac{m}{2}. \quad (10)$$

Например, при  $\Omega = \frac{\pi}{2}$  числитель правильной дроби (7) равен единице, а знаменатель равен двум. Следовательно число основных корней будет равно единице, а величина его должна находиться в пределах от нуля до единицы. Эту величину можно рассчитать аналитически. На рис. 2 для наглядности приведено ее графическое определение. Рассмотренные выше корни оказались простыми полюсами функций, находящимися под знаком вычетов.

Отметим, что введение соотношений (7) — (10) оказалось плодотворным, так как дало возможность выразить количество и величины основных корней через величину угла раздела областей и значе-

ния параметров среды. А это позволило решение поставленной задачи довести до сравнительно простых и удобных для инженерного пользования общих расчетных формул, приводимых ниже.

С другой стороны в [4], при общем решении задач посредством обобщенного метода изображений [5], являющихся частным случаем рассматриваемой, когда магнитная проницаемость одной из сред бесконечно большая, было введено соотношение (1) подобное приведенному здесь (7). Это соотношение дает простейшую связь между величиной угла раздела областей, числом римановых поверхностей и числом на нем расположенных изображений, дающих решение задачи (подробно это изложено в [4 и 5]).

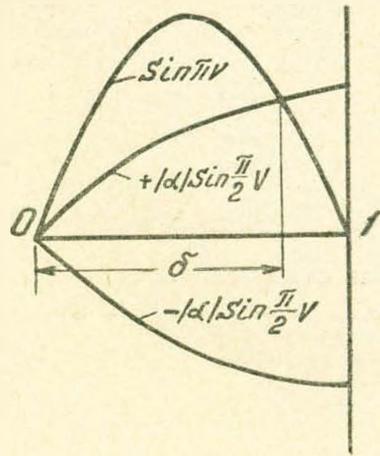


Рис. 2.

Таким образом, при применении двух различных методов для получения общих решений были применены аналогичные соотношения. Причем при применении одного метода это соотношение связывает величину угла раздела областей с числом римановых поверхностей и изображений, а при применении другого метода с числом и величиной основных корней, являющихся полюсами функций, посредством которых решается задача. Это обстоятельство, а также вид формул, полученных в настоящей работе говорит о том, что примененный метод и обобщенный метод изображений имеют внутреннюю общность, заключающуюся в связи числа римановых поверхностей и изображений с числом и величиной основных корней. Отсюда можно предположить, что метод изображений, являющийся наиболее простым и наглядным, применим и для наиболее общего случая конечных значений магнитных проницаемостей сред. Этот вопрос нами будет рассмотрен в отдельной работе.

Ниже приводим общие формулы расчета составляющих напряженности магнитного поля.

Для области, где расположен ток:  
радиальная составляющая

$$H_r(r, \varphi) = -\frac{I \cdot a}{2\pi r} \left\{ C_3 \left[ \left( \frac{m}{\alpha} \pm an \right) \cdot \frac{C_2}{C_4} \mp (m \pm n) \cdot \frac{C_3}{C_5} \right] - \sum_{k=1}^{m-1} C_6 \left[ \frac{C_7 \cdot \sin \xi \delta_k}{C_5} + \frac{(-1)^{m+n} \cdot C_8 \cdot \sin \xi (m - \delta_k)}{C_5} \mp \text{sign}(\alpha) \text{sign}(\delta_k) \cdot \frac{C_7 \cdot \sin(\gamma - \varphi) \delta_k + C_8 \sin(\gamma - \varphi)(m - \delta_k)}{C_4} \right] \right\}; \quad (11)$$

угловая составляющая

$$H_{\varphi}(r, \varphi) = -\frac{I\alpha}{2\pi r} \left\{ C_1 \left[ \left( \frac{m}{\alpha} \pm n\alpha \right) \cdot \frac{C_9}{C_4} \pm (m \pm n) \frac{C_{10}}{C_5} \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \sum_{\kappa=1}^{m-1} C_6 \left[ \frac{C_{11} \cos \xi \delta_{\kappa} + (-1)^{m+n} \cdot C_{12} \cdot \cos \xi (m - \delta_{\kappa})}{C_5} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. \pm \operatorname{sign}(\alpha) \cdot \operatorname{sign}(\delta_{\kappa}) \frac{C_{11} \cdot \cos(\gamma - \varphi) + C_{12} \cos(\gamma + \varphi) (m - \delta_{\kappa})}{C_4} \right] \right\}. \quad (12)$$

Для смежной области:

радиальная составляющая

$$H_r(r, \varphi) = -\frac{I \cdot \alpha}{2\pi r} (1 \mp \alpha) \cdot \left\{ C_1 \left( \frac{m}{\alpha} \cdot \frac{C_2}{C_4} - n \frac{C_3}{C_5} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{\kappa=1}^{m-1} C_{16} \left[ C_7 \frac{C_{13} \cdot C_{14} + (-1)^n C_8 \cdot C_{15}}{C_5} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sign}(\alpha) \cdot \operatorname{sign}(\delta_{\kappa}) \frac{C_{13} \cdot \sin \eta \delta_{\kappa} + (-1)^m \cdot C_8 \cdot \sin \eta (m - \delta_{\kappa})}{C_4} \right] \right\}; \quad (13)$$

угловая составляющая

$$H_{\sigma}(r, \varphi) = -\frac{I\alpha}{2\pi r} (1 \mp \alpha) \cdot \left\{ C_1 \left( \frac{m}{\alpha} \frac{C_9}{C_4} + n \cdot \frac{C_{10}}{C_5} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=1}^{m-1} C_{16} \left[ \frac{C_{11} \cdot C_{17} + (-1)^n \cdot C_{12} \cdot C_{18}}{C_5} + \right. \right. \\ \left. \left. \pm \operatorname{sign}(\alpha) \cdot \operatorname{sign}(\delta_{\kappa}) \frac{C_{11} \cos \cdot \eta \cdot \delta_{\kappa} + (-1)^m \cdot C_{12} \cdot \cos \eta (m - \delta_{\kappa})}{C_4} \right] \right\}, \quad (14)$$

где  $C_1 = \frac{m}{m^2 - \alpha^2 n^2}$ ;  $C_2 = \rho^m \cdot \sin(\gamma - \varphi) m$ ;  $C_3 = \rho^m \cdot \sin(\gamma + \varphi) m$ ;

$$C_4 = 1 - 2\rho^m \cdot \cos(\gamma - \varphi) \cdot m + \rho^{2m}; \quad C_5 = 1 - 2\rho^m \cos(\gamma + \varphi) m + \rho^{2m};$$

$$C_6 = \frac{\sin \frac{m \mp n}{\alpha} \cdot \pi \delta_{\kappa}}{A_{\kappa}}; \quad C_7 = \rho^{\delta_{\kappa}} + \rho^{2m - \delta_{\kappa}}; \quad C_8 = \rho^{m - \delta_{\kappa}} + \rho^{m + \delta_{\kappa}};$$

$$C_9 = 1 - \rho^m \cos(\gamma - \varphi) m; \quad C_{10} = 1 - \rho^m \cos(\gamma + \varphi) m;$$

$$C_{11} = \rho^{\delta_{\kappa}} - \rho^{2m - \delta_{\kappa}}; \quad C_{12} = \rho^{m - \delta_{\kappa}} - \rho^{m + \delta_{\kappa}}; \quad C_{13} = \rho^{\delta_{\kappa}} + \rho^{2m + \delta_{\kappa}};$$

$$C_{14} = \sin(\gamma + \varphi - \pi - \Omega) \delta_{\kappa}; \quad C_{15} = \sin(\gamma + \varphi - \pi - \Omega) (m - \delta_{\kappa});$$

$$C_{16} = \frac{\sin \frac{n}{\alpha} \pi \delta_{\kappa}}{A_{\kappa}}; \quad C_{17} = \cos(\gamma + \varphi - \pi - \Omega) \delta_{\kappa};$$

$$C_{18} = \cos(\gamma + \varphi - \pi - \Omega)(m - \delta_k).$$

$$A_k = \sin 2\pi\delta_k - \alpha^2 \frac{n}{m} \sin 2\pi\delta_k \frac{n}{m};$$

$$\text{sign}(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|};$$

$$\text{sign}(\delta_k) = \frac{\sin \pi\delta_k}{\sin(\pi - \Omega)\delta_k} : |\alpha|;$$

$$\rho = \frac{a}{r};$$

$\mu_2$  — представляет магнитную проницаемость области занимающей меньший из двух смежных углов.

Если ток расположен в меньшем из углов, то надо брать верхние знаки и подставить значения

$$\xi = \gamma + \varphi - \Omega;$$

$$\eta = \gamma - \varphi + \pi.$$

Если ток расположен в большем из углов, то надо брать нижние знаки и подставить

$$\xi = 2\pi + \Omega - \gamma - \varphi;$$

$$\eta = \gamma - \varphi - \pi.$$

Нетрудно показать в общем виде, что полученное решение удовлетворяет всем условиям поставленной задачи в том числе и граничным.

При бесконечно большой магнитной проницаемости одной из сред приведенные формулы принимают вид точно совпадающей с решением, полученным при помощи обобщенного метода изображений в [4].

В случае, когда угол раздела равен  $\pi$ , приведенные формулы принимают вид решения приведенного в [6] для задачи, когда граничащие среды являются примыкающими полупространствами.

Таким образом полученное решение совпадает со всеми известными решениями, полученными другими способами для задач, являющихся частными случаями наиболее общей задачи, решенной в данной работе.

Итак, приведенное общее решение поставленной задачи, доведенной до формул инженерного пользования дает возможность легко определить напряженность магнитного поля, обусловленного током, в любой точке двух граничных областей, при любых значениях их магнитных проницаемостей, когда границей между этими областями является угол любой величины, находящийся с  $\pi$  в рациональном отношении. Это решение дает также возможность получить простые формулы для электродинамических сил, действующих на проводник с током, обуславливающим рассматриваемое поле.

Очевидно, что указанные формулы пригодны для расчета и в том случае, когда поле обуславливается не одним, а несколькими линейными токами. В этом случае поле находится наложением, которое возможно применить, так как задача решена при предположении независимости параметров среды от величины поля.

Энергетический институт  
им. Г. М. Кржижановского АН СССР,  
Электротехническая лаборатория  
АН Армянской ССР

Поступило 8 XII 1957

Ա. Մ. ԱՌԱԳԵԼՅԱՆ

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ  
ՀԱՇՎԱՐԿՐ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հաստատուն հոսանքով պայմանավորված մագնիսական դաշտի հաշվարկը անհամասեռ միջավայրում ներկայացնում է զգալի տեսական և կիրառական հետաքրքրություն: Սակայն, երբ միջավայրի առանձին մասերի մագնիսական թափանցելիությունները տարբեր և վերջավոր արժեքներ ունեն, հաշվարկը կապված է զգալի դժվարությունների հետ:

Ներկա աշխատանքում մենք դիտարկում ենք հաստատուն հոսանքով պայմանավորված հարթ-զուգահեռային մագնիսական դաշտեր անհամասեռ միջավայրում, որը բաղկացած է երկու տարբեր ու վերջավոր մագնիսական թափանցելիություն ունեցող մասերից, երբ արդ մասերը բաժանող սահմանը իրենից ներկայացնում է կամավոր երկնիստ անկյուն:

Այդ դեպքը պրակտիկալում հանդիպում է բավական հաճախ, և որքանակ հալանի է, մինչև այժմ չի արված ընդհանուր լուծում, որը հասցված լինի շատ թե քիչ պարզ բանաձևի ինժեներական օգտագործման համար: Լուծումը իրագործում ենք ֆիկտիվ «մագնիսական լիցքերի» օգնությամբ, որով որոշակի կերպով բաշխվում են տարբեր մագնիսական թափանցելիություն ունեցող մասերը բաժանող սահմանների վրա: Մագնիսական դաշտը որոշվում է վերոհիշյալ «մագնիսական լիցքերով» և հոսանքով պայմանավորված դատերի վերապրումով՝ ենթադրությամբ, որ նրանք գտնվում են համասեռ միջավայրում: Այդպիսի լուծումը բավարարում է զրված խնդրի բոլոր պայմաններին:

«Մագնիսական լիցքերը» և մագնիսական դաշտի լարվածություն թաղանթերիցները որոշող ինտեգրալ հավասարումների սխեմաի լուծման համար օգտագործում ենք արդ լիցքերը և բաղադրիչները որոշող ֆունկցիաների ձևափոխությունը: Ըստ որում ստացվում է հանրահաշվական հավասարումների սխեմա, որտեղից հեշտ կարելի է գտնել ձևափոխված ֆունկցիաների արժեքները: Այս վերջիններից Ռիման-Նյուարցի հսկողարձ ձևափոխություն օգնությամբ ստացվում են սկզբնական ֆունկցիաները, կամպլեքս տրոսֆորմում ինտեգրալ տեսքով, որոնք հաշվում ենք մնացածների օգնությամբ:

Կատարված հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ ենթինսեզրալ ֆունկցիաների բեկոնները բաշխվում են հետևյալ կերպով՝  $v = \pm m q \pm \pm \delta_k (q = 0, 1, 2, \dots)$ , որտեղ  $m$  և  $\delta_k$  կախված են միջավայրի տարրեր մասերի մագնիսական թափանցելիությունների արժեքներից և այդ մասերը բաժանող երկնիստ անկյան մեծությունից:

Վերահիշյալի շնորհիվ հաշտղվում է ստանալ ընդհանուր տեսքով համեմատաբար պարզ բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս հաշվել մագնիսական դաշտի լարվածություն բաղադրիչները նշված անհամասեռ միջավայրի ցանկացած կետում, երբ նրա առանձին մասերի մագնիսական թափանցելիությունները և սահման հանդիսացող երկնիստ անկյունը ունեն ցանկացած մեծություններ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
2. Тамм И. Е., Основы теории электричества. ГИИТЛ, 1956.
3. Аракелян А. М., Определение магнитного поля в неоднородной среде при помощи „магнитных зарядов“ распределенных на границе раздела сред. Тр. VI конференции молодых научных работников ЭНИН АН СССР.
4. Аракелян А. М., Электродинамические силы, действующие на проводник с током, расположенным вблизи угла ферромагнитного тела. Журн. Электричество, № 2, 1959.
5. Меерович Э. А., Применение метода изображений для электростатических и магнитостатических задач. Известия ЭНИН АН СССР, т. 4, вып. 1, 1936.
6. Хег Б., Электромагнитные расчеты. ОНТИ НКТП, Энергонздат, 1934.