

М. С. ПОХСАРЯН

### ЗАТУХАНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ\*

Изучением возникновения и развития поперечной циркуляции на криволинейных участках водовода и во входной части отводящего канала при делении потока занимались многие исследователи. Опыты показали, что на некотором определенном расстоянии ниже поворота, поперечные скорости становятся настолько малыми, что практически можно считать поток параллельно-струйным. М. В. Потапов [1], исходя из условия потерь энергии на трение, получил формулу затухания средней квадратичной скорости циркуляции по длине канала. Подобная формула, но с другим декрементом затухания была получена А. К. Ананяном [2].

Первая попытка решения затронутого вопроса с целью получения закона затухания отдельных поперечных скоростей была сделана В. М. Маккавеевым [3], который рассматривал движение жидкости в широком водоводе, пренебрегая при этом вертикальной составляющей скорости. В случае, когда гидравлические элементы претерпевают сильные изменения по ширине, применить решение Маккавеева не представляется возможным.

Настоящая работа посвящена отысканию закона затухания поперечных скоростей на участках, где отсутствуют факторы, вызвавшие циркуляцию, а циркуляция в первоначальном створе, непосредственно за поворотом, считается заданной. При этом принимается, что глубина соизмерима с шириной потока и, следовательно, задача решается при наличии вертикальных компонентов скоростей. Исходными являются следующие уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности, в которых коэффициент турбулентного перемешивания принят постоянным:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A_0}{\rho} \Delta^2 u_x$$
$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{A_0}{\rho} \Delta^2 u_y$$

\* В сокращенном виде работа опубликована в ДАН СССР, т. 119, № 2, 1958.

$$u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{A_0}{\rho} \Delta^2 u_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

В уравнениях (1) начало координатной системы лежит на свободной поверхности потока, ось  $x$  направлена вдоль течения, ось  $y$  направлена поперек потока, ось  $z$  направлена вертикально вниз,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  — составляющие скорости по соответствующим осям.

Предполагая, что продольные скорости остаются постоянными, а распределение давления подчиняется гидростатическому закону, и вводя функцию тока, из уравнения неразрывности получим:  $u_y = \frac{\partial F}{\partial z}$

и  $u_z = -\frac{\partial F}{\partial y}$ . Так как величины поперечных скоростей малы по сравнению с продольными скоростями, а изменения их по осям имеют одинаковый порядок, можно, в первом приближении, отбросить нелинейные члены в системе (1).

Тогда для определения  $u_y$  и  $u_z$  получим выражения:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta^2} - b \frac{\partial u_y}{\partial \xi} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \zeta^2} - b \frac{\partial u_z}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

где

$$\xi = \frac{x}{H}, \quad \eta = \frac{y}{B}, \quad \zeta = \frac{z}{H}, \quad a = \frac{B}{H}, \quad b = \frac{u_0 \rho H}{A_0} \quad (4)$$

$B$  — ширина прямоугольного канала,

$H$  — глубина наполнения канала.

Решение линейных уравнений в частных производных второго порядка (2) или (3) производим методом разделения переменных. Решение ищется в виде:

$$u_y = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\xi) Y_i(\eta) Z_i(\zeta). \quad (5)$$

Подставляя это решение в уравнение (2) и учитывая линейный характер его и граничных условий, можно для любого индекса написать самостоятельное дифференциальное уравнение:

$$X''YZ + \frac{1}{a^2} XY''Z + XYZ'' - bX'YZ = 0$$

или

$$-\frac{X'' - bX'}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}. \quad (6)$$

Так как левая часть не зависит от  $\eta$  и  $\zeta$ , а правая от  $\xi$ , то каждая из этих частей равна постоянной величине. Обозначая последнюю через  $-k_i^2$  получим для  $X(\xi)$  обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$X'' - bX' - k_i^2 X = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$X(\xi) = A_{ij} \exp \left[ \left( \frac{b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right] + B_{ij} \exp \left[ - \left( -\frac{b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right], \quad (7)$$

где  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  — постоянные интегрирования.

Для определения функций  $Y$  и  $Z$  обратимся к уравнению (6), которое после определения  $X = X(\xi)$  можно представить в виде:

$$\frac{1}{a^2} \frac{Y''}{Y} + k_i^2 = -\frac{Z''}{Z}.$$

Так как левая часть уравнения не зависит от  $\zeta$ , а правая от  $\eta$ , то каждую из этих частей приравняем новой постоянной  $n_j^2$ . Тогда получим следующие дифференциальные уравнения;

$$Y'' + a^2 (k_i^2 - n_j^2) Y = 0, \quad Z'' + n_j^2 Z = 0,$$

интегралы которых будут:

$$Y(\eta) = D_{ij} (C_{ij} \cos a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta + \sin a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta), \quad (8)$$

$$Z(\zeta) = E_j (\cos n_j \zeta + F_j \sin n_j \zeta). \quad (9)$$

Произведение уравнений (8) и (9) дает искомое решение, а именно:

$$u_y = \sum_i \sum_j \left\{ A_{ij} \exp \left[ \left( \frac{b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right] + B_{ij} \exp \left[ - \left( \frac{-b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right] \right\} \times (C_{ij} \cos a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta + \sin a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta) (\cos n_j \zeta + F_j \sin n_j \zeta). \quad (10)$$

Далее, с помощью изложенного метода легко определить значение вертикальной составляющей скорости:

$$u_z = \sum_i \sum_j \left\{ L_{ij} \exp \left[ \left( \frac{b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right] + M_{ij} \exp \left[ - \left( \frac{-b}{2} + \sqrt{\left( \frac{b}{2} \right)^2 + k_i^2} \right) \xi \right] \right\} \times (\cos a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta + N_{ij} \sin a \sqrt{k_i^2 - n_j^2} \eta) (k_j \cos n_j \zeta + \sin n_j \zeta). \quad (11)$$

Граничные условия для определения произвольных постоянных, входящих в (10), находим в предположении непроницаемости боковых стенок прямоугольного канала

$$u_y \Big|_{\substack{\eta=0 \\ \eta=1}} = 0,$$

что приводится к

$$C_{ij} = 0 \quad (12)$$

$$k_i = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + n_j^2} \quad (m = 1, 2, \dots); \quad (13)$$

а также в предположении равенства нулю касательных напряжений на дне и на свободной поверхности потока:

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{\substack{z=0 \\ z=1}} = 0.$$

Последние равенства равносильны тому, что кривые распределения  $u_y$  приближаются ко дну и к свободной поверхности потока под прямым углом, что подтверждается экспериментальными данными многих авторов.

Из этих условий определяются:

$$F_j = 0, \quad (13)$$

$$n_j = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Для вертикального компонента скорости, исходя из условия непроницаемости дна и свободной поверхности потока, а также равенства нулю касательных напряжений на боковых стенках, получим:

$$N_{ij} = 0, \quad (15)$$

$$n_j = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (16)$$

$$K_j = 0, \quad (17)$$

$$k_j = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \pi^2 n^2}. \quad (18)$$

Далее, какова бы не была циркуляция на прямолинейном участке, она на сравнительно большой длине должна совершенно исчезнуть. Это условие приводит к равенству нулю коэффициентов  $A_{ij}$  и  $L_{ij}$

Коэффициенты  $B_{ij}$  и  $M_{ij}$  определяются из условий, что распределение поперечных скоростей в первоначальном створе прямолинейного участка задано. Найденные значения произвольных постоянных (12)–(18) позволяют однозначно определить величины поперечных скоростей:

$$u_y = \sum_m \sum_n B_{mn} \exp\left(-\delta_{mn} \frac{x}{H}\right) \sin \frac{m\pi y}{B} \cos \frac{n\pi z}{H} \quad (19)$$

$$u_z = \sum_m \sum_n M_{mn} \exp\left(-\delta_{mn} \frac{x}{H}\right) \cos \frac{m\pi y}{B} \sin \frac{n\pi z}{H} \quad (20)$$

Пользуясь для коэффициента турбулентной вязкости формулой А. В. Караушева [4], получим декремент затухания в виде:

$$\delta_{mn} = -\frac{MC}{2g} + \sqrt{\left(\frac{MC}{2g}\right)^2 + \pi^2 \left[\left(\frac{H}{B}\right)^2 m^2 + n^2\right]}, \quad (21)$$

где  $C$  — коэффициент Шези,  $M$  — эмпирический коэффициент, который по Базену меняется в пределах от 40 до 48, по Буссинеску равен 44,6, а по Караушеву меняется в зависимости от коэффициента Шези. В. М. Маккавеев рекомендует  $M$  принимать по Буссинеску.

Полученный результат сравниваем с экспериментальными данными М. Ю. Вагабова [5]. Во входной части прямолинейного зеркального лотка, с помощью поверхностных и донных направляющих систем, Вагабовым создана поперечная циркуляция, и на разных расстояниях от направляющей системы измерены компоненты скоростей. Так, например, в опыте № 17, где створ был расположен на расстоянии 1,2 м от направляющей системы, измерены компоненты скоростей в 30 различных точках. Ниже на расстоянии 3 м в тех же точках снова измерены компоненты скоростей (опыт № 18). Принимая циркуляцию в опыте № 17 заданной, определим коэффициенты  $B_{mn}$ . Согласно экспериментальных данных требуем, чтобы в точках № 11, 20, 23 и 24 горизонтальная поперечная скорость была бы равна соответственно 3,9; 3,31; 2,06 и 2,15 см/сек. В силу (19) получим алгебраическую систему уравнений, в которой число неизвестных соответствует числу уравнений. Решая систему уравнений, получим:

$$B_{11} = -9,28; B_{12} = 1,82; B_{13} = 0,50; B_{21} = 0,43.$$

Принимая эти значения коэффициентов, на основании формулы (19), получим расчетную формулу для  $u_y$  в первоначальном створе  $x=0$  (опыт № 17):

$$u_y = -9,28 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{\pi z}{H} - 1,82 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{2\pi z}{H} - 0,5 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{3\pi z}{H} + \\ + 0,432 \sin \frac{2\pi y}{B} \cos \frac{\pi z}{H}. \quad (23)$$

На рис. 1 сплошными линиями показано распределение  $u_y$  на разных вертикалях, для которых имеются экспериментальные значения  $u_y$  (кружки). Сопоставление показало, что средняя квадратичная скорость  $\bar{u}_y = 4,62$  в эксперименте отличается от расчетной  $\bar{u}_y = 4,18$  всего на 10%.

Для того, чтобы определить распределение  $u_y$  в нижележащем сечении необходимо в формулу (23) ввести соответствующие экспоненциальные множители. Они, как видно из декремента затухания (21), зависят от коэффициента шероховатости ( $C=60$ ), от отношения

глубины к ширине  $\left(\frac{H}{B} = 0,6\right)$  и, наконец, от относительной длины  $\left(\frac{x}{H} = 10\right)$ .

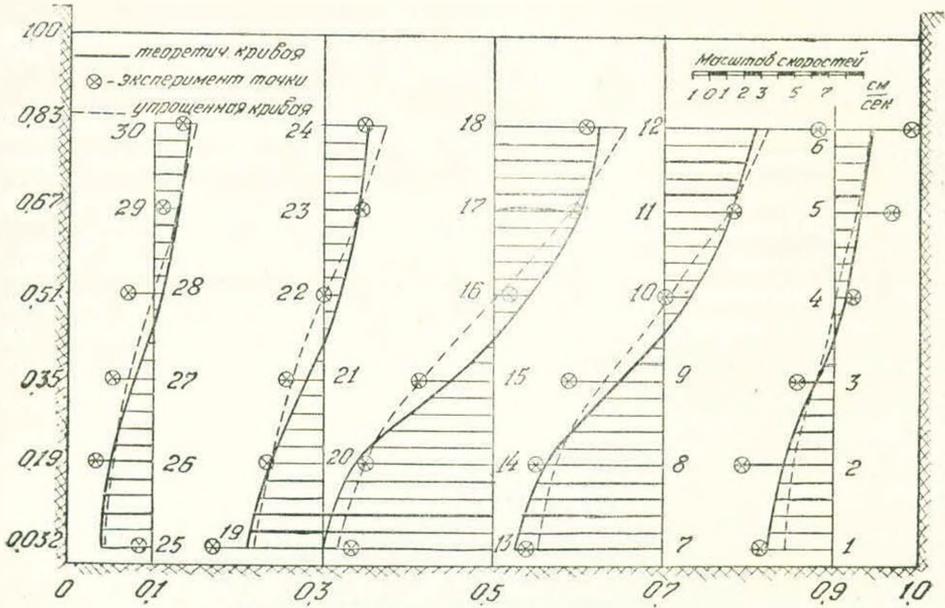


Рис. 1. Сопоставление кривых затухания циркуляции с экспериментальными данными М. Ю. Вагабова (опыт № 17).

Определив числовые значения  $\delta_{min}$  при разных  $m$  и  $n$ , вводя эти значения в уравнение (23), получим расчетную формулу для нижнего створа в виде:

$$u_y = -5,68 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{\pi z}{H} - 0,379 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{2\pi z}{H} - 0,017 \sin \frac{\pi y}{B} \cos \frac{3\pi z}{H} + 0,178 \sin \frac{2\pi y}{B} \cos \frac{\pi z}{H}. \quad (24)$$

На рис. 2 сопоставляются значения  $u_y$ , полученные Вагабовым экспериментальным путем (опыт № 18) и рассчитанные по формуле (24). В нескольких точках наблюдается резкое расхождение. Однако средне-квадратичное отклонение по всему сечению не превышает 20%.

В случае, когда в формулах (23) и (24) ограничиваются только первыми членами ряда, подсчеты дают почти одинаковые с опытами результаты. Эти данные нанесены на рис. 1 и 2 пунктирными линиями. Последнее обстоятельство нам дает возможность при переходе от отдельных компонентов к средней квадратичной скорости циркуляции ограничиваться только первыми членами рядов (19) и (20). Благодаря этому затухание средней квадратичной скорости циркуляции может быть выражено формулой:

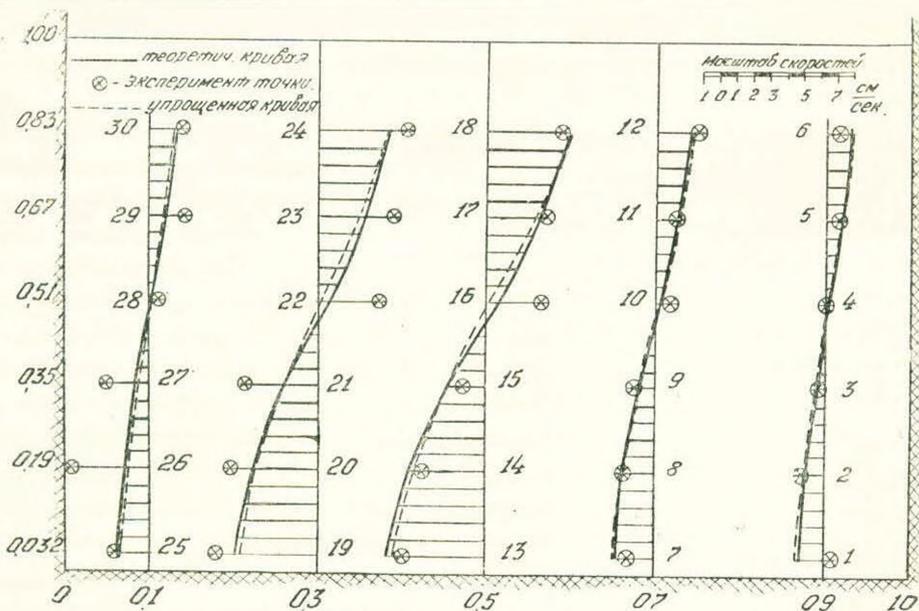


Рис. 2. Сопоставление кривых затухания циркуляции с экспериментальными данными М. Ю. Вагабова (опыт № 18)-

$$\bar{u}_c = \bar{u}_0 \exp\left(-\delta_{11} \cdot \frac{x}{H}\right) \quad (25)$$

где  $\delta_{11}$  — получается из (21) при  $m = n = 1$ , а скорость  $\bar{u}_0 = \bar{u}_c$  (при  $x = 0$ ) считается заданной.

Полученные выражения (21) — (25) показывают, что закон затухания циркуляции в определенной мере зависит от геометрических размеров и шероховатости канала. На рис. 3 и 4 приведены кривые затухания средней квадратичной скорости циркуляции при разных

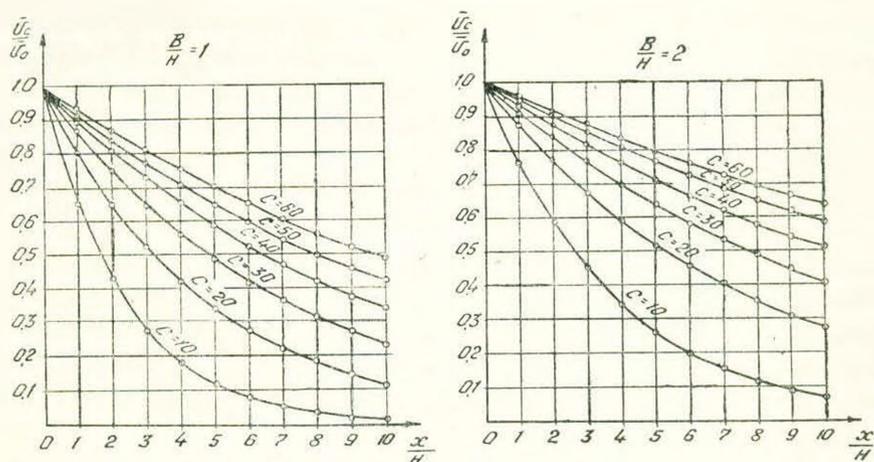


Рис. 3. Затухание поперечной циркуляции в узких каналах, при разных значениях коэффициента Шези.

отношениях ширины водотока к глубине и при различных значениях коэффициента Шези. Анализ этих кривых показывает, что при любых

отношениях циркуляция затухает более интенсивно в шероховатых каналах и при одной и той же шероховатости циркуляция затухает интенсивнее в узких каналах.

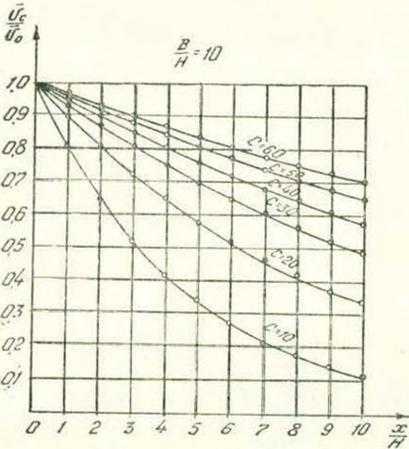


Рис. 4. Затухание поперечной циркуляции в широком канале, при разных значениях коэффициента Шези.

Для иллюстрации проведено сравнение кривой падения энергии поперечной циркуляции:

$$\bar{h}_c = h_0 \exp\left(-2 \delta_{11} \frac{x}{H}\right) \quad (26)$$

с данными Большакова для разных значений средней скорости. На оси абсцисс отложена длина канала, на оси ординат—энергия циркуляции в безразмерных величинах.

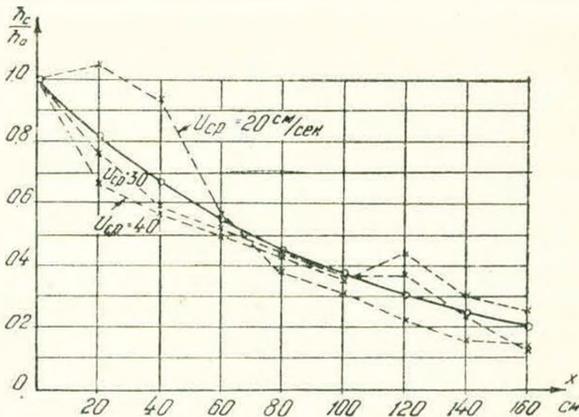


Рис. 5. Падение энергии поперечной циркуляции. Пунктирной линией показаны результаты опыта; сплошной линией — теоретические результаты по формулам автора.

Сравнение показывает, что отклонения всегда находились в допустимых пределах.

Водно-энергетический институт Академии наук  
Армянской ССР

Поступило 26 IV 58

## Մ. Ս. ՓՈՆՈՐՈՐԾԱՆ

## ԸՆԴՀԱՅՆԱԿԱՆ ՑԻՐԿՈՒՂՅԱՑԻԱՅԻ ՄԱՐՈՒՄԸ ՈՒՂԱԳԻԹ ԶՐԱՆՑՔՈՒՄ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Բնական ընդլայնական ցիրկուլյացիան, որն առաջանում է հունի կորագիծ մասերում, աստիճանաբար մարվում է ուղղաձիգ հունի երկարությամբ: Ոլորանից հետո, մի որոշ հեռավորություն վրա արագություն ընդլայնական բաղադրիչները դառնում են այնքան փոքր (երկայնական արագության համեմատությամբ), որ կարելի է նրանց լրիվ արհամարհել: Այս առթիվ հոգվածում գիտվում է արագությունների ընդլայնական բաղադրիչների մարման հարցը ջրատարի այն մասում, որանց բացակայում են ցիրկուլյացիա առաջացնող ամեն տեսակ գործոնները: Իսկ ցիրկուլյացիան (ընդլայնական բաղադրիչների բաշխումը) ոլորանից հետո, ուղղագիծ մասի սկզբնական կտրվածքում համարվում է տրված:

Հիմք են ընդունված մածուցիկի անսեղմելի հեղուկի շարժման և անխցելիության հավասարումները, տուրբուլենտ տեղափոխման գործակցի հաստատուն լինելու դեպքում: Ընդունվում է, որ երկայնական արագությունները մնում են անփոփոխ, իսկ ճնշումը ենթարկվում է հիդրոստատիկ օրենքին: Այնուհետև շարժման հավասարումների սխեմայից առաջին մոտավորությամբ դեռ պետք է ոչ դժային անդամները, խնդիրը բերվում է (2) և (3) հավասարումների լուծմանը: Վերջին հավասարումների ինտեգրումը կատարվում է երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներով պայմանի դիֆերենցիալ հավասարումների համար փոփոխականների անջատման մեթոդով: Արագության ընդլայնական բաղադրիչների համար ստացված (10) և (11) արտահայտություններից յուրաքանչյուրն իր մեջ պարունակում է ինտեգրման 6 հաստատուններ, որոնք պետք է որոշվեն եզրային պայմաններից: Դրանցից առաջինը համարվում է ցիրկուլյացիայի նախօրոք հայանի լինելը ուղղաձիգ մասի սկզբնական կտրվածքում: Այս ընդունված են պատերի անսեղման լուծումը և շոշափող լարվածությունների բացակայությունը նրանց վրա: Եվ վերջապես, ինչպիսին էլ լինեն ցիրկուլյացիոն բաղադրիչները, ուղղագիծ ջրատարի բավական մեծ հեռավորության վրա նրանք պետք է լրիվ մարվեն: Այս պայմանները թույլ են տալիս միարժեք կերպով որոշելու (19) և (20) ընդլայնական արագությունները: Կազմված են նաև ցիրկուլյացիայի միջին քառակուսային արագության, նրա էներգիայի մարման (25) և (26) հավասարումները: Նկ. 3 և 4 բերված են ցիրկուլյացիայի միջին քառակուսային արագության մարման գիտարանները՝ կախված հունի երկարաչափական մեծություններից և խորություններից հայտանիշից: Ստացված է, որ միևնույն չափեր ունեցող ջրատարներում ցիրկուլյացիան ավելի արագ է մարում այնտեղ, որտեղ ավելի մեծ է պատերի խորությունը, և միևնույն խորություն ունեցող ջրանցքներում ցիրկուլյացիան արագ է մարում համեմատաբար նեղ ջրատարներում:

Ցիրկուլյացիայի հորիզոնական-ընդլայնական արագության համար ստացված օրենքը նկ. 1 և 2 համեմատված է Վոգարովի կողմից ստացված փորձնական ավյալների հետ: Իսկ նկ. 5 բերված է ցիրկուլյացիայի մարման արտա-

հալոտ թլան համեմատությունը բոլշակովի տվյալների հետ: Համեմատություններ են կատարված նաև այլ տվյալների հետ, որոնց ժամանակ ստացված շեղումը նույնպես գտնվել է թույլատրելի սահմաններում:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов М. В.* Винтовое движение жидкости в прямом открытом канале прямоугольного сечения. Сб. тр. под ред. М. В. Потапова, Сельхозгиз, М., 1936.
2. *Ананян А. К.* Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока. Ереван, 1952.
3. *Маккавеев В. М.* Поперечные течения в призматическом русле и их возбуждение. Тр. ГГИ 2 (56), 1947.
4. *Караушев А. В.* Гидравлика рек и водохранилищ. Изд. „Речной транспорт“.Л., 1955.
5. *Вагабов М. Ю.* Гидравлические исследования винтового потока в открытом канале прямоугольного сечения. Сб. тр. под ред. М. П. Потапова, Сельхозгиз, 1936.
6. *Потапов М. В.* Метод поперечной циркуляции и его применение в гидротехнике. Изд. АН СССР, М.,—Л., 1947.
7. *Большаков М. В.* Поперечная циркуляция в потоке сжатого сечения. Тр. ВНИИГ и М-а, т. 30, 1950.
8. *Шаумян В. А.* Научные основы орошения и оросительных сооружений, Сельхозгиз, 1948.