

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. ДАРВИНЯН

К ВОПРОСУ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С УЧЕТОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В статье рассматриваются сдвиговые колебания системы с одной степенью свободы, с учетом упруго-пластических деформаций, применительно к вопросам сейсмостойкости.

Принимается, что диаграмма сила-перемещение системы характеризуется двумя наклонными участками 0—1 и 1—2, показанными на рис. 1.

До тех пор, пока деформации являются упругими, реакция связана с перемещением линейной зависимости

$$r = xt \operatorname{tg} \alpha = kx \quad (\text{при } x \leq x_T), \quad (1)$$

где $k = t \operatorname{tg} \alpha$ — жесткость в упругой стадии;

x_T — предельное значение x , при котором система еще оказывает упругое сопротивление.

Если при росте деформаций перемещение x превышает величину x_T , реакция изменяется по следующему линейному закону в зависимости от x :

$$r = kx \left[1 - \lambda \left(1 - \frac{x_T}{x} \right) \right], \quad (2)$$

где $\lambda = \frac{k - k_1}{k}$ — параметр упрочнения, а $k_1 = t \operatorname{tg} \beta$ — модуль упрочнения.

Расчленим перемещение x на два составляющих: на упругое $x_{упр}$ и остаточное x_n :

$$x = x_{упр} + x_n.$$

При колебании оба перемещения являются функциями от времени t . Что касается реакции, действующей в заданное мгновение $t = t_1$, то она определяется только упругой составляющей перемещения (рис. 1).

$$r = kx_{упр} = k(x - x_n).$$

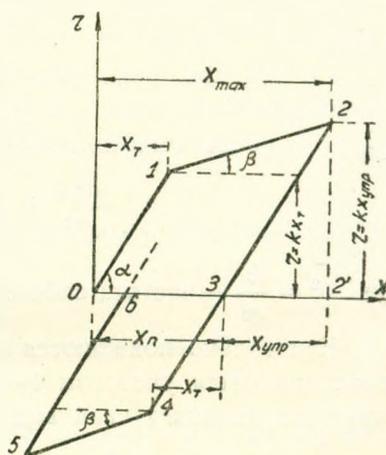


Рис. 1.

Вопрос заключается в том, чтобы найти полное, а также остаточное перемещение в функции от времени.

Будем предполагать, что эффект Баушингера не имеет место, т. е. предел упругости не меняется при повторных нагружениях.

1. Дифференциальные уравнения движения

Пусть рассматриваемая система претерпевает сдвиговые колебания под действием внешней силы $Q(t)$.

Уравнение движения может быть записано в следующем виде [2]:

$$m \left(\frac{d^2 x_{\text{упр}}}{dt^2} + \frac{d^2 x_n}{dt^2} \right) + k x_{\text{упр}} = Q(t). \quad (1.1)$$

Зависимости между перемещениями $x_{\text{упр}}$ и x_n различны для разных стадий движения (рис. 1), поэтому интегрирование дифференциального уравнения (1.1) осуществляется для каждого этапа отдельно с использованием условий неразрывности перемещений и скоростей на границах участков диаграммы, показанной на рис. 1 (условий сопряжений)

До тех пор, пока движение характеризуется упругим участком диаграммы 0—1 (рис. 1) в уравнение (1.1) можно подставить $x_n = 0$, $x_{\text{упр}} = x$, после чего получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{Q(t)}{m}, \quad (1.2)$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$ — частота собственных колебаний системы.

Как только появляются остаточные деформации, т. е. движение характеризуется участком 1—2 (рис. 1), дифференциальное уравнение движения изменяет свой вид и записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = \frac{Q(t)}{m} - \omega^2 \lambda x_T, \quad (1.3)$$

где $p^2 = (1 - \lambda) \omega^2$.

В стадии разгрузки, т. е. на участке 2—3 диаграммы (рис. 1), имеем:

$$x_n = \left(1 - \frac{k_1}{k} \right) (x_{\text{max}} - x_T) = \lambda (x_{\text{max}} - x_T),$$

$$x_{\text{упр}} = x - \lambda (x_{\text{max}} - x_T).$$

Следовательно дифференциальное уравнение движения (1.1) для этого участка запишется так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{Q(t)}{m} + \omega^2 \lambda (x_{\text{max}} - x_T). \quad (1.4)$$

После того, как будем иметь полную разгрузку, т. е. движение дойдет до точки 3 диаграммы (рис. 1), можем ее принять за новое

начало отсчета движения с соответствующими начальными условиями (при заданных значениях скорости и перемещения, которые получаются из решения (1.4)) и составить аналогичные дифференциальные уравнения для следующих стадий движения (участки 3—4, 4—5, 5—6 и т. д.).

Таким образом задача о колебании системы с одной степенью свободы с учетом пластических деформаций приводится к решению уравнений типа (1.2), (1.3) и (1.4) с условиями сопряжения скорости и перемещения на границах отдельных участков (точки 1, 2, 3, 4, и т. д.).

2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения

На упругом участке диаграммы 0—1 (рис. 1) перемещение на основании (1.2) запишется следующим образом:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{\omega m} \int_0^t Q(u) \sin \omega (t - u) du.$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из условий, что при $t = 0$, $x = x_0$, $x' = x'_0$, откуда получим:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega m} \int_0^t Q(u) \sin \omega (t - u) du. \quad (2.1)$$

Время t_τ , при котором имеет место максимальное упругое смещение, найдем из (2.1) при $x = x_\tau$:

$$x_\tau - x_0 \cos \omega t_\tau - \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t_\tau - \frac{1}{\omega m} \int_0^{t_\tau} Q(u) \sin \omega (t_\tau - u) du = 0. \quad (2.2)$$

Определяя из (2.2) значение t_τ , на основании (2.1) можем найти величину скорости в этот момент:

$$x'_\tau = x'_0 \cos \omega t_\tau - x_0 \omega \sin \omega t_\tau + \frac{1}{m} \int_0^{t_\tau} Q(u) \cos \omega (t_\tau - u) du. \quad (2.3)$$

После появления пластических деформаций, движение характеризуется участком диаграммы 1—2 (рис. 1) и дифференциальное уравнение примет вид (1.3), решение которого запишется так:

$$x = C \cos pt + D \sin pt + \frac{1}{p} \int_{t_\tau}^t \left[\frac{Q(u)}{m} - \omega^2 \lambda x_\tau \right] \sin p (t - u) du. \quad (2.4)$$

Постоянные C и D определяются из условия сопряжения скоростей и перемещений на границе участков 0—1 и 1—2:

при $t = t_\tau$, $x = x_\tau$, $x' = x'_\tau$.

Отсюда, на основании (2.4),

$$x = x_{\tau} - \frac{\omega^2 x_{\tau}}{p^2} \left[1 - \cos p(t - t_{\tau}) \right] + \frac{x'_{\tau}}{p} \sin p(t - t_{\tau}) + \frac{1}{pm} \int_{t_{\tau}}^t Q(u) \sin p(t - u) du. \quad (2.5)$$

Время t_{\max} , при котором получается максимальное смещение x_{\max} , находим из (2.5), имея ввиду, что в этот момент скорость движения равняется нулю:

$$x'_{\tau} \cos p(t_{\max} - t_{\tau}) - \frac{\omega^2 x_{\tau}}{p} \sin p(t_{\max} - t_{\tau}) + \frac{1}{m} \int_{t_{\tau}}^{t_{\max}} Q(u) \cos p(t_{\max} - u) du = 0. \quad (2.6)$$

Определив из (2.6) величину t_{\max} и подставляя в (2.5), получим значение максимального смещения:

$$x_{\max} = x_{\tau} - \frac{\omega^2 x_{\tau}}{p^2} [1 - \cos p(t_{\max} - t_{\tau})] + \frac{x'_{\tau}}{p} \sin p(t_{\max} - t_{\tau}) + \frac{1}{pm} \int_{t_{\tau}}^{t_{\max}} Q(u) \sin p(t_{\max} - u) du. \quad (2.7)$$

В зоне разгрузки (участков 2—3) дифференциальное уравнение движения имеет вид (1.4), решение которого можно записать так:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_{t_{\max}}^t \left[\frac{Q(u)}{m} + \omega^2 \lambda (x_{\max} - x_{\tau}) \right] \sin \omega(t - u) du.$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из условия сопряжения скоростей и перемещений на границах участков 1—2 и 2—3 (рис. 1), т. е.

$$\text{при } t = t_{\max}, \quad x = x_{\max} \quad x' = 0.$$

Учитывая эти условия, получим:

$$x = \lambda(x_{\max} - x_{\tau}) + [x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_{\tau})] \cos \omega(t - t_{\max}) + \frac{1}{\omega m} \int_{t_{\max}}^t Q(u) \sin \omega(t - u) du. \quad (2.8)$$

Момент конца разгрузки t_p находим из условия, что смещение равняется максимальному пластическому смещению $\lambda(x_{\max} - x_{\tau})$:

$$[x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_{\tau})] \cos \omega(t_p - t_{\max}) + \frac{1}{\omega m} \int_{t_{\max}}^{t_p} Q(u) \sin \omega(t_p - u) du = 0. \quad (2.9)$$

Найдя отсюда t_p и подставляя в первую производную от x из (2.8), получим величину скорости в конце зоны разгрузки (точка 3, рис. 1).

$$x_p' = -\omega [x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T)] \sin \omega(t_p - t_{\max}) + \frac{1}{m} \int_{t_{\max}}^{t_p} Q(u) \cos \omega(t_p - u) du. \quad (2.10)$$

Если закон изменения внешней силы $Q(t)$ таков, что [возможно неполное разгружение, т. е. движение останавливается в какой-нибудь точке участка 2—3, то время этого момента находим из (2.8), приравнявая нулю первое производное от x :

$$-\omega [x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T)] \sin \omega(t - t_{\max}) + \frac{1}{m} \int_{t_{\max}}^t Q(u) \cos \omega(t - u) du = 0. \quad (2.11)$$

Находя из (2.11) t и подставляя найденное значение в (2.8), можем найти величину смещения, отвечающую этому моменту.

При этом берем второй корень уравнения (2.11).

Следует отметить, что если под внешней нагрузкой понимать закон колебания почвы, то полученные дифференциальные уравнения и их решения будут пригодны для систем, находящихся под воздействием сейсмических сил: при этом $Q(t) = -m x_1''(t)$, где $x_1(t)$, показывает закон колебания почвы, а m — масса данной системы.

Переходим к рассмотрению конкретных примеров действия внешней силы $Q(t)$.

3. Действие гармонической силы

Предположим, что рассматриваемая система колеблется под действием косинусоидальной силы

$$\frac{Q(t)}{m} = b \cos nt.$$

Тогда закон изменения перемещения в упругой зоне (участок 0—1), на основании (2.1) будет:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{x_0'}{\omega} \sin \omega t + \frac{b}{\omega^2 - n^2} (\cos nt - \cos \omega t). \quad (3.1)$$

Время максимального упругого смещения согласно (2.2) определится по формуле:

$$x_T - x_0 \cos \omega t_T - \frac{x_0'}{\omega} \sin \omega t_T - \frac{b}{\omega^2 - n^2} (\cos n t_T - \cos \omega t_T) = 0. \quad (3.2)$$

Скорость в этот момент будет (см. (2.3)):

$$x_T' = x_0' \cos \omega t_T - x_0 \omega \sin \omega t_T - \frac{b}{\omega^2 - n^2} (n \sin n t_T - \omega \sin \omega t_T), \quad (3.3)$$

где величина t_T определяется по формуле (3.2).

В зоне, где появляются пластические деформации, как известно, дифференциальное уравнение движения имеет вид (1.3), решение которого для рассматриваемого случая запишется следующим образом:

$$x = \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)x_T + \left(\frac{\omega^2 x_T}{p^2} - \frac{b}{p^2 - n^2} \cos nt_T\right) \cos p(t - t_T) + \\ + \left(\frac{\dot{x}_T}{p} + \frac{b}{p^2 - n^2} \cdot \frac{n}{p} \sin nt_T\right) \sin p(t - t_T) + \frac{b}{p^2 - n^2} \cos nt. \quad (3.4)$$

Момент максимального смещения находим из (2.6) или из (3.4), имея в виду, что при этом скорость движения равна нулю:

$$\left(\frac{\omega^2 x_T}{p^2} - \frac{b}{p^2 - n^2} \cos nt_T\right) \sin p(t_{\max} - t_T) + \frac{b}{p^2 - n^2} \cdot \frac{n}{p} \sin nt_{\max} - \\ - \left(\frac{\dot{x}_T}{p} + \frac{b}{p^2 - n^2} \cdot \frac{n}{p} \sin nt_T\right) \cos p(t_{\max} - t_T) = 0. \quad (3.5)$$

Определяя величину t_{\max} из (3.5) и подставляя в (3.4) вместо t , можно получить значение максимального смещения.

Величины t_T и \dot{x}_T заранее нужно определить из формул (3.2) и (3.3).

В зоне разгрузки, т. е. на участке 2—3 (рис. 1), дифференциальное уравнение движения описывается как (1.4), решение которого на основании (2.8) дает:

$$x = \lambda(x_{\max} - x_T) + \left[x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T) - \right. \\ \left. - \frac{b}{\omega^2 - n^2} \cos nt_{\max} \right] \cos \omega(t - t_{\max}) + \frac{b}{\omega^2 - n^2} \sin nt_{\max} \cdot \\ \cdot \frac{n}{\omega} \sin \omega(t - t_{\max}) + \frac{b}{\omega^2 - n^2} \cos nt. \quad (3.6)$$

Предполагая, что закон изменения внешней силы таков, что позволяет полную разгрузку системы, то время t_p этого момента определим на основании (2.9), т. е. в данном случае формулой

$$\left[x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T) - \frac{b}{\omega^2 - n^2} \cos nt_{\max} \right] \cos \omega(t_p - t_{\max}) + \\ + \frac{b}{\omega^2 - n^2} \left[\cos nt_p + \frac{n}{\omega} \sin nt_{\max} \cdot \sin \omega(t_p - t_{\max}) \right] = 0. \quad (3.7)$$

Скорость в этот момент на основании (2.10) будет:

$$\dot{x}_p = - \left[x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T) - \frac{b}{\omega^2 - n^2} \cos nt_{\max} \right] \sin \omega(t_p - t_{\max}) + \\ + \frac{b}{\omega^2 - n^2} \cdot \frac{n}{\omega} \left[\sin nt_{\max} \cdot \cos \omega(t_p - t_{\max}) - \sin nt_p \right], \quad (3.8)$$

где t_p — определяется из (3.7), а t_{\max} и x_{\max} из уравнений (3.5) и (3.4).

4. Действие мгновенного импульса

Пусть на систему воздействует мгновенный импульс, имеющий конечную величину S . Он сообщает системе начальную скорость $x'_0 = \frac{S}{m}$, после чего начинается свободное колебание.

Такое представление силы при землетрясении соответствует сейсмическому удару. На основании (1.2) дифференциальное уравнение движения в упругой зоне (участок 0—1, рис. 1) примет следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

решение которого при указанных начальных условиях будет:

$$x = \frac{x'_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4.1)$$

Время t_τ , при котором получается максимальное упругое смещение, получим при $x = x_\tau$,

$$\sin \omega t_\tau = \frac{x_\tau \omega}{x'_0}. \quad (4.2)$$

Скорость движения в этот момент на основании (4.1) и (4.2) будет равна

$$x'_\tau = \sqrt{(x'_0)^2 - x_\tau^2 \omega^2}. \quad (4.3)$$

В зоне упруго-пластических деформаций дифференциальное уравнение движения (1.3) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2 x = (p^2 - \omega^2) x_\tau.$$

Решение этого уравнения с условиями сопряжения скоростей и перемещений на границе участков 0—1 и 1—2 (рис. 1), $t = t_\tau$, $x = x_\tau$, $x' = x'_\tau$, имеет вид:

$$x = \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right) x_\tau + \frac{\omega^2 x_\tau}{p^2} \cos p(t - t_\tau) + \frac{1}{p} \sqrt{(x'_0)^2 - x_\tau^2 \omega^2} \sin p(t - t_\tau), \quad (4.4)$$

Время максимального смещения t_{\max} получим из уравнения (4.4) имея ввиду, что в этот момент скорость движения равняется нулю:

$$\operatorname{tg} p(t_{\max} - t_\tau) = \frac{p \sqrt{(x'_0)^2 - x_\tau^2 \omega^2}}{\omega^2 x_\tau}. \quad (4.5)$$

Определив из уравнения (4.5) величину t_{\max} и подставляя его вместо t в (4.4), получим величину максимального смещения:

$$x_{\max} = \left[1 - \frac{\omega^2}{p^2} + \frac{\omega^2}{p^2} \sqrt{1 - \frac{p^2}{\omega^2} + \frac{p^2 (x'_0)^2}{\omega^4 x_\tau^2}} \right] x_\tau. \quad (4.6)$$

В зоне разгрузки дифференциальное уравнение движения на основании (1.4) будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = \omega^2\lambda(x_{\max} - x_T).$$

Решение такого уравнения с условиями сопряжения скорости и смещения в точке 2 (рис. 1)

при $t = t_{\max}, x = x_{\max}, x' = 0$

запишется следующим образом:

$$x = \lambda(x_{\max} - x_T) + [x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T)] \cos \omega(t - t_{\max}). \quad (4.7)$$

Момент конца разгрузки t_p получится, когда смещение равняется максимальному пластическому смещению, т. е. $x = \lambda(x_{\max} - x_T)$.

$$t_p = t_{\max} + \frac{\pi}{2\omega}. \quad (4.8)$$

Скорость в этот момент будет:

$$x'_p = -\omega [x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T)]$$

или, имея ввиду (4.6), получим

$$x'_p = -\omega x_T \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2} \left(\frac{x_0'^2}{\omega^2 x_T^2} - 1 \right)}. \quad (4.9)$$

Сравнивая величину скорости в момент полной разгрузки (точка 3, рис. 1) x'_p с той величиной начальной скорости x'_0 , при которой получается максимальное упругое смещение $x_{T\omega}$, не трудно видеть, что по абсолютной величине всегда $x'_p > x_{T\omega}$, т. е. возможно появление остаточных деформаций обратного знака.

Но можно доказать, что максимальное смещение обратного знака (участок 3—4, 4—5) будет всегда меньше, чем максимальное смещение при первом нагружении.

Действительно максимальное смещение обратного знака (по отношению к новому началу отсчета, точка 3, рис. 1), как видно из (4.7), равно

$$x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T),$$

которое меньше, чем x_{\max} на величину максимального пластического смещения $\lambda(x_{\max} - x_T)$.

На рис. 1 это смещение будет равно отрезку 3—2'.

Таким образом, если при колебании системы с одной степенью свободы, под действием мгновенного импульса с учетом упруго-пластических деформаций по диаграмме, представленной на рис. 1, при первом нагружении не появилось разрушение, то в дальнейшем оно не появится. При этом максимальное смещение определяется по формуле (4.6), где упругой составляющей смещения является

$$x_{\text{упр}} = x_{\tau} \sqrt{1 - \frac{p^2}{\omega^2} + \frac{p^2 (x_0')^2}{\omega^4 x_{\tau}^2}},$$

а пластической составляющей $x_{\text{п}} = \lambda (x_{\text{max}} - x_{\tau})$.

Выражая максимальное смещение через величину импульса, получим:

$$x_{\text{max}} = \left[1 - \frac{\omega^2}{p^2} + \frac{\omega^2}{p^2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{\omega^2} \left(\frac{S^2}{S_{\tau}^2} - 1 \right)} \right] x_{\tau}, \quad (4.10)$$

где S_{τ} — предельный импульс, при котором получается максимальное упругое смещение.

Как видно из (4.10) максимальное смещение не является величиной, пропорциональной импульсу S .

Из полученных уравнений, как частный случай, можно получить решение той же самой задачи, при наличии идеальной диаграммы Прандтля (рис. 2).

Время t_{τ} , при котором получается максимальное упругое смещение, а также скорость в этот момент, определяются формулами (4.2) и (4.3).

Чтобы получить закон изменения перемещения в зоне текучести (участок 1—2, рис. 2), в формуле (4.4) разложим в ряд $\cos p(t - t_{\tau})$ и $\sin p(t - t_{\tau})$ и потом примем $\lambda = 1$ или $p = 0$, тогда получим:

$$x = x_{\tau} + x_{\tau}'(t - t_{\tau}) - \frac{\omega^2 x_{\tau}}{2} (t - t_{\tau})^2. \quad (4.4')$$

Таким же путем получается величина момента максимального смещения и величина максимального смещения из формул (4.5) и (4.6)

$$t_{\text{max}} = t_{\tau} + \frac{x_{\tau}'}{2\omega^2 x_{\tau}}, \quad (4.5')$$

$$x_{\text{max}} = x_{\tau} + \frac{(x_{\tau}')^2}{2\omega^2 x_{\tau}}. \quad (4.6')$$

Выражение x_{max} через величину импульса S имеет вид:

$$x_{\text{max}} = \frac{x_{\tau}}{2} \left(1 + \frac{S^2}{S_{\tau}^2} \right),$$

т. е. максимальное смещение связано с импульсом параболическим законом.

В силу (4.7), в зоне разгрузки закон изменения смещения получим при $\lambda = 1$ из следующего уравнения:

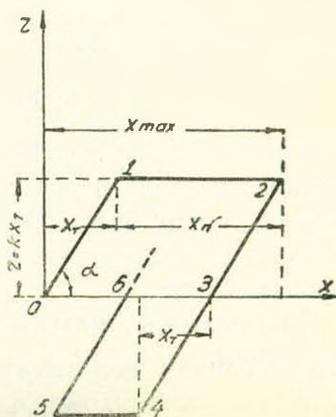


Рис. 2.

$$x = x_{\max} - x_{\tau} + x_{\tau} \cos \omega (t - t_{\max}).$$

Момент конца разгрузки и величина скорости в этот момент получатся из (4.8) и (4.9) при $\lambda = 1$:

$$t_p = t_{\max} + \frac{\pi}{2\omega}, \quad (4.8')$$

$$\dot{x}_p = -\omega x_{\tau}. \quad (4.9')$$

Как видно, величина x_p по абсолютному значению равна величине той начальной скорости \dot{x}_0 , при которой получится максимальное упругое смещение. Следовательно, при наличии диаграммы, показанной на рис. 2 после полной разгрузки имеют место упругие свободные колебания по отношению к новому началу отсчета (точка 3, рис. 2).

Отметим, что полученные результаты при $\lambda = 1$ (рис. 2), соответствуют результатам И. М. Рабиновича [2].

5. Внезапное нагружение

Пусть рассматриваемая система находится под действием сейсмического толчка* и основание колеблется в горизонтальном направлении по закону $x_1(t)$. Под действием горизонтальных инерционных сил система получит в горизонтальном направлении дополнительное смещение $x(t)$.

Как известно, максимальное упругое смещение при внезапном нагружении:

$$x_{\text{упр}} = -2x_{\text{ст}} = -\frac{2x_1^*}{\omega^2},$$

поэтому появление пластических деформаций возможно только, если

$$x_{\tau} < 2x_{\text{ст}} = \frac{2x_1^*}{\omega^2}$$

или

$$x_1^* < \frac{x_{\tau} \omega^2}{2}.$$

Случай выполнения этого условия рассматривается в дальнейшем.

Дифференциальные уравнения движения для разных стадий работы при землетрясении получим из (1.2), (1.3) и (1.4), заменяя внешнюю силу $Q(t)$ через $-mx_1^*$.

В упругой зоне, т. е. на участке диаграммы 0—1 (рис. 1) дифференциальное уравнение движения на основании (1.2) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = -x_1^*,$$

* Сейсмические удар и толчок в данной статье понимаются в смысле А. Г. Назарова [1].

решение которого, при нулевых начальных условиях, имеет вид:

$$x = -\frac{x_1^*}{\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (5.1)$$

Время начала пластических деформаций получим при $x = x_T$, по этому на основании (5.1) будет:

$$\cos \omega t_T = 1 + \frac{\omega^2 x_T}{x_1^*}. \quad (5.2)$$

Скорость в этот момент на основании (5.1) и (5.2) будет:

$$\dot{x}_T = -\sqrt{\left(\frac{x_1^*}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{x_1^*}{\omega} + \omega x_T\right)^2}. \quad (5.3)$$

Как только переходим за предел упругости (участок 1—2, рис. 1), дифференциальное уравнение движения на основании (1.3) принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p^2 x = (p^2 - \omega^2) x_T - x_1^*.$$

Решение его с учетом условия сопряжения на границе участков 0—1 и 1—2 (рис. 1) имеет вид:

$$x = x_T + \frac{x_T}{p} \sin p(t - t_T) - \frac{\omega^2 x_T + x_1^*}{p^2} [1 - \cos p(t - t_T)]. \quad (5.4)$$

Время t_{\max} , при котором получается максимальное смещение, получим из (5.4) приравняв нулю первую производную x :

$$tgp(t_{\max} - t_T) = -\frac{p}{\omega} \sqrt{\frac{(x_1^*)^2}{(x_1^* + \omega^2 x_T)^2} - 1}. \quad (5.5)$$

Максимальное смещение определится по формуле (5.4), если вместо t подставим найденное значение t_{\max} из (5.5):

$$x_{\max} = -\frac{1}{p^2} [\lambda \omega^2 x_T + x_1^* + \sqrt{(1 - \lambda)(x_1^*)^2 + \lambda(x_1^* + \omega^2 x_T)^2}]. \quad (5.6)$$

В зоне разгрузки уравнение движения (1.4) запишется следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 \lambda (x_{\max} - x_T) - x_1^*.$$

Решение этого уравнения с условиями сопряжения на границе участков 1—2 и 2—3 (рис. 1), т. е. при $t = t_{\max}$, $x = x_{\max}$, $x' = 0$, имеет вид:

$$x = \lambda(x_{\max} - x_T) - \frac{x_1^*}{\omega^2} + \left[x_{\max} + \frac{x_1^*}{\omega^2} - \lambda(x_{\max} - x_T) \right] \cos \omega(t - t_{\max}). \quad (5.7)$$

Таким образом получается колебание по отношению к новому началу отсчета, находящегося в некоторой точке в участке 2—3 (рис. 1) с амплитудой $x_{\max} - \lambda(x_{\max} - x_T) + \frac{x_1''}{\omega^2}$.

Из (5.7) видно, что движение не доходит до точки 3, а останавливается в некоторой точке участка 2—3 с абсциссой

$$\lambda(x_{\max} - x_T) - \frac{x_1''}{\omega^2}.$$

Как частный случай, можно из вышеупомянутых формул получить решение задачи колебания системы с одной степенью свободы под действием внезапного нагружения для идеализированной пластической диаграммы (рис. 2).

Так, например, в участке 1—2 (рис. 2), закон изменения смещения получим, если в (5.4) разложим в ряд $\sin p(t - t_T)$ и $\cos p(t - t_T)$ и положим $\lambda = 1$ ($p = 0$):

$$x = x_T + x_T'(t - t_T) - (x_1'' + \omega^2 x_T) \frac{(t - t_T)^2}{2}. \quad (5.4')$$

Время максимального смещения определится из (5.5) по формуле

$$t_{\max} = t_T + \frac{x_T'}{x_1'' + \omega^2 x_T}. \quad (5.5')$$

Максимальное смещение в силу (5.4') и (5.5') будет равно:

$$x_{\max} = x_T + \frac{(x_T')^2}{2(x_1'' + \omega^2 x_T)}. \quad (5.6')$$

Второй член правой части этого равенства представляет величину максимального остаточного смещения:

$$x_n = \frac{(x_T')^2}{2(x_1'' + \omega^2 x_T)},$$

и, если $x_1'' = \omega^2 x_T$, то $x_n = \infty$ (знак смещения при внезапном нагружении всегда отрицательный).

Следовательно, когда $x_T = x_{st}$, имеют место бесконечно большие пластические деформации и зона разгрузки отсутствует.

Если $\frac{x_T}{2} < x_{st} < x_T$ имеет место конечное пластическое состояние, с зоной разгрузки (рис. 2).

Сравним результаты решений, полученных при учете упруго-пластических деформаций с результатами упругих решений.

Если предполагать, что колебание системы является чисто упругим, то закон изменения смещения при сейсмическом ударе определяется по формуле (4.1).

Поэтому максимальная поперечная (сейсмическая) сила определится по формуле

$$Q_{\text{упр}} = m\omega x'_0. \quad (5.8)$$

Если деформированное состояние определяется диаграммой, показанной на рис. 1, то смещение найдется по формуле (4.4).

На основании (4.4) можно доказать, что сейсмическая сила получит свое максимальное значение в момент максимального смещения. Время этого момента определяется формулой (4.5).

Следовательно, максимальная поперечная сила будет:

$$Q_n = m\omega x'_0 \sqrt{1 - \lambda \left[1 - \frac{x'_T \omega^2}{(x'_0)^2} \right]}. \quad (5.9)$$

На основании (5.8) и (5.9), получим:

$$\frac{Q_{\text{упр}}}{Q_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \left[1 - \left(\frac{x'_T \omega}{x'_0} \right)^2 \right]}}. \quad (5.10)$$

Итак, максимальная поперечная сила с учетом пластических деформаций Q_n меньше $Q_{\text{упр}}$ на величину

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \left[1 - \left(\frac{x'_T \omega}{x'_0} \right)^2 \right]}}.$$

Из (5.10) можно получить отношение Q_n и $Q_{\text{упр}}$ для системы характеризуемой диаграммой, показанной на рис. 2.

$$Q_{\text{упр}} = \frac{x'_n}{\omega x'_T} Q_n. \quad (5.11)$$

При упругих колебаниях, в случае, когда система находится под действием внезапного нагружения (сейсмического толчка), максимальная поперечная сила, в силу (5.1), будет равна:

$$Q_{\text{упр}} = 2m x'_T. \quad (5.12)$$

Если система характеризуется диаграммой, показанной на рис. 1, то имеет место уравнение (5.4), в силу которого максимальная поперечная сила с учетом пластических деформаций определится по формуле:

$$Q_n = m x'_1 \left[1 + \sqrt{1 - \lambda + \lambda \left(1 + \frac{\omega^2 x'_T}{x'_1} \right)^2} \right]. \quad (5.13)$$

Из (5.12) и (5.13), получим;

$$\frac{Q_{\text{упр}}}{Q_n} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda + \lambda \left(1 + \frac{\omega^2 x'_T}{x'_1} \right)^2}}. \quad (5.14)$$

Если предположим, что система характеризуется диаграммой, показанной на рис. 2, получим:

$$\frac{Q_{\text{упр}}}{Q_{\text{п}}} = \frac{2x_1'}{\omega^2 x_{\text{T}}} \quad (5.15)$$

Из (5.14) и (5.15) следует, что всегда $Q_{\text{упр}} > Q_{\text{п}}$.

Рассмотрим массивный фундамент с размерами подошвы в плане $F = 9 \times 5 = 45 \text{ м}^2$; примем удельное статическое давление, передаваемое на основание $q = 0,6 \text{ кг/см}^2$. Тогда вес массива будет равен 270 т .

Принимая коэффициент трения $tg\varphi = 0,6$, для максимального упруго касательного напряжения, получим следующее:

$$\tau_{\text{T}} = qtg\varphi = 0,36 \text{ кг/см}^2.$$

Предположим, что массив опирается на грунт средней жесткости, для которого коэффициент равномерного сдвига c_x , вычисленный по формуле, приведенной в книге [3], равен $3,4 \text{ кг/см}^2$.

Полная горизонтальная сила в основании будет:

$$H = Fc_x \cdot x \text{ и } \tau = xc_x,$$

поэтому максимальное упругое смещение $x_{\text{T}} = \frac{\tau_{\text{T}}}{c_x}$.

$$\text{Частота колебаний } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{gc_x}{q}} = 74,6 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Так как диаграмма напряжение-перемещение для грунта близка к идеальной диаграмме (рис. 2), то данный пример приводится лишь для количественной оценки полученных результатов.

В случае действия мгновенного импульса, величина скорости x_0' , взята 1,5 раза больше той скорости, при которой получается максимальное упругое смещение, т. е. $x_0' = 1,5\omega x_{\text{T}} = 11,84 \text{ см/сек}$, а при действии внезапного нагружения

$$x'' = 1,5 \frac{x_{\text{T}}\omega^2}{2} = 442 \text{ см/сек}^2.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

| $\psi = 1 - \lambda$ | Случай действия мгновенного импульса | | | | Случай внезапного нагружения | | | |
|----------------------|--------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|---|------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|---|
| | x_{max} в см | t_{max} в сек | $\frac{Q_{\text{упр}}}{Q_{\text{п}}}$ | $\frac{x_{\text{упр}}}{x_{\text{max}}}$ | x_{max} в см | t_{max} в сек | $\frac{Q_{\text{упр}}}{Q_{\text{п}}}$ | $\frac{x_{\text{упр}}}{x_{\text{max}}}$ |
| 0 | 0,17208 | 0,02479 | 1,500 | 0,923 | 0,21261 | 0,06377 | 1,500 | 0,752 |
| 0,01 | 0,17187 | 0,02475 | 1,491 | 0,924 | 0,21054 | 0,06278 | 1,487 | 0,760 |
| 0,1 | 0,17013 | 0,02421 | 1,414 | 0,934 | 0,19601 | 0,05668 | 1,383 | 0,816 |

Значения максимальных смещений без учета пластических деформаций приняты равными:

при мгновенном импульсе

$$x_{\text{упр}} = \frac{x_0^*}{\omega} = 0,15882 \text{ см};$$

при внезапном нагружении

$$x_{\text{упр}} = -2 \frac{x_1^*}{\omega^2} = -0,15992 \text{ см}.$$

Анализ приведенных результатов показывает, что при учете пластических деформаций поперечная (сейсмическая) сила получается значительно меньшей по сравнению с силой, вычисленной по упругому методу.

Таким образом упруго-пластический расчет позволяет выявить скрытые запасы прочности.

Отметим, что здесь становится существенным вопрос об ограничении максимальной остаточной деформации и он должен явиться предметом специального исследования.

Приношу свою благодарность проф. А. Г. Назарову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт стройматериалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

Поступило 2 X 58

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ԱԶԳԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԵԿ ԱՍՏԻՃԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՍԻՍԵՄԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՄԱՍԻՆՆԻ ԱՌԱՋԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո մ

Հոգավածում ուսումնասիրվում են ազատության մեկ աստիճան ունեցող սիստեմի սահքի տատանումները առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների հաշվառումով, որոնք կիրառելի են սեյսմակայունության հարցերում:

Լարումների և դեֆորմացիաների միջև կապը ընդունվում է ըստ նկ. 1 պատկերված դիագրամայի:

Շարժման դիֆերենցիալ (1.1) հավասարման ինտեգրումը իրականացվում է շարժման տարրեր էտապների համար առանձին-առանձին, տեղափոխումների և արագությունների անխզելիություն պայմանների օգտագործումով:

Մոզորի լուծումը հասցված է մինչև վերջ, երբ սիստեմի վրա ազդում են հարմոնիկ ուժ, սեյսմիկ հարված և սեյսմիկ հրում:

Ստացված են մնալուն դեֆորմացիաների մաքսիմում արժեքները այդ դեպքերի համար:



Որպես մտանավոր դեպք ստացված է այնպիսի սխեմաների տատանումների խնդրի լուծումը, որի լարումների և դեֆորմացիաների միջև եղած կապը բնութագրվում է ըստ նի. 2 պատկերված օրենքի:

Սեյսմիկ հարվածի և հրման դեպքերում ստացված են կտրող ուժերի մաքսիմում արժեքները, որոնք այնուհետև համեմատության մեջ են գրված այդ ուժերի այն արժեքների հետ, որոնք ստացվում են միայն առաձգական դեֆորմացիաների հաշվառումով:

Հաշվումները ցույց են տալիս, որ ազատության մեկ աստիճան ունեցող սխեմաների սահքի տատանումների ուսումնասիրման ժամանակ, պլաստիկ դեֆորմացիաների հաշվառման դեպքում, ստացվում է կտրող (սեյսմիկ) ուժի մեծության զգալի փոքրացում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. Г. Сейсмические толчки и удары и их действие на сооружения. Тр. бюро антисейсмического строительства Грузинской ССР, 1945.
2. Рабинович И. М. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. сб. ст. «Исследование по динамике сооружений», Стройиздат, 1947.
3. Савинов О. А. Фундаменты под машины, М.—Л., 1955.