ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտություններ — XI, № 6, 1958 — Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. НАЗАРОВ

# О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОДОБИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Сообщение 4

В статье приводятся некоторые дополнительные данные к сообщению 3 [1а].

## 1. Распространение механических возмущений в подобных телах

Рассмотрим простейший случай, когда подобные тела $A$ и $A'$ упруги, однородны и изотропны. Пусть в какой-либо точке $b$ тела $A$ был дан импульс. В результате из точки $b$ распространяются во все стороны волновые возмущения в виде продольных и поперечных волн. Скорости распространения волн, продольных $a_1$ и поперечных $a_2$, как известно, определяются формулами

$$a_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad a_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{1}$$

Через некоторые промежутки времени $\Delta t_1$ и $\Delta t_2$ продольная и поперечная волны из точки $b$ достигнут точки $c$ [рис. 1а].

Если расстояние между точками $b$ и $c$ обозначить через $l$, то соответственно получим

$$\Delta t_1 = \frac{l}{a_1}, \qquad \Delta t_2 = \frac{l}{a_2}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь тело $A'$ со сходственными точками $b'$ и $c'$ [рис. 1б].

Расстояние между этими точками есть

$$l' = \alpha l.$$

Скорости продольных и поперечных волн для этого случая соответственно равны [1а]:

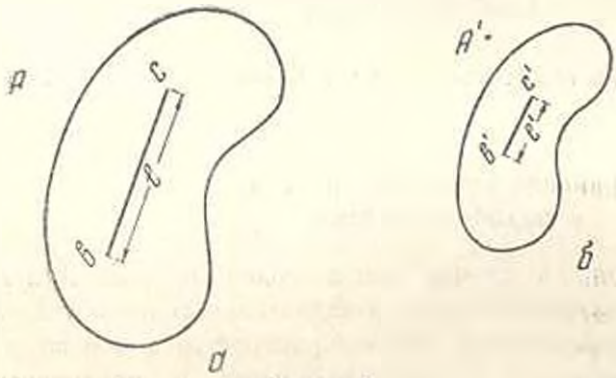
$$a_1' = \sqrt{\frac{E'}{\rho'}} = a_1\sqrt{\frac{\beta}{\gamma\delta}}, \qquad a_2' = \sqrt{\frac{G'}{\rho'}} = a_2\sqrt{\frac{\beta}{\gamma\delta}}. \tag{3}$$

Сходственные отрезки времен $\Delta t_1'$ и $\Delta t_2'$, по истечении которых продольные и поперечные волны перенесут возмущение из точки $b'$ в точку $c'$, равны:

$$\Delta t_1' = \frac{l'}{a_1'} = \alpha \sqrt{\frac{\gamma^2}{\beta}} = \xi \Delta t_1,$$
$$\Delta t_2' = \xi \Delta t_2. \tag{4}$$

Как и следовало ожидать, времена пробегов волновых возмущений на сходственных отрезках $\overline{bc}$ и $\overline{b'c'}$ тел $A$ и $A'$ подчиняются масштабу времен.

Условия (4) сохраняются для общего случая подобия тел $A$ и $A'$, причем при деформациях за пределами упругости должны быть подобраны величины импульсов, обеспечивающие динамическое подобие в соответствии со следствием 11 теоремы 4 [1б].



Фиг. 1а, б.

Скорость распространения волновых возмущений и скорость перемещения частиц хотя и имеют одинаковые размерности, но обладают различными множителями подобия. Множитель подобия для скорости распространения волновых возмущений равен на основании (3), а также теоремы 4 [1в]

$$\frac{a_1'}{a_1} = \frac{a_2'}{a_2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma^2}} = \frac{\alpha}{\xi}, \tag{5}$$

а множитель подобия для скоростей частиц тел $A$ и $A'$ на основании следствия 5 теоремы 4 равен

$$\frac{dw'}{dt'} : \frac{dw}{dt} = \frac{\alpha\gamma}{\xi}. \tag{6}$$

Из сопоставления (5) и (6) следует, что для скоростей частиц и скоростей распространения сейсмических волн множители подобия могут быть одинаковыми лишь при $\gamma = 1$. Здесь мы имеем новый пример того, что различные физические величины, имеющие одинаковую размерность, могут обладать различными величинами множителей подобия. Вновь наглядно проступает ограниченность средств анализа размерностей, на что неоднократно указывал М. В. Кирпичев. В силу того, что скорости $a_1$ и $a_2$ распространения волновых

возмущений и скорости перемещения частиц $\frac{dw}{dt}$ имеют одинаковую размерность, отвлеченные отношения $M_1 = \frac{dw}{dt} : a_1$ и $M_2 = \frac{dw}{dt} : a_2$ (числа Маха) должны быть, по требованию анализа размерностей, одинаковыми для тел $A$ и $A'$ для обеспечения подобия их состояний при динамических процессах. Выше же было установлено что различие в величинах чисел Маха не может послужить препятствием для обеспечения подобия*.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим конкретный пример. Уравнение для описания распространения продольных колебаний в упругом брусе $A$ с постоянным поперечным сечением выражается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{7}$$

где по-прежнему

$$a_1^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Для бруса $A'$ соответственно имеем:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} = a_1'^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}, \qquad a'^2 = \frac{E'}{\rho'}. \tag{8}$$

Имея в виду, что

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t'^2} = \frac{\alpha\gamma}{\xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} = \frac{\alpha\gamma}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{9}$$

$$a'^2 = \frac{\beta}{\gamma\delta} a_1^2,$$

установим из (8) уже известное нам условие подобия в отношении масштаба времен

$$\xi = a \sqrt{\frac{\delta\gamma}{\beta}}. \tag{10}$$

При упруго-пластических деформациях величина $a_1^2$ становится переменной, подчиняющейся различным закономерностям в зависимости от того загружается стержень в заданном поперечном сечении или, наоборот, разгружается.

Известно, что при этом возникают волны разгрузки (Рахматулин Х. А. [2, 3]). Нетрудно иллюстрировать, что условия динамического подобия тел $A$ и $A'$ обеспечиваются при различных числах Маха и в этом случае.

* Здесь мы не исследуем случай, когда числа Маха близки к 1 или больше 1, так как они выходят за пределы наших интересов.

## 2. Развитие трещин в подобных телах при динамических процессах

В следствии 2 к теореме 4 [1в] было указано, что динамическое подобие тел $A$ и $A'$ сохраняется и в стадии трещинообразования. Остановимся подробнее на этом вопросе. В процессе развития и раскрытия трещин условия теоремы 4 не накладывают никаких ограничений на условия теоремы 3, так как дополнительно действующие силы инерции ничем не отличаются от объемных сил теоремы 3 [1б]. Поэтому остается рассмотреть случай замыкания трещин в процессе колебаний, так как при этом возможны соударения берегов трещин с некоторой конечной скоростью. Для сохранения условий подобия необходимо, на основании следствия 12 теоремы 4 [1в], чтобы относительная скорость $v$ соударения берегов трещин тела $A$ и относительная скорость $v'$ соударения берегов трещин тела $A'$ подчинялись условию

$$v' = \frac{\alpha_\tau}{\xi} v, \tag{11}$$

Легко проверить, что это условие выполняется. Действительно, согласно теореме 3, ширины раскрытия трещин $\Delta l$ и $\Delta l'$ тел $A$ и $A'$ подчиняются условию

$$\Delta l' = \alpha_\gamma \Delta l.$$

Скорость изменения ширины трещин и является относительной скоростью перемещения берегов трещины.

Следовательно

$$\frac{d\Delta l'}{dt'} = v' \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta l}{dt} = v.$$

Имея в виду, что $t' = \xi t$, мы непосредственно убеждаемся в справедливости (11).

Итак, действительно имеет место динамическое подобие, если удовлетворяются условия теоремы 3.

Здесь, конечно, мы исходили из той предпосылки, что механическое подобие тел $A$ и $A'$ удовлетворяется до мельчайших подробностей, чего на практике трудно достичь.

Возможно, что при некоторых силовых состояниях, даже при незначительном различии в подобии тел $A$ и $A'$, будет иметь место значительное различие в расположении и в ширинах раскрытия трещин, не говоря уже о том, что какой-либо случайно отколовшийся кусок в зоне трещины может заклиниться и исказить картину распределения сил и деформаций. Все же сторона вопроса, заключающаяся в том, что принципиально возможно осуществлять динамическое подобие в стадии трещинообразования, крайне важна. Она показывает, что при строгом соблюдении условий подобия тел $A$ и $A'$ подобие их состоя-

ний может быть выдержано и что при соблюдении определенных предосторожностей при моделировании мы сможем получить некоторую или даже достаточно достоверную информацию о поведении натуры по данным динамического испытания модели до стадии разрушения. Эта возможность особенно ценна для изучения поведения каменных зданий при землетрясениях путем испытания их моделей.

### 3. Частные случаи динамического подобия

1) *Случай простого подобия*. Простое подобие характеризуется условиями $\beta = \gamma = \eta = \delta = 1$ [1а]. Это означает, что в сходственных точках тел $A$ и $A'$ механические свойства материала подобных тел совпадают.

В этом случае, на основании приведенных в сообщениях 1, 2 и 3 теорем и следствий из них следует, что в сходственных точках тел $A$ и $A'$ имеют место:

1) для деформаций $\varepsilon' = \varepsilon$;
2) для распределенных сил и напряжений $\sigma' = \sigma$;
3) для упругих постоянных $E' = E$, $G' = G$, $\mu' = \mu$;
4) для сосредоточенных сил $P' = \alpha^2 P$;
5) для объемных сил $K' = \frac{1}{\alpha} K$;
6) для времен $t' = \alpha t$;
7) для перемещений $w' = \alpha w$;
8) для раскрытия трещин $\Delta l' = \alpha \Delta l$;
9) для скоростей $\frac{dw'}{dt'} = \frac{dw}{dt}$;
10) для ускорений $\frac{d^2w'}{dt'^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{d^2w}{dt^2}$.

Таковы основные соотношения между механическими величинами в случае простого подобия.

Условием, наиболее трудным для моделирования, является обратная пропорциональность объемных сил линейным размерам тел. Чем меньше размеры тела, тем больше должны быть объемные силы.

Учитывая, что плотности тел в сходственных точках одинаковы, следует, в частности, что для моделирования собственного веса модели $A'$ ускорение силы тяжести должно быть в согласии с пунктом (10)

$$g' = \frac{1}{\alpha} g. \qquad (12)$$

Если напряжениями от собственного веса можно пренебречь, то моделирование на основе простого подобия весьма просто. Необходимо лишь предъявлять повышенные требования к измерительной технике, так как перемещения для моделей будут меньше, чем для оригинала, в $\alpha$ раз.

Для измерения деформаций также должна быть более чувствительная аппаратура. Несмотря на то, что деформации в модели и оригинале одинаковы, точность тензометрических измерений для модели должна быть большей.

Действительно, в принципе базы тензометром $l$ и $l'$ для тел $A$ и $A'$ также должны подчиняться условию $l' = \alpha l$ для обеспечения получения относительных деформаций в одинаковой степени осреднения.

Если объемные силы, и основном силы тяжести, велики и ими пренебречь нельзя, то необходимо модели сообщить искусственным путем ускорения, в соответствии с условием (10). Для этой цели, в частности, используют центрифугу (4, 5).

Можно, однако, в некоторых случаях объемные силы заменить приближенно поверхностными силами путем пригрузки посредством тяжей, определенным путем занапряженных. Например, для зданий такие компенсирующие усилия могут быть приложены к уровням междуэтажных перекрытий. Конструкция тяжей должна быть такова, чтобы не стеснять перемещения модели в требуемом направлении, то есть не накладывать в этом направлении дополнительных связей.

Уже начиная с двухэтажных зданий, такая замена должна приводить к удовлетворительным результатам. Известно, что при динамических расчетах зданий, без большого ущерба для точности, сплошную инерционную нагрузку заменяют сосредоточенными, приложенными в уровнях междуэтажных перекрытий.

2) *Случай равенства ускорений для подобных тел.* В связи с трудностями моделирования объемных сил интересно установить ту область расширенного подобия, при которой ускорения для тел $A$ и $A'$ сохраняются одинаковыми. В этом случае ускорения силы тяжести для модели и оригинала также остаются одинаковыми, что приводит к облегчению эксперимента.

Исходя из условия равенства ускорений для тел $A$ и $A'$, получаем:

$$\frac{d^2w'}{dt'^2} : \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{x_1}{\xi^2} = 1. \tag{12}$$

Следовательно, масштаб времен должен удовлетворять условию

$$\xi = \sqrt{x_1}. \tag{13}$$

Отсюда, на основании (10), должно иметь место

$$\beta = \alpha\delta. \tag{13}$$

Приведем сводку основных механических величин для тел $A$ и $A'$ при условии выполнения требования о равенстве ускорений для них:

1) для деформаций $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$;

2) для распределенных сил и напряжений $\sigma' = \alpha\delta\sigma$;

3) для упругих постоянных $E' = \frac{\alpha_\sigma}{\gamma} E$, $G' = \frac{\alpha_\sigma}{\gamma} G$, $\mu' = \mu$;

4) для сосредоточенных сил $P' = \alpha_\sigma^3 P$;

5) для объемных сил $K' = \delta K$;

6) для времен $t' = \xi t = \sqrt{\alpha_\gamma} t$;

7) для перемещений $w' = \alpha_\gamma w = \xi^2 w$;

8) для раскрытия трещин $\Delta l' = \alpha_\gamma \Delta l = \xi^2 \Delta l$;

9) для скоростей $\frac{dw'}{dt'} = \xi \frac{dw}{dt}$;

10) для ускорений $\frac{d^2w'}{dt'^2} = \frac{d^2w}{dt^2}$ (по условию).

При больших деформациях и перемещениях $\gamma$ следует принять равной единице.

В заключение следует указать, что в некоторых работах косвенно вводится множитель подобия $\gamma$ (см., например, Гулиэр [6]). Отметим, что систематического исследования роли этого множителя, установления его связи с другими множителями подобия, определения механического подобия твердых деформируемых тел и основанных на этом формулировок расширенных условий подобия статических и динамических процессов, вплоть до стадии разрушения, мы не встречали в литературе.

Институт стройматериалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

Поступило 5 III 1958

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

## ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՒ ԿԱԶՄՈՒՅՎԱԾՔՆԵՐԻ ՍԵՅՍՄԱԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հայերեն ռեզյումե

### Ամփոփում

*Հոդվածում քերված են նյութերի հատկությունները վերարերող լրացուցիչ տվյալներ։*

Նման մարմիններում մեխանիկական գրգռման տարածումը։ *Դիտվում է մի պարզ դեպք, երբ $A$ և $A'$ նման մարմինները առաձգական են, միատարր և իզոտրոպ։ Առաջին մարմնի մի որևէ կետում իմպուլս է տրված։ Նրանում առաջացող ընդհրկչական և ընդլայնական ալիքների տարածման արագությունները կոորշվեն համապատասխանաբար (1) բանաձևով, հետևաբար և ալիքների մի կետից մինչև մյուս կետի անցման ժամանակամիջոցները կարտահայտվեն (2) բանաձևով։ Մյուս $A'$ մարմնի նման կետից դուրս եկող ընդհրկչական և ընդլայնական ալիքների արագությունը և դրանց անցման ժամանակը հեշտությամբ հաշվվում է նկնելով մարմինների նմանության պայմանից։ Ապացուցվում է, որ $A$ և $A'$ մարմինների նման տեղա-*

*կտորներում գրգռման ալիքի տարածման ժամանակամիջոցները ենթարկվում են ժամանակի մասշտաբին։*

*Այս (4) պայմանը ուժի մեջ է մնում նման մարմինների ամենաընդհանուր դեպքերի համար, միայն պայմանով, որ նրանց վրա ազդող իմպուլսների մեծությունը ընտրելիս նկատի առնվի դրանց դինամիկական նմանությունը։*

*Առանձնական ձողի օրինակի վրա ցույց է տրված, որ Մախի թվի մեծությունների տարբեր լինելը չի կարող խանգարիչ պատճառ հանդիսանալ նմանության պայմանը պահպանելու համար։*

Ճաքերի զարգացումը նման մարմիններում դինամիկական պրոցեսների ժամանակ։ *Նախորդ աշխատանքում ցույց էր տրված, որ A և A' մարմինների համար դինամիկական նմանությունը պահպանվում է և վերջիններում ճաք առաջանալու դեպքում։ Չվերադառնալով նախորդ աշխատանքի 3 և 4 թեորեմների կրկնողությանը, այստեղ մանրամասն կանգ է առնված մարմնում արդեն առաջացած ճաքի փակման կամ ճաքի երկու ափերի իրար հետ փոխհարվածման (որևէ վերջնական արագությամբ) դեպքի պարզաբանման վրա։ Ցույց է տրված, որ A մարմնի ճաքի ափերի փոխհարվածման հարաբերական արագության և A' մարմնի նման ճաքի ափերի փոխհարվածման հարաբերական արագության կապը արտահայտվում է (11) բանաձևով։*

Դինամիկական նմանության մասնակի դեպքեր։ *Դիտված է պարզ նմանության դեպքի համար դեֆորմացիայի, լարվածության, արագության, արագացման, ժամանակի, ծավալային ուժերի և այլն մեխանիկական մեծությունների հիմնական հարաբերությունները։ Կոնկրետ ցուցումներ են առաջ քաշված փորձարկումների ժամանակ չափումների, որոշ դեպքերում ծավալային ուժերի մակերևութայինով փոխարինելու և ուրիշ պայմանների կապակցությամբ։*

*Այնուհետև դիտված է նման մարմինների համար արագացումների հավասարության դեպքը, որտեղ ժամանակի մասշտաբը պետք է բավարարի (14) պայմանին, իսկ (10-ին) համապատասխան պետք է տեղի ունենա (15) հավասարությունը։ Այստեղ նույնպես բերված է A և A' մարմինների հիմնական մեխանիկական մեծությունների ամփոփումը ելնելով A և A' մարմինների առաջ դրված արագացումների հավասարության պայմանից։*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Назаров А. Г.* „Известия АН Армянской ССР“ (серия техн. наук): а) т. X, № 5, 19·7; б) т. X, № 6, 1957; в) т. XI, № 4, 1958.
2. *Рахматулин Х. А.* ПММ, т. IX, в. 1, 1·45.
3. *Рахматулин Х. А.* и *Шапиро Г. С.* (обзорная статья). „Известия АН СССР“ (отд. техн. наук), № 2, 195·.
4. *Давиденков Н. Н.* ЖТФ, № 1, 1933.
5. *Покровский Г. И.* Центробежное моделирование. ОНТИ, 1935.
6. Handbook of Experimental Stress Analysis, Edited by M. Hetényi, sec. prin., New York, London, 1951, Appendix II.