ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XI, № 4, 1958 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. НАЗАРОВ

О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОДОБИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Сообщение 3

В предыдущих сообщениях дано определение подобия твердых тел, а также изложены условия статического подобия по несущей способности, деформации и трещинообразованию [1]. В настоящем сообщении подробнее останавливаемся на вопросах подобия состояний тел во времени. При выполнении условий подобия твердых тел A и A', а также условий основной теоремы и ее следствий, тела эти находятся в подобном состоянии в сходственные моменты времени t и $t' = \eta t$. Мы рассмотрим ряд конкретных случаев, отвечающих условиям статического загружения. Это ограничение равносильно пренебрежению величинами сил инерции, что может быть допущено при достаточно медленном развитии деформации. В конце работы остановимся на вопросах подобия динамических процессов.

1. Простейшие случаи подобных тел

Рассмотрим, например, подобие состояний упругих тел, подчиняющихся закону Гука. Для этого случая множитель подобия η можно принять равным любой наперед заданной величине. Достаточно потребовать лишь, чтобы внешние нагрузки, прикладываемые к телам A и A' изменялись во времени таким образом, чтобы в моменты t и $t' = \eta t$, они подчинялись условиям теоремы 1 и ее следствиям. Легко видеть, что при этом условии подобие состояний обеспечивается. В данном случае выбор множителя подобия η находится в полной зависимости от воли экспериментатора. Множители подобия для скоростей и ускорений сходственных точек тел A и A' можно легко установить путем дифференцирования перемещения $\overline{w}' = \alpha_\gamma \overline{w}$ [1].

$$\frac{d\overline{w}'}{dt'} = \frac{\alpha_\gamma}{\eta} \frac{d\overline{w}}{dt},$$

$$\frac{d^2\overline{w}'}{dt'^2} = \frac{\alpha_\gamma}{\eta^2} \frac{d^2\overline{w}}{dt^2}. \qquad (1)$$

Таким образом для скоростей перемещений множитель подобия равен $\frac{\alpha\gamma}{\eta}$, а для ускорений $\frac{\alpha\gamma}{\eta^2}$.

Полученные выводы легко распространяются и на случай упруго-пластических деформаций при условии, что параметры, связывающие деформации и напряжения, не меняются во времени и не зависят от скорости загружения. (В этом читатель может убедиться непосредственно, анализируя, например, уравнения Генки — А. А. Ильюшина [3]).

Необходимость соблюдения последнего условия опять-таки легко иллюстрировать на примере упругих деформаций, когда упругие постоянные изменяются в функции от времени (явление старения). В этом случае, для обеспечения подобия состояний тел A и A', необходимо, чтобы модули упругости E, G и E', G' для тел A и A' в сходственные моменты времен t и $t' = \eta t$ подчинялись условию:

$$E' = \frac{\beta}{\gamma} E \text{ и } G' = \frac{\beta}{\gamma} G,$$

причем, внешние нагрузки также должны быть сходственными в моменты времен t и $t' = \eta t$. В данном случае значение η вполне определено условиями старения тел A и A' и экспериментатор вынужден регулировать скорость изменения нагрузки таким образом, чтобы была соблюдена величина множителя подобия η, отвечающая старению тел. Таким образом в данном случае величина η уже не зависит от произвола экспериментатора. Рассмотрим, например, растяжение подобных брусьев A и A' под действием переменных осевых сил

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$\sigma' = E' \cdot \varepsilon',$$

при E, зависящем от t.

Для обеспечения подобия их состояний необходимо соблюдение следующих условий в моменты времен t и $t' = \eta t$:

$$\sigma' = \beta\sigma,$$

$$\varepsilon' = \gamma\varepsilon.$$

Для этого должно быть, чтобы в моменты времен t и $t' = \eta t$

$$E' = \frac{\beta}{\gamma} E.$$

Короче это можно записать так:

$$E'\left(\frac{t'}{\eta}\right) = \frac{\beta}{\gamma} E(t), \tag{2}$$

поскольку последнее выражение содержит условие $t' = \eta t$. Здесь уже множитель подобия η предопределен свойствами материала и экспериментатор вынужден принять для внешних нагрузок

$$\sigma(t) \text{ и } \sigma'\left(\frac{t}{\eta}\right)$$

тот же множитель подобия η для синхронизации изменения нагрузок с процессом старения тел.

2. Пластическое течение

Этот случай внешне представляет некоторое осложнение в силу неопределенности абсолютных величин смещений при заданном напряженном состоянии. Здесь мы ограничимся рассмотром пластического течения, описываемого уравнениями Рейса при соблюдении условий текучести Мизеса [2, 3]. Уравнения эти имеют следующую запись

$$\begin{gathered} d\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)\right] + \lambda(\sigma_x - \sigma) \\ d\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\, d\tau_{xy} + 2\lambda\tau_{xy}, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\lambda = \frac{d\Gamma_p}{T}$$

$$\begin{gathered} d\Gamma_p = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + \cdots + \frac{3}{2}\left[(d\gamma_{xy}^p)^2 + \cdots\right]} \\ T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \cdots + 6(\tau_{xy}^2 + \cdots)} \end{gathered} \tag{4}$$

где $d\varepsilon_x \cdots d\gamma_{xy}$ — приращения полных деформаций;

$d\varepsilon_x^p \cdots d\gamma_{xy}^p$ — приращения пластических деформаций.

Имея в виду, что для тела A' должно быть

$$\sigma' = \beta\sigma,\ \varepsilon' = \gamma\varepsilon,\ d\varepsilon' = \gamma d\varepsilon,\ E' = \frac{\beta}{\gamma}E,\ G' = \frac{\beta}{\gamma}G \text{ и } \nu' = \nu. \tag{5}$$

Найдем, что

$$\begin{gathered} d\Gamma'_p = \gamma d\Gamma_p, \\ T' = \beta T, \\ \lambda' = \frac{\gamma}{\beta}\lambda. \end{gathered} \tag{6}$$

Как видно, при этих условиях возможно обеспечивать подобие состояний тел A и A', но при этом нельзя указать в какие моменты времен осуществляется это подобие От этой неопределенности можно освободиться, вводя вместо приращений деформаций скорости деформаций $\frac{d\varepsilon_x}{dt}, \ldots, \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$ и, соответственно $\frac{d\varepsilon_{x'}}{dt'}, \ldots, \frac{d\gamma_{x'y'}}{dt'}$. В соответствии с этим, в приведенных выше уравнениях, вместо λ и λ' должно быть записано соответственно $\frac{\lambda}{dt}$ и $\frac{\lambda'}{dt'}$.

Мы видим, что при условии $t' = \eta t$, где η произвольно, можно обеспечить подобие состояний тел A и A' при пластическом течении. И в данном случае множитель подобия η произволен, он зависит от воли экспериментатора.

Наглядной интерпретацией такого физического представления могут послужить два подобных штампа, вдавливаемых в пластически деформируемое полупространство в достаточном удалении друг от друга. Скорости погружения обоих штампов могут быть выбранными произвольно при одинаковых напряженных состояниях под обоими штампами.

Если рассмотреть процесс загружения тел A и A' в полном объеме, с учетом постепенного перехода от чисто упругих деформаций к деформациям упруго-пластическим и, наконец, к пластическому течению, мы видим непрерывную возможность обеспечить подобие состояний тел A и A' при заданном экспериментатором множителе подобия η. Случай простого подобия рассмотрен в [22].

3. Подобие состояний при упруго-ползучих деформациях (при отсутствии вязкого сопротивления)

Рассмотрим для примера такое тело в интерпретации Н. Х. Арутюняна [4]. Мы не будем выписывать полную систему уравнений, характеризующих механическое состояние этого тела. Для наших целей достаточно ограничиться рассмотром связи между напряжениями и деформациями для одноосного напряженного состояния:

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma_x(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t, \tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где $\varepsilon_x(t)$ — продольная деформация вдоль оси x в момент t;

$\sigma_x(t)$ — продольное напряжение вдоль оси x в момент t;

$E(t)$ — модуль Юнга в момент t;

τ — возраст тела;

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau); \tag{8}$$

$\frac{1}{E(\tau)}$ — упруго-мгновенная деформация;

$C(t, \tau)$ — деформация ползучести к моменту времени t при $\sigma(x) = 1$ (мера ползучести).

Как следует из приведенных соотношений, мы имеем здесь существенное расширение теории наследственности Больцмана — Вольтерра [5, 6, 12], так как допускается изменение параметров E и C во времени (старение материала). Для тела A' соответственно следует записать

$$\varepsilon_{x'}\left(\frac{t'}{\eta}\right)=\frac{\sigma_{x'}\left(\frac{t'}{\eta}\right)}{E'\left(\frac{t'}{\eta}\right)}-\int\limits_{0}^{\frac{t'}{\eta}}\sigma_{x'}\left(\frac{\tau'}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\delta'\left(\frac{t'}{\eta},\frac{\tau'}{\eta}\right)d\tau', \tag{9}$$

причем для обеспечения условий подобия тел A и A', в соответствии с основной теоремой, должно соблюдаться требование

$$\varepsilon'=\gamma\varepsilon,\ \sigma'=\beta\sigma,\ E'=\frac{\beta}{\gamma}E \tag{10}$$

в моменты времен $t'=\eta t$ и при возрастах τ и $\tau'=\eta\tau$.

Учитывая, что операция интегрирования не может изменить множитель подобия подинтегральной величины, мы приходим к заключению, что последняя должна иметь тот же множитель подобия, что и $\varepsilon'=\gamma\varepsilon$.

Таким образом должно быть

$$\int\sigma_{x'}\left(\frac{\tau'}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\delta'\left(\frac{t'}{\eta},\frac{\tau'}{\eta}\right)d\tau'=\gamma\int\sigma_{x}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\delta(t,\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Учитывая (10) получим необходимое условие подобия

$$\beta\delta'=\gamma\delta.$$

Таким образом

$$\delta'=\frac{\gamma}{\beta}\delta. \tag{12}$$

С другой стороны на основании (8) для тела A' должно быть

$$\delta'=\frac{1}{E'}+C'. \tag{13}$$

Подставляя сюда значения δ' и E' и имея в виду (8) получим

$$C'=\frac{\gamma}{\beta}C. \tag{15}$$

Стало быть *таково должно быть соотношение между мерами ползучести тел A и A' в сходственные моменты времен для обеспечения подобия состояний тел A и A' в соответствии с требованиями основной теоремы.*

Здесь η предопределено условиями старения тел A и A'.

В случае простого подобия $\beta=\gamma=\eta=1$, меры ползучести для обоих тел, как и следовало ожидать, совпадают.

4. Условия подобия при вязком сопротивлении тел

При определении подобия тел мы исходили из той предпосылки, что механическое состояние тела в данный момент характеризуется некоторым соотношением между тензорами напряжений и деформаций [1].

$$\sigma = F(\varepsilon,\ x,\ y,\ z,\ t), \tag{16}$$

причем вид функции F зависит от всей предшествующей истории загружения. Теперь это ограничение мы снимем. Положим теперь, что напряженное состояние связано не только с величиной деформации, но и со скоростью деформации в рассматриваемый момент t.

Примем, таким образом, что

$$\sigma = F\left(\varepsilon,\ \frac{d\varepsilon}{dt},\ x,\ y,\ z,\ t\right). \tag{17}$$

Про такого рода тела будем говорить, что они оказывают вязкое сопротивление движению. Для того, чтобы обеспечить подобие состояний тел A и A', должно иметь место для тела A' следующее соотношение

$$\frac{\sigma'}{\beta} = F\left(\frac{\varepsilon'}{\gamma},\ \frac{d\varepsilon'}{dt'};\ \frac{\eta}{\gamma},\ \frac{x'}{\alpha},\ \frac{y'}{\alpha},\ \frac{z'}{\alpha},\ \frac{t'}{\eta}\right). \tag{18}$$

Это соотношение в самом общем виде дает условие подобия при наличии вязкого сопротивления (если известно F).

Допустим, для примера, что для тела A при осевом загружении имеет место условие [2]

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^n, \tag{19}$$

где μ — коэффициент вязкого сопротивления.

На основании (17, 18, 19) для тела A' должно быть

$$\frac{\sigma'}{\beta} = E\,\frac{\varepsilon'}{\gamma} + \mu\left(\frac{d\varepsilon'}{dt'}\right)^n\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^n. \tag{20}$$

Введя обозначение

$$E' = \frac{\beta}{\gamma}\ E,\ \ \mu' = \beta\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)\mu, \tag{21}$$

мы придем к соотношению между деформациями и напряжениями для тела A'

$$\sigma' = E'\varepsilon' + \mu'\left(\frac{d\varepsilon'}{dt'}\right)^n. \tag{22}$$

Итак, для обеспечения подобия тел A и A', тело A' должно быть подчинено условиям (21) и (22).

Как видим, структура уравнений (19) и (22) для тел A и A' одинакова (условие инвариантности), что является необходимым, но не достаточным условием подобия вообще. Параметры уравнений подобных состояний, вообще говоря, должны удовлетворять дополнительным требованиям типа (21).

Подставляя (21) в (22) мы снова вернемся, как и следовало ожидать, к соотношению (19). Здесь, как и прежде, не останавливаемся на способах установления подобия материалов тел A и A', выражаемых соотношениями (17) и (18), что должно являться предметом специальных исследований применительно к конкретным условиям.

Из соотношения (21) следует, что поскольку коэффициент вязкого сопротивления μ' должен быть для конкретного тела A' зафиксирован, то при заданных множителях подобия β и γ, множитель подобия для времен η не может быть задан по произволу; он должен быть подчинен требованию

$$\eta = \gamma \sqrt{\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{1}{\beta}} \tag{23}$$

Положение усложняется, если в уравнение (19) введем фактор старения. В этом случае уже нет возможности подбирать η и выражение (23) указывает на необходимую связь между фиксированными числами, для обеспечения условий подобия для заданных материалов тел A и A'.

5. О подобии сложных механических сред

Полученные результаты позволяют легко устанавливать условия подобия для любых сред, рассматриваемых современной реологией. Приведем несколько примеров.

1) Вязко-пластическая среда (Бингам)

Закон деформации имеет вид [7, 8]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\mu}(\sigma - \sigma_0), \quad \sigma > \sigma_0, \tag{24}$$

при $\sigma > \sigma_0$ вещество не течет. Для подобного тела A' должно быть

$$\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{1}{\mu'}(\sigma' - \sigma_0'), \quad \sigma' > \sigma_0' \tag{25}$$

при условиях

$$\sigma' = \beta\sigma, \quad \sigma_0' = \beta\sigma_0, \quad \varepsilon' = \gamma\varepsilon, \quad t' = \eta t \quad \text{и}$$
$$\mu' = \frac{\beta\eta}{\gamma}\mu. \tag{26}$$

Поскольку μ' фиксировано при выборе тела A', масштаб времен должен быть подобран из условия

$$\eta = \frac{\gamma}{\beta}\frac{\mu'}{\mu}. \tag{27}$$

2) Упруго-вязкая среда (Фохт)

Связь между напряжениями и деформациями выражается соотношением [9]

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{28}$$

Пример этот является частным случаем (19) при $n = 1$.

Для тела A' имеет место

$$\sigma' = E'\varepsilon' + \mu' \frac{d\varepsilon'}{dt'}. \tag{29}$$

Соотношения между параметрами и множителями подобия удовлетворяют условиям (26) и (27).

3) Релаксирующая среда (Максвелл)

Закон деформации имеет вид [10]

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu}. \tag{30}$$

Для тела A имеем соответственно

$$\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{1}{E'}\frac{d\sigma'}{dt'} + \frac{\sigma'}{\mu'}. \tag{31}$$

Соотношения между параметрами тел A и A' и множителями подобия также удовлетворяют условиям (26) и (27).

4) Упруго-вязко-релаксирующая среда (Ишлинский)

Тело, сочетающее свойства рассмотренных в примерах 2) и 3) может быть описано следующим уравнением (сохраняем обозначения А. Ю. Ишлинского [11])

$$\frac{d\sigma}{dt} + r\sigma = b\frac{d\varepsilon}{dt} + nb\varepsilon. \tag{32}$$

Для тела A' имеем соответственно

$$\frac{d\sigma'}{dt'} + r'\sigma' = b'\frac{d\varepsilon'}{dt'} + n'b'\varepsilon'. \tag{33}$$

Подставляя сюда значения

$$\sigma' = \beta\sigma, \ \varepsilon' = \gamma\varepsilon, \ t' = \eta t$$

найдем

$$\frac{\beta}{\eta}\frac{d\sigma}{dt} + r'\beta\sigma = \frac{\gamma}{\eta}b'\frac{d\varepsilon}{dt} + \gamma n'b'\varepsilon.$$

Деля обе части равенства на $\frac{\beta}{\eta}$ получим

$$\frac{d\sigma}{dt} + \eta r'\sigma = \frac{\gamma}{\beta}b'\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\gamma\eta}{\beta}n'b'\varepsilon. \tag{34}$$

Сопоставляя теперь (34) с (32) убеждаемся, что для обсспечения условий подобия должны иметь место

$$r'\eta = r, \quad \frac{\gamma}{\beta} b' = b, \quad \frac{\gamma\eta}{\beta} n'b' = nb. \tag{35}$$

Сравнение последних двух равенств приводит к условию

$$\eta n' = n. \tag{36}$$

Таким образом значения r', b' и n' для подобного тела A' определены.

При рассмотрении сложных сред, например, представленных высокополимерами [7], механизм которых может интерпретироваться как последовательное или параллельное соединение элементов типа 1), 2) и 3), мы можем устанавливать условия подобия точно таким же образом.

Простейшим примером такой сложной среды является уже рассмотренная здесь среда примера 4).

В заключение необходимо отметить следующее. Во всех трех сообщениях, начиная с определения подобия тел, мы широко пользовались условием инвариантности аналитических выражений, отвечающих подобным состояниям тел, и которое особенно наглядно представлено в преобразованиях (19, 20, 21, 22). Условие это является краеугольным камнем теории подобия и под него подведено Т. А. Афанасьевой-Эренфест, М. В. Кирпичевым и др. строгое математическое обоснование [13, 14, 15]. Оно является необходимым, но недостаточным для обеспечения подобия состояний систем A и A'. Мы считаем возможным подчеркнуть, что это условие может касаться не только размерных, но и безразмерных величин. Π – теорема, в этом отношении, определенно может вносить излишнее стеснение, так-как такие безразмерные величины как относительная деформация ε или коэффициент температурного расширения α_t (см. сообщ. 2), могут иметь свои множители подобия.

В теореме 1 было сформулировано соотношение лишь между основными физическими величинами для установления условий подобия состояний тел A и A'. Всякая новая физическая величина, присоединившаяся нами к рассмотрению (температура, трение, вязкость и др.) неизменно требовала применения условия инвариантности, которое позволяло однозначно формулировать *дополнительное* условие подобия. В дальнейшем остановимся на вопросах подобия динамических процессов*

5. Теорема 4 (о динамическом подобии)

Из теоремы 1 следует, в частности, что для обеспечения подобия состояний тел A и A' необходимо, чтобы объемные силы были со-

---

* Эта часть работы была доложена в Риге на сессии Института машиноведения Академии наук Латвийской ССР в июне 1958 г.

ответственно равны K и $K' = \frac{\beta}{\alpha} K$ [1a]. Силы инерции являются объемными силами и потому они также должны удовлетворять этому условию. Сила инерции, отнесенная к единице объема тела A, равна $-\rho \frac{d^2\bar{w}}{dt^2}$, а для тела $A' - \rho' \frac{d^2\bar{w}'}{dt'^2}$.

Следовательно, для обеспечения подобия состояний тел A и A' должно быть выполнено условие

$$\rho' \frac{d^2\bar{w}'}{dt'^2} = \frac{\beta}{\alpha} \rho \frac{d^2\bar{w}}{dt^2}. \tag{37}$$

С другой стороны на основании той же теоремы 1 следует, что должно быть $\bar{w}' = \alpha\gamma\bar{w}$ и $t' = \eta t$.

Имея также в виду, что $\rho' = \delta\rho$, получим из (37)

$$\delta \frac{\alpha\gamma}{\eta^2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

или

$$\eta = \alpha \sqrt{\delta \frac{\gamma}{\beta}}. \tag{38}$$

Таким образом постоянные α, β, γ, η и δ должны быть связаны соотношением (38). Только в этом случае можно обеспечить динамическое подобие обеих тел.

Как было установлено выше, в общем случае, когда имеет место старение или вязкость, или то и другое вместе, значение масштаба времен η вполне предопределено и его следует считать фиксированным. Далее, поскольку параметры β, γ и δ фиксированы при заданных материалах тел A и A', то остается возможность удовлетворить выражению (38) лишь за счет подбора геометрического множителя подобия α. На практике не следует пренебрегать и возможностью подбора подходящего материала для тела A', если рассматривать последнее в качестве модели.

Поэтому, формулируемая ниже теорема может все же иметь некоторое практическое значение.

Теорема 4. Если к подобным телам A и A', одинаковым образом закрепленным, в сходственные моменты времен t и $t' = \eta t$ приложены переменные поверхностные силы, напряженности коих соответственно равны σ и $\sigma' = \beta\sigma$, и переменные объемные силы, интенсивности коих K и $K' = \frac{\beta}{\alpha} K$, то при

$$\eta = \alpha \sqrt{\delta \frac{\gamma}{\beta}}$$

в сходственные моменты времен и в сходственных точках обоих тел напряжения равны σ и $\sigma' = \beta\sigma$, деформации равны ε и $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$, смещения равны $\bar{w}$ и $\bar{w}' = \alpha\gamma\bar{w}$, т. е. имеет место динамическое подобие.

Мы можем, однако, значительно расширить возможности моделирования динамических процессов, если учесть следующее важное обстоятельство.

Процессы старения и ползучести материалов являются процессами длительными. Многие же динамические процессы кратковременны, как, например, удар или сейсмическое воздействие. Можно считать, с известной степенью точности, что за время протекания динамических процессов, свойства материала в связи с его старением практически не изменились и что явление ползучести не могло играть существенной роли. Практика показала далее, что вязкое сопротивление для большинства строительных материалов также не проявляет себя при динамических процессах. Действительно, если бы вязкое сопротивление имело значение при колебаниях, то наблюдалось бы увеличение затухания свободных колебаний с увеличением частоты (гипотеза Фохта [9]). На деле этого нет. Известно, что при колебаниях имеет значение внутреннее трение, связанное с явлением статического гистерезиса [16]. Поэтому затухание свободных колебаний практически не зависит от их частот в широком диапазоне изменения последних.

Это значит, что во многих случаях, при моделировании динамических процессов возможно пренебрегать старением, ползучестью и вязкостью. При этих условиях множитель подобия η можно вовсе исключить из рассмотрения. Достаточно лишь потребовать, чтобы упругие свойства тела A' в момент динамических испытаний отвечали бы упругим свойствам тела A с учетом процесса старения, если таковое происходит.

Для моделирования динамических процессов можно ввести теперь новый множитель подобия ξ для времен t и $t' = \xi t$. Для наглядности рассмотрим, например, упругое тело, подчиняющееся закону Гука. Выше указывалось, что если есть возможность пренебречь силами инерции, то к телам A и A' можно приложить подобные внешние нагрузки при *произвольном* масштабе времен. Если теперь для рассматриваемых упругих тел следует также учесть и силы инерции, то масштаб времен уже не может быть произвольным, а должен удовлетворять условию подобия объемных сил. Этот масштаб времен обозначим через ξ. Заменяя в выражении (38) η через ξ, получим необходимое условие подобия для динамических процессов, отвечающего новому условию.

$$\xi = \alpha \sqrt{\delta \frac{1}{\beta}}. \tag{39}$$

Выражение (39) принципиально отлично от выражения (38), так как в последнем η — фиксировано условиями старения или ползучести, а в (39) ξ может быть отлично от η, конечно, при отсутствии фактора старения.

На основе изложенного, сформулируем условия подобия тел A и A', при которых открывается возможность строгого использования формулы (39). Для этой цели на условия подобия тел A и A' данных в сообщении 1, [1а] должны быть наложены следующие ограничения:

1) механические свойства тел A и A' не меняются во времени;

2) с прекращением изменения сил, действующих на тела A и A', прекращается и изменение деформаций этих тел;

3) вязкость отсутствует.

Как видно, этими ограничениями устраняются из рассмотрения явления старения, ползучести, релаксации и вязкости.

Теперь можно предложить следующее дополнение к теореме 4:

Дополнение к теореме 4. Если подобные тела удовлетворяют ограничениям 1), 2) и 3), то для них остается полностью справедливой теорема 4, при замене множителя подобия τ_1 на множитель подобия ξ.

На основании изложенного, мы имеем возможность для реальных тел, если даже они не удовлетворяют ограничениям 1), 2) и 3) приближенно использовать дополнение к теореме 4. Оно вносит существенное облегчение при моделировании динамических процессов, в особенности сейсмического происхождения, в силу их кратковременности.

Значение τ_1 в подобных динамических процессах является частным случаем значения ξ, когда они оказываются совпадающимися.

7. Некоторые следствия теоремы 4 и ее дополнения

Приведем ряд следствий только что установленной теоремы.

Следствие 1. Все следствия теоремы 1, рассмотренные в сообщении 1 [1а], сохраняют свою силу и для теоремы 4.

Следствие 2. Условия о температурных деформациях, о подобии составных тел, о контакте подобных тел, о подобии трещинообразования, рассмотренные в сообщении 2 [1б], сохраняют свою силу и при динамических процессах.

Действительно, содержание теоремы 4 отличается от содержания теоремы 1 лишь наложением дополнительных ограничений на множитель подобия времен, не влияющих на перечисленные в следствиях 1 и 2 факты.

Следствие 3. В случае простого подобия, множитель подобия для времен равен множителю подобия для длин, т. е. $\xi = \alpha$.

Действительно, при этом $\rho = \gamma = \delta = \tau_1 = 1$ и из (39) следует, что $\xi = \alpha$. Этот факт хорошо известен [17, 18].

Следствие 4. Периоды T' и T свободных колебаний тел A' и A относятся как множитель подобия времен ξ, т. е. $T' = \xi T$. Это непосредственно вытекает из теоремы. В частности, в случае простого подобия, $T' = \alpha T$ [18], т. е. периоды свободных колебаний пропорциональны линейным размерам тел.

Следствие 5. Скорости $\frac{dw'}{dt'}$ и $\frac{dw}{dt}$ сходственных точек тел A' и A связаны соотношением

$$\frac{dw'}{dt'} = \frac{\alpha\gamma}{\xi}\frac{dw}{dt}\qquad(40)$$

В частности, при простом подобии, скорости сходственных точек тел A и A' одинаковы.

Следствие 6. Ускорения сходственных точек тел A' и A связаны соотношением

$$\frac{d^2w'}{dt'^2} = \frac{\alpha\gamma}{\xi^2}\frac{d^2w}{dt^2}\qquad(41)$$

В частности, при простом подобии, ускорения сходственных точек тел A и A' обратно пропорциональны их линейным размерам.

Следствие 7. Если сопротивление внешней среды p, отнесенное к единице поверхности тела A есть функция скорости, т. е. $p = f\left(\frac{dw}{dt}\right)$, то для тела A' должно быть $\frac{p'}{\beta} = f\left(\frac{dw'}{dt'}\frac{\xi}{\alpha\gamma}\right)$ для обеспечения подобия динамических состояний обоих тел. В частности, при простом подобии,

$$p' = p = f\left(\frac{dw}{dt}\right).\qquad(42)$$

Следствие 8. При наличии внутреннего трения обусловленного вязкостью, для обеспечения подобия состояний тел A и A' следует подчинить ξ условию — $\xi = \eta$, причем коэффициенты вязкости должны подчиняться соотношению (18).

Следствие 9. Декременты затухания свободных колебаний подобных тел одинаковы, поскольку в сходственные моменты времен сходственные перемещения точек тел A и A' неизменно сохраняют пропорцио нальность.

Следствие 10. Подобие состояний тел A и A', связанное с динамической устойчивостью может быть обеспечено при соблюдении условий теоремы 4 и теоремы 2 о подобии устойчивости [16], т. е. при $\gamma = 1$.

Следствие 11. К телам A и A' в сходственных площадках должны быть приложены импульсы напряжений σ и $\sigma' = \beta\sigma$ соответственно длительностью Δt и $\Delta t' = \xi\Delta t$, для обеспечения подобия динамических состояний.

Сосредоточенные импульсы, на основании следствия 2 [16], должны быть соответственно равны $P\Delta t$ и $P'\Delta t'$ причем $P' = \alpha^2\beta P$ и $\Delta t' = \xi\Delta t$.

Следствие 12. Для обеспечения подобия состояний при ударе, относительная скорость v соударяющихся тел A, B и относительная скорость $\bar{v}'$, подобных им соударяющихся тел A' и B' должны быть подчинены условию

$$\bar{v}' = \frac{\alpha\gamma}{\xi}\bar{v}. \tag{43}$$

В случае, если удар осуществляется при точечном контакте, должно быть $\gamma = 1$ и

$$\bar{v}' = \frac{\alpha}{\xi}\bar{v}. \tag{44}$$

Здесь подразумевается, что удар осуществляется в сходственных точках. Покажем это. Допустим, что удар уже произошел в момент $t = 0$ и рассмотрим теперь некоторый момент t, когда тела A и B находятся в контакте. Их можно рассматривать как тело C [16]. Рассмотрим теперь тело C' подобное телу C и потребуем, чтобы для обоих тел были выполнены условия теоремы 4 соответственно в моменты t и $t' = \xi t$. Постепенно возвращаясь к прошлому от t до 0, мы видим, что условия теоремы 4 будут неизменно удовлетворяться. В частности будет удовлетворяться и следствие 5. В моменты $t = 0$ и $t' = 0$, т. е. в моменты контактов обоих пар, также будет удовлетворяться следствие 5. Следовательно, относительные скорости тел A и B, а также A' и B' будут также удовлетворять настоящему следствию. В случае точечного контакта тел должно быть соблюдено условие $\gamma = 1$ [1].

Для случая простого подобия тел вопрос о подобии при ударе изучен [19].

8. Примеры

Пример 1. *Изгибные колебания упругого консольного бруса постоянного сечения под действием горизонтальных сейсмических сил.*

Дифференциальное уравнение колебаний бруса A имеет вид:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -\rho F\frac{d^2(y+y_0)}{dt^2}, \tag{45}$$

где EI — жесткость;

y — относительное смещение оси бруса в функции от абсциссы x, отсчитываемой от места заделки бруса в грунт.

$y_0(t)$ — горизонтальные колебания почвы при землетрясении;

ρ — плотность материала бруса;

F — площадь его поперечного сечения.

Для подобного бруса A' имеем соответственно

$$E'I'\frac{d^4y'}{dx'^4} = -\rho'F'\frac{d^2(y'+y_0')}{dt'^2}. \tag{46}$$

причем
$$E' = \frac{\beta}{\gamma} E,\ I' = \alpha^4 I,\ x' = \alpha x,\ \rho' = \delta\rho,$$
$$F' = \alpha^2 F,\ t' = \xi t,\ y' = \alpha\gamma y,\ y'_0 = \alpha\gamma y. \tag{47}$$

Подставляя эти значения в (46), найдем
$$\frac{\beta}{\gamma}\alpha^4 \frac{\alpha\gamma}{\alpha^4} = \delta\alpha^2 \frac{\alpha\gamma}{\xi^2}.$$

Откуда следует, что находится в соответствии с теоремой 4,
$$\xi = \alpha \sqrt{\delta \frac{\gamma}{\beta}}.$$

Нетрудно убедиться, что граничные условия также удовлетворяют условиям подобия.

Пример 2. *Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил* [20].

Дифференциальное уравнение для бруса A имеет вид:
$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\rho F \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 y}{dx^2} P_0 \cos \omega t. \tag{48}$$

Уравнение это отличается от уравнения (45) наличием продольной пульсирующей силы $P_0 \cos \omega t$.

Соответствующее дифференциальное уравнение для бруса A':
$$E'I' \frac{d^4 y'}{dx'^4} = -\rho' F' \frac{d^2 y'}{dt'^2} - \frac{d^2 y'}{dx'^2} P'_0 \cos \omega' t'. \tag{49}$$

Для обеспечения подобия необходимо, чтобы множители подобия обоих членов правой части были одинаковыми.

В дополнение к условиям (47) имеем
$$P'_0 = \alpha^2\beta P_0,\ \omega' = \frac{1}{\xi}\omega. \tag{50}$$

Подставляя значения (47) и (50) в (49) найдем:
$$\alpha\beta EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{\delta\alpha^3\gamma}{\xi^2}\rho F \frac{d^2 y}{dt^2} - \alpha\gamma\beta \frac{d^2 y}{dx^2} P_0 \cos \omega t.$$

Разделив все члены этого выражения на $\alpha\beta$, получим:
$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{\delta\alpha^2\gamma}{\beta\xi^2}\rho F \frac{d^2 y}{dt^2} - \gamma \frac{d^2 y}{dx^2} P_0 \cos \omega t. \tag{51}$$

Сопоставляя (51) с (48) найдем, что для обеспечения подобия динамической устойчивости между телами A и A' необходимо, чтобы
$$\frac{\delta\alpha^2\gamma}{\beta\xi^2} = 1,\ \gamma = 1, \tag{52}$$

что находится в соответствии со следствием (10) теоремы 4.

Пример 3. *Продольный удар упругого стержня, движущегося со скоростью v, о неподвижную упругую плиту* [21].

Напряжение при ударе для стержня A

$$\sigma = v\sqrt{3\rho E}. \tag{53}$$

При ударе стержня A' имеем:

$$\sigma' = v'\sqrt{3\rho' E'}. \tag{54}$$

Подставляя сюда $\sigma' = \beta\sigma$, $\rho' = \gamma\rho$ и $E' = \frac{\beta}{\gamma} E$ найдем, что должно быть

$$v' = \frac{\alpha\gamma}{\xi} v,$$

что находится в соответствии со следствием 12 теоремы 4.

В случае, если при ударе имеет место точечный контакт, например, при соударении шаров, подобие динамических состояний обеспечивается лишь при условии $\gamma = 1$, как это уже упоминалось в следствии 12 теоремы 4.

Институт стройматериалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

Поступило 20 II 1958

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՒ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՍԵՅՍՄԱԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Երրորդ հաղորդագրություն

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Նախորդ հաղորդագրություններում տրված էին պինդ մարմինների նմանության սահմանումը, ինչպես և ստատիկական նմանության՝ ըստ երկրաչափության, դեֆորմացիայի և ճաքառաջացման պայմանների մասին: Ներկա հոդվածում մանրամասնորեն կանգ է առնված մարմինների նմանության ըստ ժամանակի պայմանների հարցերի վրա: Դիտված են մի շարք կոնկրետ դեպքեր, որոնք համապատասխանում են ստատիկ ծանրաբեռնմանը: Այս դեպքում պահպանվելով A և A' կոչված մարմինների նմանության պայմանները, ինչպես և հիմնական թեորեմի և նրա հետևանքների պայմանները, նշված մարմինները կգտնվեն նման վիճակում ժամանակի t և t' = ηt նման մոմենտում: Ըստ որում η կարելի է ընտրել նախօրոք վերցված ցանկացած մեծությամբ:

Այս պայմանը հիմք ընդունելով գտնված են նման մարմինների առաձգական դեֆորմացիայի պարզ դեպքերը, երբ մարմինները ենթարկվում են Հուկի օրենքին: Դիտվում է նման մարմինների պլաստիկական հոսքի դեպքը, երբ վերջինս տրված է Թեյի հավասարումներով:

Գտնված է մարմինների նմանության պայմանը վերջիններիս առաձգապլաստիկ դեֆորմացիայի դեպքի համար, երբ բացակայում է մածուցիկ դիմադրությունը, իսկ դեֆորմացիաների և լարվածությունների կապը արտահայտվում է (7) հավասարումներով: Ինչպես և գտնված է նմանության պայմանը մարմինների մածուցիկ դիմադրության դեպքում՝ որոնց լարվածության տենզորների և դեֆորմացիաների հարաբերությանը ենթարկվում է (16) հավասարմանը: Գտնված է բարդ մեխանիկական միջավայրերի նմանության տարբեր դեպքեր՝ 1) մածուցիկ-պլաստիկական միջավայրի (Բինգամ), 2) առաձգա-մածուցիկային միջավայր (Ֆոյգտ), 3) ռելաքսացնող միջավայր (Մաքսվել), 4) առաձգա-մածուցիկ-ռելաքսացնող միջավայր (Իշլինսկի):

Հոդվածում տաս է քաշված և լուծված մարմինների դինամիկ պրոցեսների նմանության հարցերը: Նշված կապակցությամբ ապացուցված է չորրորդ թեորեմը, որում նշված է, որ երկու մարմինների դինամիկական նմանությունը ապահովված է, եթե նրանց վիճակը արտահայտված է (37) հավասարումով և տրված հաստատունները իրար հետ կապված են (38) ձևով: Հենց այդտեղ բերված է թեորեմին վերաբերող մի լրացում, ինչպես և թեորեմից բխող մի շարք հետևություններ ու նրանց լրացումները:

Հոդվածի վերջում բերված են հետևյալ երեք օրինակների լուծման ձևերը. հաստատուն կտրվածքի կոնսոլային առաձգական հեծանի ծռման տատանումները հորիզոնական ազդող սեյսմիկ ուժերի տակ. պրիզմատիկ ձողի հավասարակշռությունը փոփոխական ընդերկայնական ուժերի ազդեցության տակ. v—արագությամբ շարժվող առաձգական ձողի ընդերկայնական հարվածը անշարժ առաձգական սալին:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. Г.* Известия АН АрмССР (серия техн. наук). а) т. X, № 5, 1957; б) т. X, № 6, 1957.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности, ГТТИ, М., 1956.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. ГТТИ, М.—Л., 1948.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. ГТТИ, М.—Л., 1952.
5. *Boltzmann L.* Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, Wiener Ber., Bd. 70, 1874.
6. *Volterra.* Leçons sur les fonctions de lignes. Paris. Gauthier—Villard, 1913.
7. *Алфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. ИИЛ, М., 1952.
8. *Ильюшин А. А.* Ученые записки МГУ. вып. 39, М., 1940.
9. *Foigt W.* Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Kristalle. Abh. d. Math. Klasse d. Königl. Ges. d. Wiss., Bd. 36, Göttingen. 1890.
10. *Maxwell I.* On the dynamical theory of gases. Phil. Trans., vol. 157, 1867.
11. *Ишлинский А. Ю.* ПММ, новая серия, т. IV, вып. 1, М.—Л., 1940.
12. *Работнов Ю. Н.* ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
13. *Афанасьева-Эренфест Т. А.* ЖРФХО, 1911, вып. 7, т. 43.
14. *Кирпичев М. В.* и *Конаков П. К.* Математические основы теории подобия. АН СССР, М.—Л., 1949.

15. *Кирпичев М. Б.* Теория подобия. АН СССР, М., 1953.
16. *Давиденков Н. Н.* ЖТФ, т. VIII, вып. 6, 1938.
17. *Покровский Г. И., Федоров И. С.* Действие удара и взрыва в деформируемых средах. Гос. изд. лит. по строит. мат., М., 1957.
18. *Рэлей.* Теория звука, т. II, изд. 2, ГТТИ, М., 1955.
19. *Покровский Г. И.* и *Федоров И. С.* Моделирование прочности грунта. М., Госстройиздат, 1939.
20. *Беляев Н. М.* Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. „Труды по теории упругости и пластичности“, ГТТИ, М., 1957.
21. *Кильчевский Н. А.* Теория соударений твердых тел, ГТТИ, Л.—М., 1949.
22. *Ильюшин А. А.* ПММ., т. XVI, 1952.