ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտություններ, հատոր XI, № 3, 1958 Серия технических наук

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. А. МЕЛИК-ВАРДАНЯН

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ СОПРОТИВЛЕНИЯ, ИМЕЮЩЕЙ ДВА НУЛЯ И ДВА ПОЛЮСА

Построение двухполюсника по его частотной характеристике относится к области синтеза электрических цепей. В отличие от задач анализа, в которых обычно задается характер воздействующей функции и требуется определить реакцию цепи, в задачах синтеза по реакции цепи и характеру воздействующей функции, определяются структура и параметры цепи. Задачи синтеза обычно не имеют однозначных решений, так как представляется возможным получить несколько эквивалентных цепей, обладающих одинаковыми свойствами.

Фундаментальное значение в теории синтеза двухполюсников имеет следующее положение: любая функция комплексного переменного может быть интерпретирована в виде двухполюсника, если она является положительной действительной функцией. Функция комплексного переменного $Z(p)$ называется положительной, если её действительная часть положительна при положительной части аргумента, т. е.

$$R_e Z(p) > 0 \text{ при } R_e p > 0.$$

Если положительная функция действительна при действительном p, она называется положительной действительной функцией.

Ниже, на конкретном примере, показаны различные способы синтеза двухполюсников по заданной функции комплексного переменного, выражающей сопротивление двухполюсника при комплексной частоте.

Б. В. Булгаковым [1] показаны два частных случая реализации функции

$$Z(p) = \frac{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}{b_0 p^2 + b_1 p + b_2},$$

имеющей два нуля и два полюса в левой полуплоскости, в виде пассивных двухполюсников с пятью элементами. В настоящей работе показано, что применяя тот же метод синтеза — метод последовательного отщепления нулей и полюсов, можно получить еще две схемы, также являющиеся пятиэлементными двухполюсниками, имеющими три вида элементов — R, L, C. Кроме того, применяя метод разложения функции $Z(p)$ в непрерывную дробь, можно получить ещё четыре вида двухполюсников, состоящих из элементов RL или RC.

Эти виды получаются в результате различных вариантов деления полиномов, находящихся в числителе и знаменателе функции. В зависимости от того как расположены эти полиномы—по восходящим или нисходящим степеням, делится ли числитель на знаменатель или знаменатель на числитель (поскольку всякую дробь $\frac{a}{b}$ можно представить в виде $\frac{1}{\frac{b}{a}}$) — получаются четыре различные схемные реализации. При этом тот или иной вариант деления применяется в зависимости от соотношений коэффициентов при комплексном переменном. Всего может быть получено восемь пятиэлементных схем. При сравнении сходственных схем, полученных вышеуказанными двумя методами, выявлены условия, при которых реализация данной функции обеими путями дает тождественные схемы.

Итак, задача формулируется следующим образом: требуется реализовать в качестве двухполюсника функцию:

$$Z(p) = \frac{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0} \qquad (\text{коэф. } a_i \text{ и } b_i > 0).$$

Синтез методом последовательного отщепления нулей и полюсов

1) При $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ и $a_0b_2 - a_2b_0 > 0$ разложение функции можно представить в виде

$$Z(p) = \frac{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{k_1p + k_2p^2}{b_0p^2 + b_1p + b_2} = R_1 + Z_1(p),$$

где

$$k_1 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{b_2^2}; \quad k_2 = \frac{a_0b_2 - a_2b_0}{b_2^2}; \quad R_1 = \frac{a_2}{b_2}.$$

Функция $Z_1 = \frac{k_1p + k_2p^2}{b_2 + b_1p + b_0p^2}$ имеет нуль в начале (в точке $p = 0$); выделим этот нуль

$$\frac{1}{Z_1(p)} = \frac{b_2 + b_1p + b_0p^2}{k_1p + k_2p^2} = \frac{1}{\frac{k_1}{b_2}p} \cdot \frac{k_1 + b_0p}{k_1 + k_2p} = \frac{1}{L_1p} + \frac{1}{Z_2(p)},$$

где

$$k_3 = b_1 - \frac{k_2}{k_1}b_2; \quad L_1 = \frac{k_1}{b_2^2}; \quad \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{k_2 + b_0p}{k_2 + k_3p};$$

далее

$$\frac{1}{Z_1(p)} = \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_4 p}{k_3 + k_5 p} = \frac{k_2}{k_1} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_3}{k_4} p} + \frac{k_5}{k_4}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{pC_1} + R_3},$$

где

$$k_4 = b_0 - \frac{k_2 b_1}{k_1}; \quad R_2 = \frac{k_1}{k_2}; \quad R_3 = \frac{k_3}{k_4}; \quad C_1 = \frac{k_4}{k_3}.$$

Следовательно функция $Z(p)$ может быть представлена в виде:

$$Z(p) = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1}{b_2} p} + \frac{1}{\frac{k_3}{k_4}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_5}{k_3} p} + \frac{k_6}{k_4}}} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{pL_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{pC_1} + R_3}}.$$

Этому разложению соответствует схема, изображенная на рис. 1.

При этом k_3 и k_4 должны быть больше нуля.

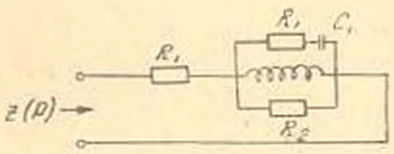

Рис. 1.

2) При $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, $a_2 b_0 - a_0 b_2 < 0$ аналогично предыдущему случаю получим:

$$Z(p) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{a_2}{b_2}} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_6}{a_2} p} + \frac{k_7}{k_5} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_8}{k_5} p} + \frac{k_8}{k_6}}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pC_2 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{pL_2} + \frac{1}{R_3}}}},$$

где

$$k_5 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2}; \quad k_6 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{a_2}; \quad k_7 = a_1 - a_2 \frac{k_8}{k_5}; \quad k_8 = a_0 - \frac{k_6 k_7}{k_5},$$

$$R_1 = \frac{a_2}{b_2}; \quad C_2 = \frac{k_5}{a_2}; \quad L_2 = \frac{k_6}{k_5}; \quad R_3 = \frac{k_8}{k_6}; \quad R_2 = \frac{k_7}{k_5}.$$

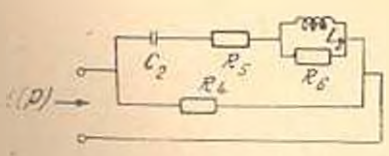

Рис. 2.

Подобному разложению соответствует схема, изображенная на рис. 2, причем постоянные k_7 и k_8 должны быть больше нуля.

3) При $a_1 b_0 - a_0 b_1 > 0$, $a_2 b_0 - a_0 b_2 > 0$ получим:

$$Z(p) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{\frac{b_0}{k_9} p + \frac{1}{\frac{k_9}{k_{11}}} + \frac{1}{\frac{k_{11}}{k_{12}} p + \frac{k_{10}}{k_{12}}}} = R_0 + \frac{1}{pC_3 + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{pL_3 + R_5}},$$

где

$$k_9 = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0}; \quad k_{10} = \frac{a_2b_0 - a_0b_2}{b_0}; \quad k_{11} = b_1 - b_0\frac{k_{10}}{k_9}; \quad k_{12} = b_2 - \frac{k_{10}k_{11}}{k_9};$$

$$R_7 = \frac{a_0}{b_0}; \quad C_3 = \frac{b_0}{k_9}; \quad R_8 = \frac{k_9}{k_{11}}; \quad L_3 = \frac{k_9}{k_{12}}; \quad R_9 = \frac{k_{10}}{k_{12}}.$$

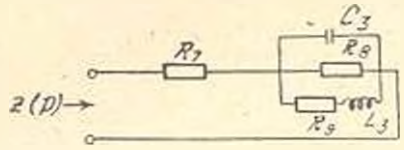

Рис. 3.

Схема, соответствующая этому разложению, изображена на рис. 3.

Постоянные k_{11} и k_{12} должны быть больше нуля.

4) При $a_1b_0 - a_0b_1 = 0$, $a_2b_0 - a_0b_2 < 0$ получим:

$$Z(p) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{a_0}{b_0}} + \cfrac{1}{\cfrac{a_0}{k_{13}} + \cfrac{k_{14}}{k_{13}} + \cfrac{1}{\cfrac{k_{13}}{k_{16}}p + \cfrac{1}{\cfrac{k_{16}}{k_{14}}}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{R_{10}} + \cfrac{1}{pL_4 + R_{11} + \cfrac{1}{pC_4 + \cfrac{1}{R_{12}}}}}.$$

где

$$k_{13} = \frac{a_0b_2 - a_1b_0}{a_0}; \quad k_{14} = \frac{a_0b_3 - b_2b_0}{a_0}; \quad k_{15} = a_1 - \frac{k_{14}}{k_{13}}a_0; \quad k_{16} = a_2 - \frac{k_{14}k_{15}}{k_{13}};$$

$$R_{10} = \frac{a_0}{b_0}; \quad L_4 = \frac{a_0}{k_{13}}; \quad Z_2(p) = \frac{k_{15}p + a_2}{k_{13}p + k_{14}}; \quad R_{11} = \frac{k_{15}}{k_{13}}; \quad C_4 = \frac{k_{13}}{k_{16}}; \quad R_{12} = \frac{k_{16}}{k_{14}}.$$

Такому разложению соответствует рис. 4. Постоянные k_{15} и k_{16} должны быть положительными. Таким образом метод последовательного отщепления нулей и полюсов дают схемы, изображенные на рис. 5.

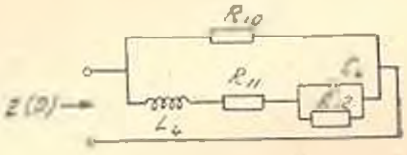

Рис. 4.

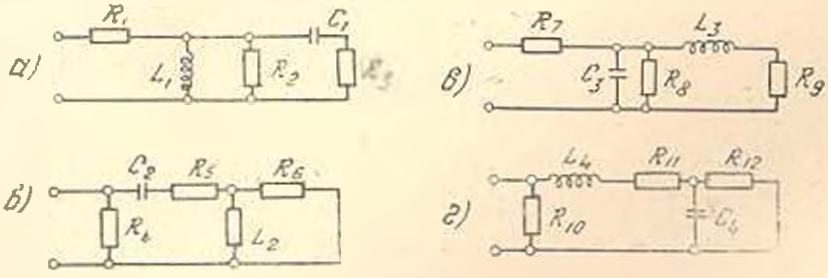

Рис. 5.

Синтез методом разложения в непрерывную дробь

Как указывалось, этим методом могут быть получены еще четыре схемы, которые представляют пятиэлементные ценные двухполюсники с потерями, состоящие из двух видов элементов.

5) При $a_1b_0 - a_0b_1 > 0$ и $a_2b_0 - a_0b_2 > 0$

разложение функции $$Z(p) = \frac{a_0p^2 + a_1p + a_0}{b_0p^2 + b_1p + b_2}$$

примет вид:

$$a_0p^2 + a_1p + a_2 \;\Big|\; b_0p^2 + b_1p + b_2$$
$$a_0p^2 + \frac{a_0b_1}{b_0}p + \frac{a_0b_2}{b_0} \;\Big|\; \frac{a_0}{b_0}$$

$$b_0p^2 + b_1p + b_2 \;\Big|\; k_1p + k_2$$
$$b_0p^2 + b_0\frac{k_2}{k_1}p \;\Big|\; \frac{b_0}{k_1}p$$

$$k_1p + k_2 \;\Big|\; k_3p + b_2$$
$$k_1p + b_2\frac{k_2}{b_2} \;\Big|\; \frac{k_1}{k_3}$$

$$k_3p + b_2 \;\Big|\; k_1$$
$$k_3p \;\Big|\; \frac{k_2}{k_1}p$$

$$k_4 \;\Big|\; b_2$$
$$k_4 \;\Big|\; k_3$$
$$= \;\Big|\; b_2$$

$$k_1 = a_1 - \frac{a_0b_1}{b_0}$$
$$k_2 = a_2 - \frac{a_0b_2}{b_0}$$
$$k_3 = b_1 - \frac{k_2}{k_1}b_0$$
$$k_4 = k_2 - \frac{b_1}{k_3}b_2$$

постоянные k_3 и k_4 должны быть больше нуля.

Таким образом функция $Z(p)$ может быть представлена в виде:

$$Z(p) = \frac{a_0}{b_0} + \cfrac{1}{\frac{b_0}{k_1}p + \cfrac{1}{\frac{k_3}{k_2} + \cfrac{1}{\frac{k_2}{k_4}p + \cfrac{1}{\frac{k_4}{b_2}}}}} = R_1 + \cfrac{1}{pC_1 + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{pC_2 + \cfrac{1}{R_3}}}},$$

где $$R_1 = \frac{a_0}{b_0};\ C_1 = \frac{b_0}{k_1};\ R_2 = \frac{k_1}{k_3};\ C_2 = \frac{k_3}{k_4};\ R_3 = \frac{k_4}{b_2}.$$

Такому разложению соответствует схема на рис. 6.

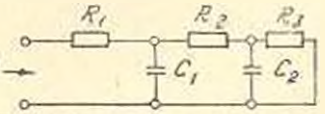

Рис. 6.

6) При $a_1b_0 - a_0b_1 < 0$, $a_2b_0 - a_0b_2 < 0$ получим:

$$Z(p) = \cfrac{1}{R_1^{-1} + \cfrac{1}{pL_1 + \cfrac{1}{R_2^{-1} + \cfrac{1}{pL_2 + \cfrac{1}{R_3^{-1}}}}}}.$$

где

$$k_1 = b_1 - \frac{a_1 b_0}{a_0};\quad k_2 = b_2 - \frac{a_2 b_0}{a_0};\quad k_3 = a_1 = \frac{k_1}{k_2} a_0;\quad k_4 = k_2 - \frac{k_0}{k_3} a_2;$$

$$R_1 = \frac{a_0}{b_0},\quad L_1 = \frac{a_0}{k_2},\quad R_2 = \frac{k_3}{k_2},\quad L_2 = \frac{k_3}{k_4},\quad R_3 = \frac{a_2}{k_4}.$$

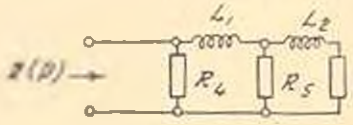

Рис. 7.

Разложению соответствует схема, показанная на рис. 7.

Разложение в непрерывную дробь можно выполнить также и по отрицательным степеням аргумента p:

7) При $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, $a_0 b_2 - a_2 b_0 > 0$ по аналогии с предыдущим случаем получим:

$$Z(p) = \frac{a_2}{k_2} + \cfrac{1}{\frac{b_2}{k_2} p^{-1} + \cfrac{1}{\frac{k_2}{k_{11}} + \cfrac{1}{\frac{k_{11}}{k_{12}} p^{-1} + \cfrac{1}{\frac{k_{12}}{b_0}}}}} =$$

$$= R_7 + \cfrac{1}{p^{-1} L_8^{-1} + \cfrac{1}{R_8 + \cfrac{1}{p^{-1} L_9^{-1} + \cfrac{1}{R_9}}}},$$

где

$$k_9 = a_1 - \frac{a_2 b_1}{b_2};\quad k_{10} = a_0 - \frac{a_2 b_0}{b_2};\quad k_{11} = b_1 - \frac{k_{10} b_2}{k_9};\quad k_{12} = k_{10} - \frac{k_9 b_0}{k_{11}};$$

$$R_7 = \frac{a_2}{b_2};\quad L_8 = \frac{k_9}{b_2};\quad R_8 = \frac{k_9}{k_{11}};\quad L_9 = \frac{k_{12}}{k_{11}};\quad R_9 = \frac{k_{11}}{b_0}.$$

Этому разложению соответствует схема, показанная на рис. 8, при этом $k_{11} > 0$ и $k_{12} > 0$.

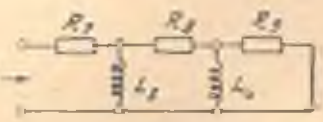

Рис. 8.

8) При $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, $a_0 b_2 - a_2 b_0 < 0$ получим:

$$Z(p) = \cfrac{1}{R_{13}^{-1} + \cfrac{1}{p^{-1} C_{14}^{-1} + \cfrac{1}{R_{14}^{-1} + \cfrac{1}{p^{-1} C_{15}^{-1} + \cfrac{1}{R_{15}^{-1}}}}}}$$

где

$$k_{13}=b_1-\frac{a_1b_2}{a_2};\quad k_{14}=b_0=\frac{a_0b_2}{a_2};\quad k_{15}=a_1-\frac{k_{14}a_2}{k_{13}};\quad k_{16}=k_{14}-\frac{k_{13}a_0}{k_{15}}$$

$$R_{13}=\frac{a_2}{b_2};\quad C_3=\frac{k_{13}}{a_2};\quad R_{14}=\frac{k_{15}}{b_{13}};\quad C_4=\frac{k_{13}}{k_{15}};\quad R_{15}=\frac{a_0}{k_{16}},$$

причем $k_{13}>0$, $k_{15}>0$.

Этому разложению соответствует схема на рис. 9.

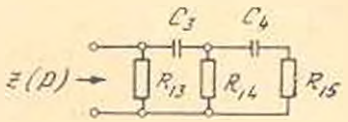

Рис. 9.

Таким образом, методом разложения в непрерывную дробь, получены четыре схемы (рис. 10). Сравнивая между собой схемы рис. 5 и рис. 10, можно видеть, что первые два элемента сходственных схем попарно тождественны, а остальные три элемента образуют Т-образную или П-образную схему. Однако разложение методом выделения нулей и полюсов обратной величины остаточной функции, соответствующей последним трем элементам, дает схемы, аналогичные схемам, показанным на рис. 10.

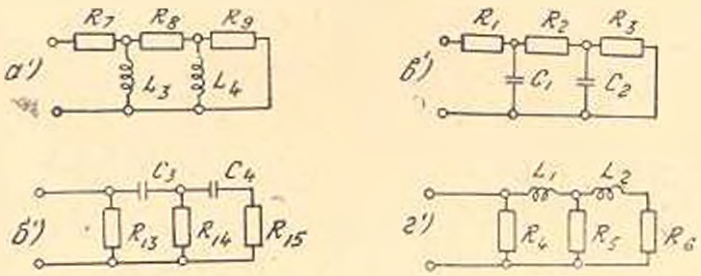

Рис. 10.

Лаборатория электротехники
АН Армянской ССР

Поступило 10 X 57

Կ. Ա. ՄԵԼԻՔ-ՎԱՐՈՒԺԱՆ

ԴՈՒԱՅԻՆ ՊԱՍԻՎ ԵՐԿԲԵՎԵՒԻԿՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԵՐԿՈՒ ՋԵՐՈ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ԲեվԻՆ ՈՒՆՑՅՈՂ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ՏՐՎԱԾ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բուլգակովի մոտ [1] ցույց են տրված $Z(p)$ ֆունկցիայի իրացման երկու մասնավոր դեպքեր, երբ ֆունկցիան ունի երկու զերո և երկու բևեռ ձախ կիսահարթության վրա։ Ներկա հոդվածից երևում է, որ գործադրելով սինթեզի նույն մեթոդը՝ զերոների և բևեռների վերացման կրճատման մեթոդը, կարելի է ստանալ զուգահեռ երկու սխեմա, որոնք ունեն երեք անսակի էլեմենտներ՝ RLC։ Բացի դրանից, զուգահեռելով $Z(p)$ ֆունկցիայի անընդհատ կոտորակի ձևով վերլուծման մեթոդը, կարելի է ստանալ

պարզված չորս տեսքի ռեալիզացիան, որոնք ունեն միայն երկու տեսակի էլեմենտներ՝ RL կամ RC։ Համեմատելով այս երկու միջոցներով ստացված սխեմաները, հայտնաբերված են այն պայմանները, որոնց ժամանակ տվյալ ֆունկցիայի երկու դեպքում էլ ստացվում են նույնանման սխեմաներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Колебания. М., 1954.
2. *Кощеев И. А.* Основы теории электрической связи. М., 1954.
3. *Тафт В. А.* Основы методики расчета линейных электрических схем по заданным частотным характеристикам. М., 1954.
4. Корректирующие цепи в автоматике, под редакцией М. З. Литвина-Седого. М., 1951.
5. *Guillemin E.* Communication network, vol. II. N. J. 1947.