

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

К. А. МЕЛНИК-ВАРТАНЯН

ЧЕБЫШЕВСКИЙ РЕЖИМ ЗАТУХАНИЯ В ПОЛОСЕ  
НЕПРОПУСКАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

В в е д е н и е

Методы синтеза электрических цепей, т. е. построение электрических схем по их частотным характеристикам, тесно связаны с задачей приближения функций. При этом наиболее удобными оказываются методы аппроксимации, разработанные замечательным русским математиком П. Л. Чебышевым. Проблема аппроксимации приобретает все большее значение в электротехнике в связи с тем, что синтез цепей находит широкое применение в самых различных отраслях техники: в автоматике и телемеханике, в проектировании фильтров корректирующих цепей различных гидравлических и механических устройств и т. д.; существенное значение имеет синтез также в связи с проблемой автоматизации и телемеханизации энергосистем.

В настоящей работе описан метод расчета фильтров, основанный на чебышевской аппроксимации; показана зависимость формы частотной характеристики затухания в полосе не пропускания электрического фильтра от степени аппроксимирующей функции. Установлено, что число минимумов и максимумов функции затухания в случае четных аппроксимирующих функций  $f(x)$  равно  $n$ , а в случае нечетных равно  $n - 1$ .

В работе также дано определение чебышевского режима затухания в полосе не пропускания электрических фильтров.

Общие положения

В последние годы в теорию и практику расчета электрических фильтров начинают все больше внедрять методы аппроксимации характеристик фильтров по П. Л. Чебышеву. При этом оказывается, что по сравнению с гладкой аппроксимирующей кривой, получившей в зарубежной литературе название кривой „Бутерворта“, чебышевское приближение имеет ряд преимуществ.

Прежде всего ясно, что „монотонная“ кривая, находясь по одну сторону аппроксимируемой кривой, не использует в полной мере допустимых отклонений, в то время как чебышевская кривая, имеющая в пределах основного отрезка колебательный характер, достигает попеременно верхнего и нижнего допустимых пределов, принимая меж-

ду двумя смежными экстремальными точками точное значение функции. Кроме этого, мостовые фильтры, основанные на чебышевской аппроксимации, всегда допускают эквивалентное преобразование в другие формы фильтров, более выгодные с точки зрения физической реализации — например цепные, чего нельзя сказать о мостовых фильтрах, в основу расчета которых положена аппроксимация с помощью гладких кривых (ср. например, методы расчета фильтров по Кауэру и Боде [8]). Последнее обстоятельство получает существенное значение, поскольку мостовые четырехполюсники, имея значительные теоретико-расчетные преимущества и поэтому служа основой расчета различных методов расчета фильтров, в то же время не выгодны для физической реализации, так как будучи схемой уравновешенной, требуют для своего осуществления большее количество элементов, чем цепные.

Инженерные методы расчета фильтров развиваются в настоящее время по двум направлениям. В основу первого принята цепная схема, состоящая из каскадного соединения симметричных Т- и П-образных звеньев, а также Г-образных полувзвеньев типа К и их  $m$  и  $m'$  производных. Схемы этого типа иногда называют лестничными. В основу второго метода принята симметричная мостовая схема, имеющая то преимущество, что она дает возможность независимого изменения характеристических параметров — характеристического сопротивления  $Z_c$  и характеристической меры передачи  $g$ . Недостатком первого, так называемого обычного метода расчета фильтров является наличие произвольных требований в отношении характеристических параметров, причем независимое изменение одного из них в желательном направлении невозможно, так как приводит к изменению и второго параметра, часто в нецелесообразном направлении.

Материал изложенный ниже относится к мостовому четырехполюснику, который ввиду своей универсальности признан канонической формой четырехполюсника (рис. 1). Основное достоинство этого

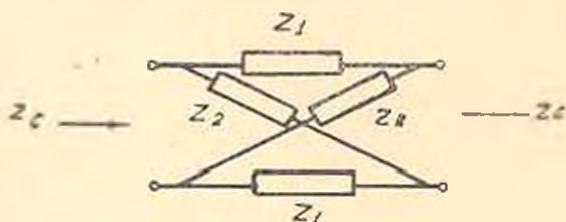


Рис. 1.

четырёхполюсника, отмеченное выше — независимость  $Z_c$  и  $g$  друг от друга объясняется тем, что они являются функциями различных параметров: характеристическое сопротивление является функцией частот

среза и резонансных частот в полосе непронущания, а характеристическая мера передачи — функция частот среза и резонансных частот в полосе пропускания. Возможность независимой регулировки каждого из параметров следует также и из самих формул (1) и (2):

$$\operatorname{th} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}. \quad (1)$$

$$Z_c = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (2)$$

Таким образом  $g$  зависит от отношения сопротивлений плеч моста, а  $Z_c$  от их произведения. Для удобства расчетов в рассмотренные так называемые нормализованные сопротивления  $Z'_1$  и  $Z'_2$ , при этом

$$Z'_1 = \frac{Z_1}{R}, \quad (3a) \quad Z'_2 = \frac{Z_2}{R} \quad (3b)$$

где  $R$  — номинальная величина характеристического сопротивления в полосе пропускания фильтра, равная сопротивлению нагрузки (при согласованном включении). Нормализованное характеристическое сопротивление будет равно:

$$\frac{Z_c}{R} = \sqrt{\frac{Z'_1}{R} \cdot \frac{Z'_2}{R}} = \sqrt{Z'_1 Z'_2} \quad (4)$$

а характеристическая мера передачи

$$th \frac{g}{2} = \sqrt{\frac{Z'_1}{Z'_2}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (5)$$

Примем следующие обозначения

$$\alpha = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (4a), \quad \beta = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \quad (5a)$$

Эти функции играют важную роль в расчете фильтров основанных на мостовой схеме. Их произведение и отношение дают нормализованные сопротивления плеч моста:

$$\alpha\beta = Z'_1 \quad (6)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = Z'_2 \quad (7)$$

Функция  $\alpha$  действительна в полосе пропускания и мнима в полосе затухания; функция  $\beta$ , наоборот, действительна в полосе не пропускания и мнима в полосе пропускания; при этом,  $\alpha$  и  $\beta$  являются функциями резонансных частот и частот среза плеч моста.

Цель приведенного ниже расчета заключается в подборе этих частот таким образом, чтобы функции  $\alpha$  и  $\beta$  в диапазоне своих действительных значений, наименее отличались от единицы.

В самом деле, при

$$\alpha = 1, \quad Z_c = R. \quad (8)$$

т. е. характеристическое сопротивление будет равно своей номинальной величине во всей полосе пропускания фильтра. Это тот идеальный случай, который обеспечивает согласованную работу фильтра во всем диапазоне прозрачности

$$\text{При} \quad \beta = 1, \quad th \frac{g}{2} = 1, \quad (9)$$

$$\text{или} \quad g = b = \infty, \quad (10)$$

т. е. в полосе непропускания собственное затухание (действительная

часть  $g$ ) равна бесконечности. Это является также идеальным случаем, поскольку все частоты в диапазоне непрозрачности полностью задерживаются фильтром.

Реальные фильтры в той или иной степени могут приближаться к идеальным. Ввиду того, что применяемый в настоящей работе метод расчета фильтров основан на чебышевской аппроксимации, ниже приведены краткие сведения о полиномах Чебышева, используемых в качестве аппроксимирующих многочленов.

### Полиномы П. Л. Чебышева

Полиномы Чебышева степени  $n$  в алгебраической форме имеют вид:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right] \quad (11)$$

и представляют собой полином степени  $n$ , с коэффициентом при старшем члене  $2^{n-1}$ .

Поскольку  $x$  рассматривается на отрезке  $[1; -1]$ , легко получить тригонометрическую форму полиномов Чебышева. Полагая  $x = \cos \varphi$ ,

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad (11a)$$

откуда видно, что нулями полинома  $T_n(x)$  являются точки

$$x = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

а точками экстремума —

$$x = \cos \frac{l\pi}{n}, \quad (l = 1, 2, \dots, n-1), \quad (13)$$

нули и точки экстремума расположены на отрезке  $[1, -1]$  неравномерно, сгущаясь к его концам. При  $l$  четном,  $T_n(x)$  проходит через максимум, равный

$$T_n(x) = \cos l\pi = +1,$$

а при  $l$  нечетном — через минимум, равный

$$T_n(x) = -1.$$

В конце основного промежутка (в точках  $\pm 1$ ) полиномы Чебышева принимают следующие значения:

$$T_n(\pm 1) = \begin{cases} +1, \\ -1 \text{ при } n \text{ нечетном} \\ +1 \text{ при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Вне основного промежутка полиномы Чебышева монотонно возрастают или монотонно убывают. Рекуррентная формула для последовательного вычисления полиномов Чебышева такова:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

В явном виде многочлены  $T_n(x)$  имеют следующий вид:

$$T_1(x) = x \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_1(x) = 2x^2 - 1, \quad T_2(x) = 16x^6 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_6(x) = 32x^6 - 48x^3 + 18x^2 - 1.$$

В пределах основного промежутка полиномы Чебышева ортогональны в отношении дифференциального веса

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Нетрудно получить также ортогонально нормированную систему полиномов Чебышева [4].

### Расчет фильтров, основанных на чебышевской аппроксимации.

Одним из методов расчета фильтров, основанных на чебышевской аппроксимации, является метод Кауэра, который первым использовал преимущества расчета мостовых четырехполюсников по сравнению с другими типами четырехполюсников (Т-образных, П-образных и их производных). Сущность метода заключается в следующем. Заменяя в функциях  $\alpha$  и  $\beta$  переменную  $\omega$  новой переменной  $x$ , а резонансные частоты  $\omega_i$  соответствующими параметрами  $x_i$ , легко их привести к рождественному виду для всех классов фильтров. В случае фильтров низких и высоких частот,  $x$  является функцией текущей частоты  $\omega$  и частоты среза, а  $x_i$  функция резонансных частот и частоты среза. В случае полосовых и режекторных фильтров  $x$  — функция текущей частоты и частот среза и резонанса, а  $x_i$  — функция резонансных частот и частот среза.

Таким образом, функции  $\alpha$  и  $\beta$  приводятся к виду

$$f_{2n}(x) = H^{21} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_1^2}} \left(1 - \frac{x^2}{x_3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{x_{n-1}^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{x_n^2}\right)} \quad (15)$$

для четных функций, причем

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \infty,$$

и к виду

$$f_{2n-1}(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{x_1}} \left(1 + \frac{x}{x_2}\right) \left(1 - \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 \pm \frac{x}{x_n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{x}{x_1}} \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \left(1 + \frac{x}{x_3}\right) \dots \left(1 \pm \frac{x}{x_n}\right)} \quad (16)$$

для функций нечетных. Верхний знак у экспоненты  $n$  в выражении (15), а также у последних множителей числителя и знаменателя выражения (16), берется при  $n$ -четном, нижний — при  $n$  нечетном. Чтобы обеспечить функциям  $f_{2n}$  и  $f_{2n-1}$  чебышевскую аппроксимацию единицы, параметры  $x_i$  следует определять по формулам (17) и (21) приведенным ниже:

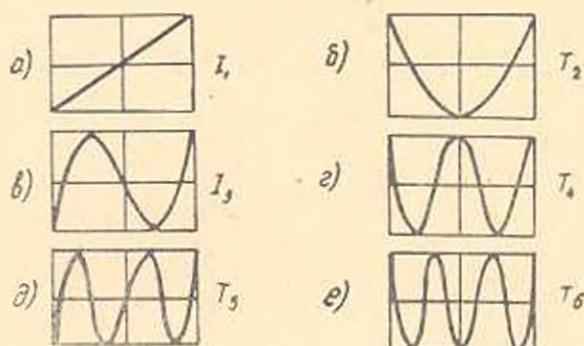


Рис. 2.

а) для четных функций

$$x_i = \frac{1}{\operatorname{sn} \left( \frac{n-i+1}{n} \right) K}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

где  $\operatorname{sn}$  эллиптическая функция Якоби (эллиптический синус),  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода, который представляет собой значение эллиптического интеграла первого рода при значении верхнего предела  $\frac{\pi}{2}$ :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (18)$$

Точки, в которых функция пересекает единичную прямую определяются по формуле:

$$x = k \operatorname{sn} \frac{iK}{2n}, \quad [i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1], \quad (19)$$

а точки экстремума по формуле:

$$x = k \operatorname{sn} \frac{iK}{n}, \quad [i = 0, 1, 2, \dots, n]; \quad (20)$$

б) для нечетных функций параметры определяются по формуле

$$x_i = \frac{1}{\operatorname{sn} \left[ \frac{2(n-i)+1}{2n-1} \right] K}, \quad [i = 1, 2, \dots, n]. \quad (21)$$

Точки пересечения с единичной прямой определяются по формуле:

$$x = k \operatorname{sn} \frac{2iK}{2n-1}, \quad [i = 0, 1, 2, \dots, n-1], \quad (22)$$

а точки экстремума в соответствии с

$$x = k \operatorname{sn} \frac{iK}{2n-1}, \quad [i = 1, 3, 5, \dots, 2n-1]. \quad (23)$$

На рис. 3 показан характер аппроксимации функциями  $f_2$ ,  $f_6$ ,  $f_7$  и  $f_8$  единичной прямой.

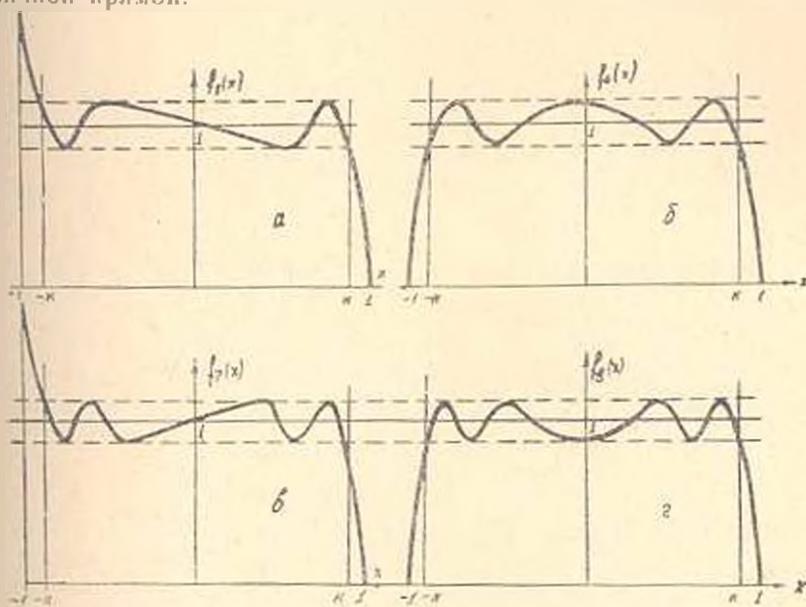


Рис. 3.

### Чебышевский режим затухания

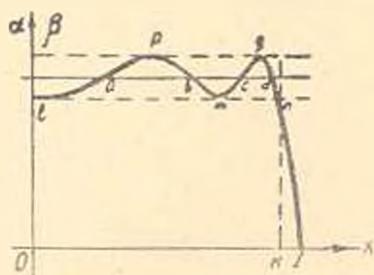
Предлагаемый ниже метод расчета фильтров иллюстрирован на примере, показывающем характерный вид формы кривой затухания в полосе непропускания фильтров при чебышевской аппроксимации.

Пусть, например, функция  $f_n(x)$  выбрана в качестве функций  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$f_8(x) = \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_1^2}} \left(1 - \frac{x^2}{x_3^2}\right)}{H \left(1 - \frac{x^2}{x_2^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{x_4^2}\right)}$$

В соответствии с рис. 3г чебышевская аппроксимация функций  $f_1(x)$  единичной прямой являющейся идеальной частотной характеристикой, изображена на рис. 4. Отрезок  $[0-1]$  по оси абсцисс соответствует диапазону нормированных частот, в пределах которых функции  $\alpha$  и  $\beta$  действительны. Следовательно, для функции  $\alpha$  это будет полоса пропускания, для функции  $\beta$  — полоса непропускания.

Аппроксимация функцией  $\alpha$  единичной прямой обеспечивает стабильность характеристического сопротивления в диапазоне прозрачности и согласованную работу фильтра; это было отмечено выше. Поскольку нас интересует частотная характеристика фильтра, т. е. зависимость затухания от частоты, рассмотрим несколько более подробно график функции  $\beta$ . Точки пересечения функцией  $\beta$  единичной прямой, обозначенные буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , соответствуют частотам бесповечного затухания. Точки наибольшего отклонения функции от



$$x = \frac{\omega}{\omega_1} \text{ для функции } \alpha$$

$$x = \frac{\omega_2}{\omega} \text{ для функции } \beta$$

Рис. 4.

единицы, обозначенные точками  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  (независимо от знака) соответствуют частотам минимального затухания. Следует отметить, что допускаемые отклонения функций  $f(x)$  таковы, что помимо равенства порознь всех максимумов и минимумов между собой, их среднее геометрическое равно единице:

$$\beta_{max} \beta_{min} = 1.$$

Это обстоятельство обеспечивает равенство минимумов затухания во всей полосе не пропускания фильтра — характерный признак чебышевского режима затухания. В самом деле, решив уравнение (1) относительно  $g$ , будем иметь

$$g = \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}}{1 - \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}} = \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad (1a)$$

откуда затухание  $b$  определится по формуле

$$b = \ln \left| \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right| \quad (1b)$$

Из формулы (1b) видно, что  $\beta_{min} = \frac{1}{\beta_{max}}$  дает то же самое затухание, что и  $\beta_{max}$ .

На рис. 5 показана частотная характеристика затухания полосы не пропускания низкочастотного фильтра, рассмотренного выше. По оси абсцисс отложена величина обратная нормированной частоте, либо, в другом масштабе, текущая частота  $f$ . При частоте  $f_1 \left( \frac{1}{x_1} \right)$  соответствующей точке  $n$  (рис. 4) затухание впервые достигает допустимого минимума. Диапазон частот от  $f_1$  до  $f_2$  следует рассматривать как переходную область, где и находится частота среза.

Число частот бесконечного затухания, равное числу частот минимума затухания (включая и  $f = \infty$ ), определяется степенью аппроксимирующей функции  $\beta$ . В рассмотренном случае (при четной степени) оно равно  $n = \frac{8}{2} = 4$ .

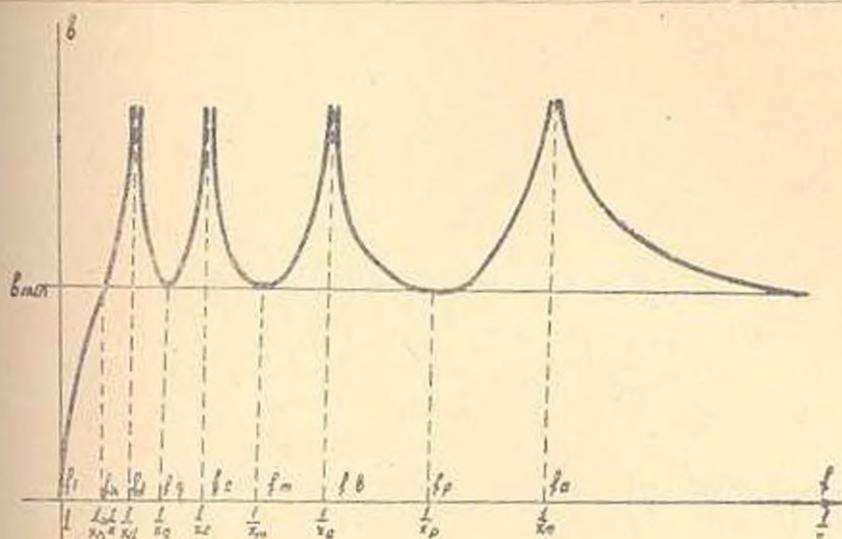


Рис. 5.

Используя в качестве аппроксимирующей кривой  $f_7(x)$ , как можно видеть из рис. 5, мы получим частотную характеристику затухания, последняя ветвь которой уходит в бесконечность (рис. 6). Здесь также число частот минимума затухания равно числу частот бесконечного затухания, если только ограничиться рассмотрением конечных частот, исключив полюс функции затухания в бесконечно удаленной точке. Таким образом, принимая во внимание эти условия, можно дать следующее определение чебышевскому режиму затухания в полюсе непрозрачности электрических фильтров:

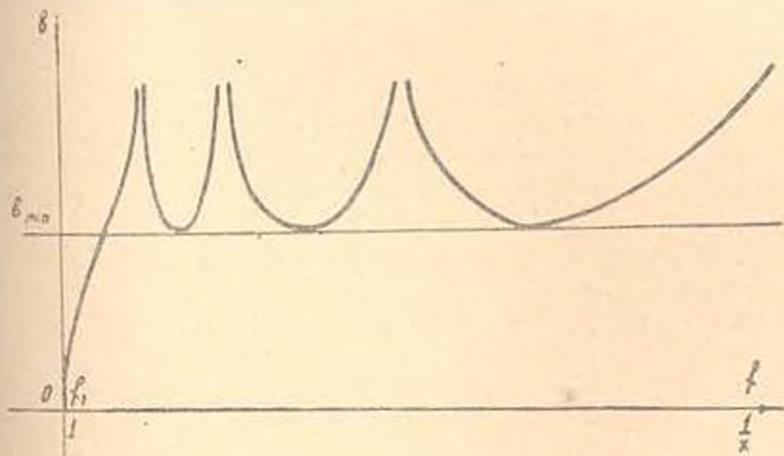


Рис. 6.

Фильтр с частотной характеристикой затухания, имеющей в полосе непропускания одинаковые минимумы, число которых равно числу частот бесконечного затухания, обладает чебышевским режимом затухания в полосе непропускания. Возможно, в дальнейшем, данное понятие подвергнется уточнению и расширению, причем в него бу-

дуг включены понятия ограниченного и полного чебышевского режимов. Следует отметить, что функция  $\beta$ , определяя кривую собственного затухания в полосе непропускания фильтра, и то же время характеризует также фазовую меру передачи в полосе прозрачности. Следовательно фазовая характеристика при чебышевской аппроксимации получается нелинейной, что является ее недостатком. Выпрямлению характеристики можно достичь с помощью фазокорректирующих цепей.

Лаборатория электротехники  
АН Армянской ССР

Получено 5.IX.1957 г.

Կ. Ա. ՄԵԼԻԿ-ՎԱՐՏԱՆՅԱՆ

ԻՆՎԵՐՏԻՆԱՆ, ՉԻՔԻՆԻՍԱՆ, ՌԵԿՏԻՎԸ ԷԼԵԿՏՐՈԿԱՆ ՖԻԼՏՐՆԵՐԻ  
ՉՐՈՂԱԲԿՈՒՄԸ ԿՈՏՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Էլեկտրական շղթաների սինթեզի մեթոդները անսխառնորեն կապված են ֆունկցիաների մաստրվածան (այդտեխնիկայի) խնդրի հետ:

Այդ տեսակետից ամենաշարժար մաստրվածան մեթոդ հանդիսանում է ուսու մեծ մասիմատիկոս Չերիշևի մշակած մեթոդը: Չերիշևյան մեթոդը էլեկտրատեխնիկայում մեծ դեր է խաղում ճնորհիվ այն բանի, որ էլեկտրական շղթաների սինթեզը մեծ կիրառում ունի ավտոմատիկայում, տեխնիկանիկայում, ֆիզիկայի հաշվարկման գործում, ինչպես նաև տարբեր հիդրավլիկական ու մեխանիկական կառուցվածքներում:

Հոդվածում արված է ֆիլտրների հաշվարկի մեթոդը, որը հիմնված է Չերիշևյան մաստրվածան վրա: Յուրջ է արված ֆիլտրների հաճախականության բնութագրի ձևի կապը այդտեխնիկայի ֆունկցիայի ստաբիլիտետի հետ հաստատված է, որ մարման ֆունկցիայի միջնաձևերի և մաքսիմումների թիվը, երբ մաստրվածան ֆունկցիան գույք է՝ հախտար է  $\beta$ -ի, իսկ երբ կենտ է՝ հախտար է  $n-1$ -ի:

Հոդվածում արված է նույնպես Չերիշևյան մարման սեմիթի որոշումը էլեկտրական ֆիլտրների համար:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахилезер И. И. Лекция по теории аппроксимации. 1949 г.
2. Ахилезер И. И. Элементы теории эллиптических функций. 1949 г.
3. Босый И. Д. Электрические фильтры. 1955 г.
4. Гарновский И. И. Теоретические основы электропроводной связи. 1956 г.
5. Микеладзе III. Э. Численные методы математического анализа. 1953 г.
6. Чебышев П. Л. Избранные труды. Изд. АН 1955 г.
7. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen 1954.
8. Guillemin E. A. Communication network- II, 1947.
9. Mollé J. H. Filter design data for communication engineers. 1952.