

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. НАЗАРОВ

О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОДОБИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕГО
 ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОИТЕЛЬНЫХ
 КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Сообщение 2

В сообщении 1 были приведены: определение подобия твердых тел, основная теорема о подобии, некоторые следствия из нее, а также примеры, иллюстрирующие изложенное [1].

1. Температурные и усадочные напряжения в подобных телах

Нетрудно установить распределение температуры в теле A' , если задано распределение температуры в теле A , для обеспечения подобия их состояний. Для этого достаточно потребовать, чтобы относительные деформации ε_T и ε_T' , вызванные приращениями температуры Δt и $\Delta t'$ в сходственных точках были подчинены условию

$$\varepsilon_T = \gamma \varepsilon_T' \quad (1)$$

Пусть коэффициенты линейных расширений тел A и A' соответственно равны α_T и α_T' . Тогда будем иметь соответственно

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta t,$$

$$\varepsilon_T' = \alpha_T' \Delta t'.$$

или, учитывая (1) получим

$$\alpha_T' \Delta t' = \gamma \alpha_T \Delta t.$$

Отсюда найдем, что при заданном α_T распределение приращений температуры в теле A' должно подчиняться условию

$$\Delta t' = \gamma \frac{\alpha_T}{\alpha_T'} \Delta t. \quad (2)$$

При этом условии обеспечивается подобие состояний тел A и A' , причем напряжения σ и σ' по-прежнему будут связаны соотношением

$$\sigma' = \beta \sigma. \quad (3)$$

Для обеспечения подобия в распределении напряжений от отно-

сительных усадочных деформаций ε_{yc} и $\varepsilon_{y\tau}$ необходимо, чтобы они также подчинялись условию

$$\varepsilon_{yc} = \gamma \varepsilon_{y\tau}. \quad (4)$$

2. Составные подобные тела

Пусть два различных тела A и B имеют общую поверхность соприкосновения Σ_0 и находятся в равновесии под действием приложенных к ним внешних сил. При отсутствии сил трения, взаимодействие обоих тел A и B выразится распределенными нормальными напряжениями p по поверхности контакта Σ_0 . Если имеет место трение между соприкасающимися поверхностями, то по ним дополнительно возникнут тангенциальные напряжения τ , в общем случае являющиеся некоторой функцией нормального напряжения, т. е. $\tau = f(p)$ [2, 3]. При законе Кулона $f(p) = k$ есть постоянное число. Мы можем, наконец, допустить, что оба тела A и B связаны по их общей границе Σ_0 . Если устранить связи между обоими телами A и B , то по поверхности Σ_0 обоих тел должны быть также определенным образом распределены нормальные и тангенциальные напряжения p и τ в общем случае изменяющиеся во времени по некоторому закону.

Преобразуем тело A в подобное тело A' при заданных масштабных множителях $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ и при соблюдении условий теоремы 1 и ее следствий (1, 2, 3, 4). Осуществим аналогичное же преобразование тела B в тело B' при соблюдении тех же значений масштабных множителей. Тогда во всех сходственных точках обоих тел A' и B' включая и Σ' должны быть приложены нормальные и тангенциальные напряжения $p' = \beta p$ и $\tau' = \beta \tau$, при чем, при трении, $\tau'/\beta = f(p'/\beta)$.*

Смещения точек поверхностей Σ' обоих тел A' и B' отличаются от смещений сходственных точек поверхностей Σ_0 в $\alpha\gamma$ раз. Отсюда следует, что в процессе деформаций тел A' и B' их поверхности Σ' деформируются таким образом, что они постоянно должны соприкасаться между собой, поскольку такое же условие имеет место для поверхностей Σ_0 тел A и B . Следовательно, A и B можем рассматривать как некоторое тело C , а тела A' и B' как тело C' подобное телу C . Из изложенного вытекает, что на тела C и C' распространяется теорема 1 и ее следствия. Мы можем условно записать наш вывод, используя символику алгебры

$$A + B = C,$$

$$A' + B' = C'.$$

Вывод этот распространяется и на систему тел A_1, A_2, \dots, A_n , имеющих между собой общие границы, вдоль которых они взаимодействуют указанными выше способами. Таким образом, в общем случае, мы можем рассмотреть составные подобные тела

* В частности при законе Кулона $k' = k$.

$$A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots = C,$$

$$A'_1 + A'_2 + \dots + A'_i + \dots = C'.$$

при одинаковых, конечно, масштабных множителях для всех тел A_i . Отметим, что в сообщении 1 нами было дано такое определение подобных тел, что под ними можно подразумевать и составные тела. Здесь мы лишь сняли ограничение, наложенное нами на подобные тела, заключающееся в требовании непрерывности изменения механических свойств с изменением координат, для возможности доказательства теоремы 1 по избранному нами пути. В частности, отсюда вытекает, что составные подобные тела могут включать в себе шарнирные, болтовые, нагельные, заклепочные, шпунтовые и другие соединения. Для составных подобных систем подобие их состояний полностью обеспечивается условиями теоремы 1 и ее следствиями (1, 2, 3, 4). Легко это иллюстрировать непосредственно на существующих теориях (см. напр. [4]).

Здесь мы рассмотрим частный пример подобия составного стержня. Пусть тело A представляет собою стержень кольцевого сечения с внутренним радиусом R_1 , наружным радиусом R_2 , причем упругие постоянные его E_1 и ν_1 . В этот стержень вставлен круговой стержень с упругими постоянными E_2 и ν_2 . Таким образом стержень состоит из материалов с различными модулями Юнга E_i и различными коэффициентами Пуассона ν_i . Положим, что этот стержень растянут вдоль своей оси симметрии, принимаемой за ось z , продольными напряжениями α_i , тогда имеем [5]:

$$\alpha_i = \frac{PE_i}{S_E + K_{33}} \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

$$S_E = (R_1^2 E_1 + (R_2^2 - R_1^2) E_2), \quad (8)$$

$$K_{33} = \frac{4\pi (\nu_1 - \nu_2)^2 (R_2^2 - R_1^2) R_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1) (R_2^2 - R_1^2) + (\alpha_2 - \beta_2) R_1^2 + 2\nu_2 R_2^2}; \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 - \beta_1 = \frac{2(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{E_1}; \quad (10)$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = \frac{2(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{E_2}; \quad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{1 + \nu_2}{E_2}. \quad (12)$$

P — осевая сила.

Смещения отдельных точек вдоль оси z и вдоль осей x и y перпендикулярных этой оси равны:

$$u_i = - \frac{v_i x P}{S_E + K_{33}} \cdot v_i = - \frac{v_i y P}{S_E + K_{33}} \cdot v_i = \frac{P \cdot z}{S_E + K_{33}} \quad (13)$$

При преобразованиях подобия имеем

$$P' = \alpha^2 \beta P, E'_i = \frac{\beta}{\gamma} E_i, v'_i = v_i, x' = \alpha x, y' = \alpha y, \\ z' = \alpha z, R'_1 = \alpha R_1, R'_2 = \alpha R_2. \quad (14)$$

Из (8) следует, что

$$S'_E = \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma} S_E, K'_{33} = \frac{\alpha^2 \beta}{\gamma} K_{33}. \quad (15)$$

Из (7) следует, что

$$z'_i = z_i \cdot \frac{(\alpha^2 \beta) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)}{\alpha^2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)} = \beta z_i. \quad (16)$$

Из (13), например, для u_i следует

$$u'_i = u_i \frac{(\alpha) \cdot (\alpha^2 \beta)}{\alpha^2 \beta} = \alpha \gamma u_i, \quad (17)$$

что находится в полном соответствии с изложенным выше выводом.

3. Контактная задача для подобных тел

Случай контакта тел A и B по общей совмещающейся границе Σ_0 был только что рассмотрен. Здесь разбираем случай, когда тела соприкасаются в отдельных точках или по очень малым площадкам, в результате чего по мере возрастания сил взаимодействия площадка контакта *возрастет*. Таким образом размеры площадок контакта и распределение напряжений по этим площадкам находятся в зависимости от действующих на тела A и B сил. При преобразовании тел A и B в подобные тела A' и B' мы должны потребовать, чтобы площадки контакта были бы подобны в сходственные моменты времени t и $t' = \alpha t$ и при сходственных силах. Сохранение геометрического подобия между телами A и B с одной стороны, и A' и B' с другой стороны, в процессе деформации, возможно лишь при условии $\gamma = 1$ (следствие 8 теоремы 1). Преобразуя теперь тела A и B в тела A' и B' вместе с их нагрузками при заданных α, β, γ и повторяя те же рассуждения, что и в пункте 2 о распределении напряжений и перемещений в зоне контакта, мы придем к выводу о возможности обеспечения подобия состояний обоих тел при условии $\gamma = 1$ и соблюдении теоремы 1 и ее следствий (1, 2, 3, 4)⁴.

⁴ Исследование показывает, что при соблюдении некоторого специального условия в зоне контакта, ограничение $\gamma = 1$ можно снять.

Здесь мы не останавливаемся на вопросе о возможности дополнительного влияния микроструктуры поверхностей в зоне контакта на распределение напряжений [6]. Отметим лишь, что подобие состояний можно обеспечить и в этом случае при требовании, чтобы шероховатость тел A' и B' отличалась также в 3 раз от шероховатостей тел A и B в зоне контакта.

Как следует из предыдущего пункта, при наличии одинакового коэффициента трения между подобными парами тел (A, B) и (A', B') , подобие состояний не нарушается.

Пример. Пусть два сферических тела, радиусы конх R_1 и R_2 , и упругие постоянные соответственно E_1, ν_1 и E_2, ν_2 прижимаются друг к другу силой P нормальной к поверхности их соприкосновения. Относительное сближение обоих тел обозначим через δ , а радиус площадки контакта, ограниченной в данном случае кругом, обозначим через a . Тогда имеем [7]

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P (k_1 + k_2) R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (18)$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2 (k_1 + k_2)^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}, \quad (19)$$

где $k_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}$, $k_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$. (20)

Наибольшее давление p_0 , имеющее место в центре контакта, равно

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь два сферических тела радиусы конх $R'_1 = \alpha R_1$ и $R'_2 = \alpha R_2$ и упругие постоянные соответственно $E'_1 = \beta E_1$, $\nu'_1 = \nu_1$.

Пусть оба тела прижимаются друг к другу силой $P' = \alpha^2 \beta P$.

Легко установить, что

$$k'_1 = \frac{k_1}{\beta}, \quad k'_2 = \frac{k_2}{\beta}, \quad (22)$$

$$a' = a \sqrt[3]{\frac{(\alpha^2 \beta) \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right) \cdot \alpha^2}{\alpha}} = \alpha a, \quad (23)$$

$$\delta' = \delta \sqrt[3]{\frac{(\alpha^2 \beta)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \cdot \alpha}{\alpha^2}} = \alpha \delta, \quad (24)$$

$$\text{и } p'_0 = \frac{3P'}{2\pi a'^2} = \beta p_0. \quad (25)$$

Полученные результаты находятся в соответствии с изложенным выше.

4 Теорема 2 (об устойчивости подобных тел)

Пусть тело A при некотором значении внешних распределенных сил напряженностью $\sigma_{кр}$ вышло из состояния устойчивого равновесия и приняло новую конфигурацию, отвечающую новой форме равновесия, для возможности уравнивания внешних сил силами внутренними. Мы видим на основании следствия 8 теоремы 1, что для обеспечения подобия состояний тел A и A' в данном случае необходимо, чтобы они и в деформированном состоянии сохраняли геометрическое подобие, т. е. должно быть поставлено требование о равенстве масштабного множителя для деформаций единице ($\gamma = 1$). Если теперь тело A , принявшее новую конфигурацию, расцель на элементы и эти элементы преобразовать при некоторых значениях α, β, γ при $\gamma = 1$ и преобразованные элементы собрать в том же порядке, то получим тело A' , геометрически подобное телу A и находящееся под действием внешних распределенных сил напряженностью $\sigma' = \beta \sigma_{кр}$. Покажем, что нагрузка σ' является критической для тела A' , т. е. $\sigma_{кр} = \sigma'$. Известно, что критическое состояние характеризуется равенством работы внешних сил приращению энергии деформации при переходе в новую форму равновесия.

Из следствия 9 теоремы 1 вытекает, что работы внешних и внутренних сил для тела A' отличаются в $\alpha^2 \beta$ раз по сравнению с телом A . Следовательно энергетический критерий устойчивости имеет место и для тела A' . Поэтому действительно должно быть $\sigma_{кр} = \beta \sigma_{кр}$.

Итак, если на тело A действуют внешние силы $\sigma_{кр}, q_{кр}, P_{кр}$ и $M_{кр}$, вызвавшие его критическое состояние, то тело A' на основании следствия теоремы 1 также будет в критическом состоянии при

$$\begin{aligned} \sigma_{кр} &= \beta \sigma_{кр}, \quad q_{кр} = \alpha \beta q_{кр}, \\ P_{кр} &= \alpha^2 \beta P_{кр}, \quad M_{кр} = \alpha^2 \beta M_{кр}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пример. Для бруса A постоянного сечения с шарнирно-закрепленными концами имеем:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}. \quad (27)$$

Тогда для бруса A' получим:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E' J}{l'^2},$$

где $E' = \beta E$, $J = \alpha^4 J$, $l' = \alpha l$.

Подставляя эти значения в формулу (26) получим:

$$P_{кр} = \alpha^2 \beta P_{кр}, \quad (28)$$

что находится в соответствии с доказанным выше.

Изложенный здесь критерий устойчивости годен для любых подобных тел при $\gamma = 1$ (при любых соотношениях между деформациями и напряжениями, при ползучести и старении) т. е. обладает большой

общностью. Для некоторых частных случаев этот критерий известен [8, 9]*.

5. Теорема 3 (о трещинообразовании в подобных телах)

Рассмотрим два подобных хрупких тела A и A' при некоторых значениях α , β , γ и τ и несущих распределенные нагрузки Q и Q' в соответствии с условиями теоремы 1 и ее следствий.

Если в теле A в какой-либо точке при *данном* напряженном состоянии предел прочности материала равен R_n , при котором начинается разрушение в этой точке, то в сходственной точке тела A' при подобном напряженном состоянии $\sigma' = \beta\sigma$ предел прочности материала равен $R'_n = \beta R_n$.

Пусть теперь нагрузка Q постепенно возрастает и при достижении ею значения $Q = Q_1$ в некоторой точке тела A достигнуто предельное напряженное состояние R_1 . При постепенном росте нагрузки Q' , приложенной к телу A' и достижении ею значения $Q' = Q_1 - \beta Q_1$ в сходственной точке a' также будет достигнуто предельное напряженное состояние $R'_n = \beta R_n$. Теперь, при дальнейшем приращении нагрузок на величины соответственно $\Delta Q'$ и $\Delta Q_1 = \beta \Delta Q_1$, где ΔQ_1 очень малая величина, возможны два случая. Первый случай заключается в том, что тело A разрушается полностью. В этом случае должно полностью разрушиться и тело A' в силу однозначного их соответствия. В этом можно убедиться также доказательством от противного, которое мы применяли выше.

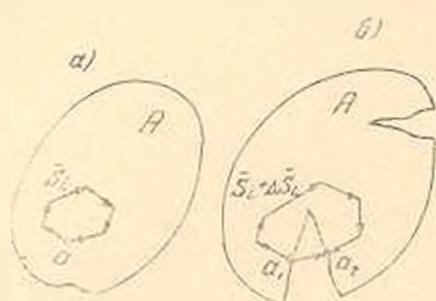
Рассмотрим теперь второй случай. Пусть тело A при нагрузке $Q_1 + \Delta Q_1$ дало трещину, проходящую через точку a в каком-либо направлении и заканчивающуюся в точке b . Тогда и тело A' при нагрузке $Q_1 + \Delta Q_1$ даст трещину, проходящую через сходственную точку a' в сходственном направлении и которая должна заканчиваться в точке b' в силу все той же однозначности соответствий тел A и A' .

Давая дальнейшие приращения нагрузок ΔQ_2 , ΔQ_3 , ... на тело A и соответственно $\Delta Q'_2 = \beta \Delta Q_2$, $\Delta Q'_3 = \beta \Delta Q_3$ на тело A' , мы убедимся, что трещины в телах A и A' должны расположиться подобным образом.

Установим теперь соответствия в ширинах раскрытия трещины в телах A и A' . Пусть какая-либо точка a тела A , лежащая на пути прохождения трещины раскололась на точки a_1 и a_2 , оставшиеся на противоположных берегах трещины (фиг. 1а и 1б).

Проведем через точку a замкнутую ломаную линию, состоящую из малых направленных отрезков s_i , расположенную таким образом, что она пересекает только одну трещину (ср. фиг. 1а, б). Фиг. 1а, представляет тело, к началу загрузки; фиг. 1б представляет тело, которое было загружено и в ней появились трещины. В состоянии (а) очевидно, что

* В силу однозначности соответствий между телами A и A' при $\tau = 1$, к условию (2б) приводят и другие критерии устойчивости.



Фиг. 1.

$$\sum s_i = 0. \quad (29)$$

После приложения нагрузки, развития деформации и возникновения трещины, каждый элементарный направленный отрезок s_i получил приращение Δs_i . В силу возникновения трещины, теперь геометрическая сумма новых векторов $s_i + \Delta s_i$ должна быть равна

$$\sum (s_i + \Delta s_i) = \overline{a_1 a_2}. \quad (30)$$

Имея ввиду (29) получим

$$\sum \Delta s_i = \overline{a_1 a_2}. \quad (31)$$

Проведем теперь сходственную ломаную со сторонами

$$\overline{s_i} = \lambda \overline{s_i} \quad (32)$$

в теле A' . После деформаций и возникновения трещины в теле A' , в соответствии с теоремой 1, приращения векторов $\overline{s_i}$ будут равны

$$\Delta \overline{s_i} = \lambda \gamma \Delta s_i. \quad (33)$$

Геометрическая сумма векторов $\overline{s_i} + \Delta \overline{s_i}$ должна равняться ширине раскрытия трещины в сходственной точке a' равная $\overline{a'_1 a'_2}$. Таким образом

$$\sum (\overline{s_i} + \Delta \overline{s_i}) = \overline{a'_1 a'_2}.$$

Учитывая (29), (31), (32) и (33) получим, что

$$\overline{a'_1 a'_2} = \lambda \gamma \overline{a_1 a_2}. \quad (34)$$

Итак, мы доказали следующую теорему: при выполнении условий теоремы 1 и ее следствий (1, 2, 3, 4), трещины в подобных телах располагаются подобно, причем ширины раскрытия трещин в теле A' отличаются от ширины раскрытия трещин в теле A в $\lambda \gamma$ раз.

Пример. В качестве примера приведем результаты теории трещинообразования у железобетонных балок, данную В. М. Мурашовым [10, 11].

Пусть тело A представляет железобетонную балку. Тогда расстояние $l_{тр}$ между ближайшими трещинами определяется по формуле

$$l_{тр} = \tau_{тр} n_p \frac{d}{4} \frac{R_p}{\sigma_{ср}} \quad (35)$$

Здесь

$$\tau_{тр} = \frac{W_{ср}}{W_n n_p} - 1, \quad n_p = \frac{E_s}{E_b (1 - \epsilon_p)}$$

$$W_{1p} = \frac{M_{1p}}{\sigma_{11}}, \quad W_2 = \frac{M_2}{\sigma_2}. \quad (36)$$

M_{1p} — момент внутренних (или внешних) сил относительно моментной точки, расположенной в сжатой зоне сечения;

M_2 — то же, после появления трещин;

σ_{11} — напряжение в крайнем волокне растянутой зоны бетона;

σ_2 — напряжение в растянутой арматуре;

E_2 — модуль упругости арматуры;

E_0 — модуль упругости бетона;

$\mu_p = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_2}$ — коэффициент пластичности при растяжении;

R_p — предел прочности бетона при растяжении;

τ_{cn} — предел прочности сцепления арматуры с бетоном;

ω — коэффициент полноты эпоксы сцепления.

Для балки A' соответственно имеем

$$l_{1p}' = \psi_{1p}' n_p' \frac{d'}{4} \tau_{cn}', \quad (37)$$

где
$$\psi_{1p}' = \frac{W_{1p}'}{W_2 n_p} - 1 = \psi_{1p}.$$

$$n_p' = n_p, \quad \omega' = \omega, \quad (38)$$

$$W_{1p}' = \alpha^3 W_{1p}, \quad \tau_{cn}' = \beta \tau_{cn},$$

$$W_2' = \alpha^3 W_2, \quad R_p' = \beta R_p,$$

$$d' = \alpha d.$$

Подставляя все эти значения в (37), найдем

$$l_{1p}' = \alpha l_{1p}, \quad (39)$$

т. е. действительно имеет место подобие в расположении трещин в балках A и A' .

Ширина раскрытия трещины для балки A определяется формулой

$$a_{1p} = \psi_{1p} \frac{\sigma_p}{E_s} l_{1p}. \quad (40)$$

где

$$\psi_{1p} = \left(\psi - \omega_1 n_p \frac{\sigma_p}{\sigma_2} \right), \quad (41)$$

$$\psi = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_2}. \quad (42)$$

σ_p — средняя деформация арматуры.

ϵ_2 — деформация арматуры.

Ширина раскрытия трещины для балки A' определяется формулой

$$a_{1p}' = \psi_{1p}' \frac{\sigma_p'}{E_s'} l_{1p}'. \quad (43)$$

где

$$\psi_{тр} = \psi_{тр}, \quad \sigma_2 = \beta \sigma_2, \quad E_2 = \frac{\beta}{\gamma} E_2, \quad l_{тр} = \alpha l_{тр}. \quad (44)$$

Подставляя эти значения в (43) получим

$$a_{тр} = \alpha \gamma a_{тр}. \quad (45)$$

что находится в соответствии с доказанной теоремой.

6. Подобие предельных состояний

Изложенное выше дает основание заключить, что для подобных тел, при статическом нагружении по любому закону, удается обеспечить подобие предельных состояний по несущей способности, по деформации и по трещинообразованию (12, 13). Для этого необходимо, в конечном итоге, соблюсти условия основной теоремы и ее следствий (1, 2, 3, 4) при дополнительном требовании $\gamma = 1$ в случае рассмотрения контактной задачи или задачи об устойчивости.

Практическая реализация такой возможности приведет к тем лучшим результатам, чем точнее соотношение между оригиналом и моделью будет приближаться к соотношению между подобными телами в соответствии с их определением.

Как правило, требуется преодоление больших трудностей в технологии изготовления моделей и в технике экспериментирования для достижения удовлетворительных результатов, т. е. получения возможности достаточно точного переноса с языка модели на язык оригинала.

Нам представляется естественным следующий путь. Вначале надо добиться достаточно точного подобия между отдельными элементами оригинала и модели, а потом уже строить модель любой сложности.

Например, если путем подходящего подбора материала и технологии сможем изготовить модель кладки, достаточно точно отражающую прочностные и деформативные свойства натуральной кладки, в смысле осуществления подобия твердых тел, то с помощью этой модели кладки можем построить модель сооружения любой сложности (напр. здания), испытание которого даст достаточно удовлетворительную информацию о поведении соответствующего сооружения и натуре.

Следует также иметь ввиду трудности моделирования сил тяжести. Наиболее совершенный путь — это исследование моделей на центрифуге (14, 15).

Можно, однако, в ряде случаев осуществлять приближенное моделирование объемных сил, достаточно точное для практики. Затронутые здесь вопросы требуют специального изучения и мы к ним вернемся.

7. Дополнительное замечание

Анализ размерностей применительно к задачам механики приводит к требованию о независимости трех механических величины. За такие, например, применительно к твердым телам мы можем принять длину, напряжение и время. Все остальные механические величины можно выразить через эти три величины. Им отвечают множители подобия α , β и γ . Применение нашего способа анализа подобия состояний привело к возможности получения четвертой независимой величины — относительной деформации, которой мы присвоили независимый множитель подобия δ . Таким образом мы пришли к четырем независимым множителям подобия, что допускает к рассмотрению более широкую область подобия состояний механических систем. Некоторая дополнительная свобода сохраняется для тел в пределах закона Гука, даже при $\beta = \gamma$, т. е. когда $E' = E$. Действительно, при этом мы имеем тривиальный случай $\varepsilon' = \beta\varepsilon$, $\sigma' = \beta\sigma$, когда прямолинейная зависимость между ε и σ аффинно преобразуется сама на себя при множителе β . Поскольку относительная деформация ε является величиной отличенной, то согласно требованию II-теоремы [16], она должна быть одинаковой для всех подобных тел, т. е. $\beta = 1$. Расхождение между нашими результатами и II-теоремой находит свое простое объяснение.

Большое количество задач о твердых телах позволяет ограничиваться рассмотрением малых перемещений, при которых изменение конфигурации тела не имеет значения. В этих случаях можно ввести два различных множителя подобия для размеров тела и для его перемещений, *несмотря на их одинаковую размерность*. При принятой нами системе обозначений эти множители подобия суть α и $\alpha\gamma$. В тех случаях, когда имеет значение для описания состояний твердых тел изменение их конфигурации в процессе деформаций, как это, например, имело место при разборе вопроса о точечном контакте тел или устойчивости, то мы бывали вынуждены принимать $\beta = 1$, что равносильно требованию сохранения геометрического подобия тел в процессе деформации. При соблюдении этого условия мы уже не выходим за пределы II-теоремы.

В последующем сообщении предполагаем подробнее остановиться на ряде моментов, связанных с подобием состояний твердых тел, протекающих во времени.

Институт стройматериалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР.

Поступило 11.XI.1957.

Ա. Գ. ԿԱԶՄՈՒՄ

ՊՐԻՆԿԻՍՍԻՍՆԵՐԻ ՄԵՆԱԼԵԿԱԿԱՆ ԿՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇՆՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒՅԵԿՆԵՐԻ ՈՒ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔՆԵՐԻ ԱՆՅՈՒՄԱԿՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱ ԿՐՈՒՄՈՒՄ, ՍԱՍՆՆ

Երկրորդ նստաբաժնի

Ա մ փ ո փ ո մ

Այս թեմային վերաբերող առաջին հաղորդագրության մեջ բերված էին՝ պիճոյ մարմինների նմանության սահմանումը, նմանության վերաբերյալ հիմնական թեորեմը, վերջինիցս բխող մի քանի հետևություններ, ինչպես և շարադրված նյութը պարզաբանող սրինակներ:

Առաջ աշխատանքը, հանդիսանալով առաջին հաղորդագրության շարունակությունը, իր մեջ շոշափում է նման մարմիններին վերաբերող մի քանի այլ թեորեմներ:

Ջերմային և կծկումային լարվածությունները նման մարմիններում: Որպեսզի A և A' մարմինների համար տրված ջերմային պայմաններում նմանության գրեճակը պահպանվի, ապա տվյալ մարմինների հարաբերական զեֆորմացիաները պետք է բախարարին (1) բանաձևին: Այդ զեպքում լարվածությունները կապված կլինեն (2) նարադրության, իսկ լարվածության բաշխումը կծկումային պայմանից ելնելով պետք է բախարարի (3) բանաձևին:

Բաղակցված նման մարմիններ: Դիտված են A ու B և A' ու B' իրար նման բաղակցված մարմինները իրենց համապատասխան Σ_0 և Σ'_0 հպման մակերևակներով, մի զեպքում երբ այդ բաղակցված մարմին մեջ նրանց բաղակցման մակերևակում շփում գոյություն ունի, մյուս զեպքում՝ երբ միայն սակա է նորմալ լարվածությունը:

Վերախոխելով A մարմինը A' նման մարմնի, նախապես արված α , β , γ , ϵ մասշտաբային մեծություններով և նույնությամբ վարվելով B և B' մարմինների նկատմամբ, պաշտպանելով առաջին թեորեմի պայմանները կարելի է ցույց տալ, որ A ու B և A' ու B' բաղակցված մարմինները կարող են լինել իրար նման մարմիններ՝ հիմքում ունենալով (4) համապատասխան: Այս դրույթը կարելի է ստարածել և այնպիսի մարմինների վրա, որոնք բաղակցված են մի քանի մարմիններից (սես II բանաձևը), ըստ որում բաղակցումը իրականացվում է տարբեր եղանակներով՝ շարժելով, ճեղքաւելն, երիթային, պամային և այլն: Էներյամ մասնավոր սրինակի վրա պարզաբանված է ներկա գրույթի խնդիրները:

Կոնասակային ինդիկսը նման մարմինների համար: Այս թեորեմը նախորդից տարբերվում է նրանով, որ մարմինների կոնասակները՝ հպման մակերևանները վերցվում են կամ որպես կետային շոշում, կամ էլ որպես շախազանց փոքր մակերևաններով հպում: Սակայն կրկնելով նույն դաստգությունը ինչ որ նախորդ պարագրաֆում է, մենք կհասնենք այն բանին, որ (A, B) և (A', B') նման մարմինների մաս կարող ենք ստանալ միասնան պիճակներ: Այստեղ, ինարկի, կոնասակի գոնայում միկրոստրուկտուրայի հնարավոր ազդե-

ցախը լարվածությունը լարվածության վրա չի գիտված: Սակայն այդ հանդա-
մանը իրենից ստանձին բարդություն չի ներկայացնում և այն հարձիչ է
հաշվի առնել, բնականելով, որ A' և B' մարմինների մոտ միկրոստրուկտու-
րությունները տարբերվում են A և B մարմինների մոտ եղածից անգամ:

Գարազրաֆի վերջում բերված է երկու գնդային մարմինների իրար
հպման գեպի վերլուծությունը:

Արկարգ քննիչը (նման մարմինների կայունության մասին): Թող A
մարմինը ինչ որ z_{00} շարվածության զեպում ենթարկվի է զեֆորմա-
ցիայի և դուրս է եկել կայուն հավասարակշռություն միճակից, բնդու-
նելով նոր ձև, այստեղին ուժերին հավասարակշռելու համար: Այդ զեպ-
յում առաջին թևորմի S հետևության հիման վրա A և A' մարմինների
համեմտության ապահովման համար պետք է վերջիններս զեֆորմացիայի են-
թարկվում միճակում պահպանեն իրենց երկրաչափական համեմտությունը:

Անդանելով $z = z_{00}$ ապացուցվում է, որ z' բնույթավածությունը A'
մարմնի համար կրիտիկական է: Առաջին թևորմի 9 հետևությունից
երևում է, որ A' մարմնի համար ներքին և արտաքին ուժերի կոտորած
աշխատանքը A մարմնի նույնանման աշխատանքից տարբերվում և z_{00} ան-
գամ: Հետևաբար, կայունության էներգետիկական չափանիշը տեղի ունի և
 A' մարմնի համար, որի զեպում պետք է լինի $z'_{00} = \beta z_{00}$ հավասարությանը:

Անուհեռան ցույց է արված, որ եթե A մարմնի վրա ազդող z_{00} , q_{00} ,
 β_{00} , M_{00} մեծությունները տվյալ մարմնին բերում են կրիտիկական դրու-
թյան, ապա A' մարմինը կհասնի նույն միճակի: Եթե բախարարվեն (26) հա-
վասարությունները:

Վերջում բերված է ձողի կրիտիկական թևի սակ հաշվման օրինակը:

Արկարգ քննիչը (նման մարմիններում հարառաջացման մասին): Եթե
 A մարմնի մի որևէ l կետում տվյալ շարվածային միճակի նյութի տմրություն
սահմանը R_0 է, որի զեպում այդ կետում սկսվում է քաշքայումը, ապա A'
մարմնի նույնանման l կետում նման $z' = \beta z$ շարվածային միճակում նյութի
տմրություն սահմանը հավասար է $R'_0 = \beta R_0$: Եթե A և A' մարմինների վրա
համապատասխանաբար բնույթավածությունները Q_1 -ից Q_n և Q' -ից
 $Q'_n = \beta Q_n$, ապա հարաբեր է երկու զեպը՝ կամ երկու մարմինների նման կի-
տելում տեղի կունենա քաշքայում, կամ կառաջանան ճաքեր: Ըստ որում ճաքը
 A մարմնում կտարածվի l կետից մինչև h , իսկ A' մարմնում՝ l' -ից h' : Բնու-
նրվածություն հասագա ամիլացումը կնպաստի ճաքերի լայնման մեծացմանը:

Գծադրի $1a$ և $1b$ բերված կատարման միջոցով ապացուցվում է առաջ
քաշված թևերում, այն է՝ առաջին թևորմի պայմանների և նրա 1, 2, 3, 4
հետևությունների պահպանման զեպում նման մարմիններում ճաքերը ա-
րածվում են նույնաբար, ըստ որում A' մարմնում ճաքերի լայնման լայնքը
տարբերվում է A մարմնի ճաքերի լայնման լայնքից β անգամ:

Այս թևորմի կապակցությունը օրինակ է բերված երկաթքառնյա հե-
ծաններում առաջադրող ճաքերի V , W , W առաջոյի տեսության արդյունքներից:

Սահմանային վիճակի նմանությունը: Կախարդում շարվածային թուղ
է ապիս կատարելա հետևյալ եզրակացությունը. նման մարմինների համար,
ստանդարտացնելով կապակցված բնույթով սահմանային զեպում հնարավոր է
լինում ապահովել սահմանային միճակների նմանությունը ըստ կրողակա-
նությունների, ըստ զեֆորմացիայի և ճաքառաջացման: Իրա համար անհրաժեշտ

է պահպանել հիմնական շեղումը և նրա (1, 2, 3, 4) հետևանքների պայմանները մի լրացուցիչ պահանջով, այն է՝ կոնտակտային խնդիրները կամ կայունության խնդիրները դիսկոլիս պետք է ընկալենք $\gamma = 2$:

Այս խնդիրների իրադրմամբ կապված է բազիսկանխն մեծ դժվարությունների հաղթահարման հետ, հատկապես մոդելների պատրաստման անխնայողիվ և պրանց փորձարկման ասպարեզում: Ընդամենը, որքան մոդելի և արդիւնայի հարարկութիւնը մտանում է նման մայրիկների միջև եղած հարարկութիւնը, այնքան ստացված արդյունքները հաջող են լինելու:

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А. Г. Известия АН АрмССР, том X, вып. 5, 1957.
2. Трение и граничная связька, Сб. статей под ред. проф. П. В. Краченского. Изд. иностр. лит., М., 1953.
3. Краченский Н. В., Шедров В. С. Развитие науки о трении (сухое трение). Изд. АН СССР, М., 1956.
4. Ржаницын А. Р. Теория составных стержней строительных конструкций, Стройиздат, М., 1948.
5. Мухомелишвили П. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. четвертое. АН СССР, М., 1954.
6. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, ГТТИ, 1934.
8. Габинювич И. М. Курс строительной механики, часть II, Гос. изд. лит. по строит. и archit. М., 1954.
9. Штаерман И. Я. Вестник инженеров и техников, 1938, № 9.
10. Муратов Е. И. Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона. Машстроиниздат, 1950.
11. Сахловский К. В. Железобетонные конструкции. мол. 7-ое. Гос. изд. лит. по строит. и archit., М.-Л., 1951.
12. Расчет строительных конструкций по предельным состояниям. Под ред. В. М. Келдыша, Гос. изд. строит. литер. М.-Л., 1951.
13. Строительные нормы и правила, часть II, Гос. изд. лит. по Строит. и archit. М., 1954.
14. Давиденков Н. Н. ЖТФ, № 1, 1933.
15. Покровский Г. И. Центробежное моделирование, ОНТИ, 1935.
16. Седов А. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. третье, Гос. изд. техн.-теорет. лит. М., 1954.