

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. Г. НАЗАРОВ

О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОДОБИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ЕГО
ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРОИТЕЛЬНЫХ
КОНСТРУКЦИЙ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Сообщение I

Настоящая работа является развитием идеи, изложенной в [1], позволяющей дать простое, достаточно полное описание условий механического подобия и моделирования твердых деформируемых тел^{*}.

1. Предварительные замечания

Для дальнейшего необходимы следующие исходные предпосылки и определения.

1. Вырежем мысленно из какого-либо напряженного тела, находящегося под нагрузкой, элементарный прямоугольный параллелепипед со сторонами Δx , Δy и Δz . Рассматриваемое элементарное тело находится в равновесии. Нетрудно показать, что если все стороны этого элементарного тела изменить в α раз, при условии сохранения величины компонентов напряжения в сходственных точках, то равновесие не нарушится.

2. При изменении сторон элементарного тела в α раз, при условии сохранения неизменными величины компонентов напряжения, величины компонентов деформации останутся также неизменными.

3. Для каждого материала имеется определенная связь между тензором деформаций (в дальнейшем деформация ε) и тензором напряжений (в дальнейшем напряжение σ).

Эту связь, которую обозначим как $\sigma = F(\varepsilon, x, y, z, t)$, надо понимать как связь между σ и ε в точке x, y, z , в момент времени t в зависимости от истории загрузки тела A в интервале времени от 0 до t^* . Такое „интегральное“ представление о связи между деформацией и напряжением пока достаточно для нашей цели.

4. Два твердых деформируемых тела A и A' мы называем механически подобными в простом смысле, если они удовлетворяют следующим требованиям:

* О современном состоянии вопроса см., например, статью Гудинера „Анализ размерностей“ [6].

** Под F можем подразумевать и систему функций, преобразующих тензор ε в тензор σ при любых условиях загрузки и разгрузки. Вязкость тела пока не рассматривается.

а) тела A и A' геометрически подобны (линейные размеры тела A' отличаются в α раз от сходственных размеров тела A);

б) соотношение между напряжением и деформацией в сходственных точках обоих тел одинаково*;

в) плотности ρ обоих тел в сходственных точках одинаковы.

Из определения б) можно установить, что прочности обоих тел в сходственных точках также одинаковы. В дальнейшем, для сокращения, будем говорить о телах A и A' удовлетворяющих перечисленным условиям, что между ними имеется простое подобие.

5. Для твердых деформируемых тела мы называем механически подобными в расширенном смысле, если они удовлетворяют следующим требованиям:

а) тела A и A' геометрически подобны (линейные размеры тела A' отличаются в α раз от сходственных линейных размеров тела A);

б) в сходственных точках тел A и A' имеют место соответственно следующие соотношения между деформацией и напряжением:

$$\sigma = F(\epsilon, x, y, z, t),$$

$$\frac{\sigma'}{\beta} = F\left(\frac{\epsilon'}{\gamma}, \frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\alpha}, \frac{z'}{\alpha}, \frac{t'}{\eta}\right), \quad (1)$$

то есть множитель подобия для деформаций равен γ , для напряжений — β и для времен — η ;

в) плотности обоих тел в сходственных точках подчинены условию $\rho' = \delta\rho$, $\delta = \text{const}$.

Из определения б) можно установить, что прочности тел A и A' отличаются в β раз.

В частности, если тела A и A' изотропны и упруги, то соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона их связаны соотношением**.

$$E' = \frac{\beta}{\gamma} E, \quad G' = \frac{\beta}{\gamma} G, \quad \nu' = \nu. \quad (2)$$

Для сокращения будем говорить о телах A и A' , удовлетворяющих перечисленным условиям, что между ними имеется подобие. Простое подобие является частным, но важным случаем подобия при $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$.

Тела A и A' находятся в подобном состоянии, если механические величины в их сходственных точках отличаются между собою постоянными множителями.

Мы будем считать пока для определенности, что подобные тела не подвергались в прошлом механическим воздействиям.

* На так называемом факторе масштабности в будущем остановимся особо.

** Условимся и в дальнейшем физические величины для тел A и A' обозначать соответственно одинаковыми буквами, отличающимися индексом штрих.

Далее, если материалы тел A и A' стареют [2], то есть соотношения между деформацией и напряжением в материале меняются со временем даже при отсутствии нагружения, будем полагать для удобства, что тела A и A' изготовлены одновременно. Ясно, что сходственные возрасты обоих тел должны быть соответственно равны t и $t' = \eta t$ для обеспечения условий (1). При $\eta = 1$ старение происходит с одинаковой скоростью для обоих тел.

Приведенные выше условия допускают к рассмотрению разнообразных подобных тел. Они могут быть упругими, упругопластическими, хрупкими, однородными, неоднородными, изотропными и анизотропными, причем в произвольных допустимых сочетаниях, лишь бы в их сходственных точках выполнялись условия б) и в).

2. Теорема 1 (основная)

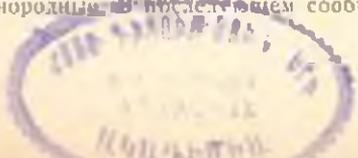
Пусть тело A в момент времени $t = 0$ нагружено по поверхности Σ какой-либо нагрузкой, напряженность которой можем также как и напряжение, без ущерба для точности изложения, обозначить через σ . Рассмотрим теперь момент времени t , к которому произошло какое-то старение материала тела A , а также имела место деформация, зависящая от времени (ползучесть, пластичность, усадка).

Рассечем мысленно в этот момент времени тело A системой плоскостей, параллельных осями x , y и z , на элементарные прямоугольные параллелепипеды. Для сокращения их назовем элементами. В общем случае элементы, прилегающие к поверхности Σ тела будут с ущербом. Их можно мысленно отбросить и принять, что поверхность Σ ступенчатая и нагрузку передавать непосредственно на целые элементы. От этого напряженное и деформированное состояние тела практически не изменяется.

Все шесть граней выделенных элементов находятся под воздействием напряжений, а элементы определенным образом деформированы*. Увеличим стороны элементов в α раз, сохраняя величины напряжений. При этом, как было указано в предварительных замечаниях, распределение напряжений, а также величины деформаций остаются неизменными.

Укладывая преобразованные элементы в том же порядке, как и в теле A , мы получим тело A' с поверхностью Σ' , геометрически подобное телу A , к которой приложены распределенные силы той же напряженности, что и в сходственных точках тела A . При этом напряжения и деформации в сходственных точках обоих тел будут одинаковыми. Эта теорема впервые была доказана для упругих тел иным путем В. Л. Кирпичевым еще в прошлом столетии [3].

* Если тело A неоднородно, будем подразумевать, что неоднородность его изменяется непрерывно с изменением координат. Поэтому элементы могут рассматриваться как тела однородные. В последующем сообщении это ограничение снимем.



Из хода доказательства видно, что можно снять ограничение о одновременном приложении внешней нагрузки. Действительно, допустим, что внешняя нагрузка, приложенная к поверхности тела Σ меняется по какому-либо закону, причем динамическим эффектом, то есть силами инерции можно пренебречь. Мы видим, что в силу простого подобия, элементы тел A и A' изменяют свои напряженные и деформативные состояния одинаковым образом и с одинаковой скоростью, причем в равные моменты времени в сходственных точках поверхностей Σ и Σ' должны действовать нагрузки одинаковой напряженности.

Нетрудно также убедиться, что если условия загрузки тела A приводят к однозначному распределению напряжений и деформаций в нем, то такое же распределение будет и для тела A' . Действительно, допустим обратное. Положим, что в теле A' имеет место распределение напряжений и деформаций, отличное от таковых в сходственных точках тела A . Тогда рассекая тело A' на элементы и изменяя их стороны в $1/2$ раз без изменения напряжений и деформаций и снова их собирая, мы получим тело A , которое окажется в другом напряженном и деформированном состоянии под действием тех же внешних сил, что противоречит условию однозначности, из которой мы исходили.

До сих пор мы имели дело лишь с поверхностными силами. Спрашивается, каковы должны быть соотношения объемных сил \bar{K} и \bar{K}' тел A и A' для обеспечения подобия их состояний.

Проведем в телах A и A' подобно расположенные плоскости перпендикулярные, скажем, к сходственным осям z и z' через равные интервалы Δz и $\Delta z' = \sigma \Delta z$. Обозначим эти плоскости для тела A через $\Sigma(z_1), \Sigma(z_2), \dots, \Sigma(z_l) = \Sigma(z_{l-1} + \Delta z) \dots$

Для тела A' соответственные сходственные плоскости будут $\Sigma'(z'_1), \Sigma'(z'_2), \dots, \Sigma'(z'_l) = \Sigma'(z'_{l-1} + \Delta z') \dots$

Рассмотрим сначала слой в теле A , ограниченный плоскостями $\Sigma(z_{l-1})$ и $\Sigma(z_l)$. Объемные силы, ограниченные этими двумя поверхностями, можем приближенно заменить поверхностными силами, приложенными к одной из ограничивающих плоскостей, скажем к плоскости $\Sigma(z_{l-1})$. Напряженность полученных таким образом поверхностных сил равна $K\Delta z$.

Проведя аналогичную операцию для тела A' найдем эквивалентную поверхностную нагрузку по плоскости $\Sigma'(z'_{l-1})$ равную $K'\Delta z'$. Для обеспечения подобия состояний тел A и A' , то есть равенства напряжений и деформаций в сходственных точках, как это только что было доказано, напряженности поверхностных сил должны быть одинаковыми.

Следовательно должно быть

$$K'\Delta z' = K\Delta z.$$

Учитывая, что $\Delta z' = \alpha \Delta z$, найдем

$$\bar{K}' = \frac{1}{\alpha} \bar{K}. \quad (3)$$

Итак, для обеспечения подобия состояний в случае простого подобия, объемные силы должны быть обратно пропорциональными линейным размерам тел A и A' .

Приведенная методика замены объемных сил поверхностными может быть реализована на практике для приближенного моделирования.

Теперь сравним линейные смещения сходственных точек тел A и A' , причем для удобства исключаем возможность движения тела как твердого целого. В таком случае существует хотя бы одна точка a этого тела, которая не имеет поступательных перемещений относительно трех взаимно перпендикулярных осей и, кроме того, окрестность этой точки не вращается относительно тех же осей. Пусть некоторая точка b в теле A в процессе деформации, в момент t , перешла в точку b_1 . Тогда вектор смещения точки b есть $\bar{w} = \bar{b}b_1$. Соединим точку a с точкой b какой-либо ломаной, состоящей из достаточного количества элементарных отрезков, расположенных полностью в теле A . В процессе деформации каждый из элементарных отрезков получает некоторый поворот и некоторое относительное удлинение.

В результате деформации ломаная линия ab займет положение ab_1 . В теле A' сходственная ломаная линия $a'b'$ займет сходственное же положение $a'b'_1$.

Поскольку деформации сходственных отрезков тел A и A' одинаковы, а линейные размеры тела A' отличаются в α раз от линейных размеров тела A , то как нетрудно убедиться, и смещение точки b' будет отличаться α раз от смещения точки b (причем направления их одинаковы).

Теперь окончательно можем сформулировать теорему подобия для случая простого подобия тел A и A' .

Если к двум телам A и A' , подобным в простом смысле, одинаковым способом закрепленным, одновременно приложены в сходственных точках поверхностные силы одинаковой напряженности, изменяющиеся с одинаковой скоростью и приложены объемные силы обратно пропорциональные линейным размерам тел, также изменяющиеся с одинаковой скоростью, то напряжения и деформации в сходственных точках обоих тел совпадают, а смещения относятся как линейные размеры этих тел.

Нетрудно развить теперь содержание этой теоремы в применении к подобным телам (в расширенном смысле). Для наглядности рассмотрим сначала три простейших случая.

1) Положим, что при $\beta = 1$, $\eta = 1$ деформация тела A' и γ раз отличается от деформации тела A .

Если теперь мысленно преобразовать тело A в тело A' путем его членения и преобразования элементов, как это делалось в процессе доказательства теоремы, то придем к выводу, что все условия теоремы сохраняются за исключением того, что деформации тела A' будут отличаться от деформаций тела A в сходственных точках в γ раз, а смещения точек тела A' будут отличаться в $\alpha\gamma$ раз.

2) Положим теперь, что при $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ компоненты напряжения тела A' отличаются в β раз от компонентов напряжения тела A .

Если теперь мысленно преобразовать тело A в тело A' путем его членения и преобразования элементов, то придем к выводу, что все условия теоремы сохраняются за исключением того, что напряженность поверхностных сил тела A' будет отличаться в β раз, а объемные силы в $\frac{\beta}{\alpha}$ раз, то есть $\sigma' = \beta\sigma$ и $\bar{K}' = \frac{\beta}{\alpha}\bar{K}$.

3) Положим теперь, что при $\beta = 1$, $\alpha = 1$, скорость протекания деформаций тела A' в γ раз отличается от скорости протекания деформаций тела A . Если теперь мысленно преобразовать тело A в тело A' путем его членения и преобразования элементов, то придем к выводу, что деформации и напряжения одинаковы в сходственные моменты времени t и $t' = \gamma t$, причем скорости нагружения поверхностными и объемными силами также подчиняются этому соотношению.

Мы видим, что все эти случаи независимы друг от друга. Поэтому можем сформулировать следующую основную теорему для общего случая подобия тел A и A' .

Подобные тела A и A' находятся в подобном состоянии в сходственные моменты времени t и $t' = \gamma t$, причем напряжения равны соответственно σ и $\sigma' = \beta\sigma$, деформации равны ε и $\varepsilon' = \gamma\varepsilon$, смещения равны w и $w' = \alpha\gamma w$ при условии, что в моменты времени t и $t' = \gamma t$ напряженности поверхностных сил в сходственных точках равны σ и $\sigma' = \beta\sigma$ и интенсивности объемных сил в сходственных точках равны K и $K' = \frac{\beta}{\alpha}K$.

Соображения об однозначности решения, приведенные выше, сохраняются и для этого случая.

3. Некоторые следствия основной теоремы

Следствие 1. Если тела A и A' имеют начальные напряжения σ_0 и σ'_0 и начальные деформации ε_0 и ε'_0 в моменты t и $t' = \gamma t$, то для подобия их состояний должны быть выполнены условия:

* Из этой теоремы следует, что различные величины: длина и перемещение, имеющие одинаковую размерность L^* , имеют различные множители подобия. Это объясняется тем, что нами введен множитель подобия γ^* для безразмерной величины—деформации.

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \beta \sigma_0 \\ \varepsilon_0 &= \lambda \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Только при выполнении этих условий загрузка тел A и A' по закону, предписанному теоремой, может обеспечить подобие состояний тел.

Теперь мы можем снять ограничение, сделанное выше, заключающееся в том, что подобные тела в прошлом не подвергались механическим воздействиям. Действительно, если тела A и A' в прошлом подвергались загрузке и разгрузке в соответствии с условиями теоремы, то начальные напряжения и деформации будут подчинены условиям (4). Мы можем утверждать также, что технологии изготовления тел A и A' должны быть таковы, чтобы условия (4) были выполнены.

Следствие 2. Погонные силы \bar{q} и \bar{q}' , распределенные вдоль сходственных кривых C и C' на поверхностях Σ и Σ' тел A и A' , должны подчиняться условию

$$\bar{q}' = \alpha \bar{q} \quad (5)$$

для обеспечения подобия состояний.

Действительно, рассмотрим полоску вдоль кривой C тела A шириной Δl . Пусть на этой полоске имеется сплошная нагрузка напряженностью $\frac{q}{\Delta l}$. Тогда, согласно условию теоремы, для обеспечения подобия состояний, тело A' должно быть загружено вдоль кривой C' по полоске $\Delta l' = \alpha \Delta l$ (условие геометрического подобия) нагрузкой напряженностью $\beta \frac{q}{\Delta l}$. Переходя к пределу таким образом, чтобы при $\Delta l \rightarrow 0$, $q = \text{const}$, получим погонные нагрузки для тел A и A' соответственно интенсивностью \bar{q} и $\bar{q}' = \alpha \beta \bar{q}$.

Следствие 3. Сосредоточенные силы \bar{P} и \bar{P}' , приложенные к сходственным точкам тел A и A' должны подчиняться условию

$$\bar{P}' = \alpha^2 \beta \bar{P} \quad (6)$$

для обеспечения подобия состояний тел A и A' .

Действительно, пусть тело A загружено по поверхности на участке малой площади ΔS нагрузкой $P/\Delta S$. Тогда для обеспечения подобия состояний, по сходственной площадке $\Delta S'$ тела A' должна быть приложена нагрузка напряженностью $\beta \frac{P}{\Delta S}$.

Переходя к пределу при постоянстве P и учитывая, что в силу геометрического подобия имеет место $\Delta S' = \alpha^2 \Delta S$, получим (6).

Следствие 4. Сосредоточенные моменты M и M' , приложенные к сходственным точкам тел A и A' , должны подчиняться условию

$$M' = \alpha^2 \beta M \quad (7)$$

для обеспечения подобия состояний тел A и A' .

Пусть к телу A приложена пара сил P и $-P$ с плечом Δl , так что $M = P\Delta l$. Если к телу A' в сходственных точках приложить пару сил $P' = \alpha^2 \beta P$ и $-P' = -\alpha^2 \beta P$, то ее плечо должно быть равно $\Delta l' = \alpha \Delta l$ для обеспечения подобия состояний. Отсюда получим условие (7).

Следствие 5. При обеспечении подобных состояний градиенты величин компонентов напряжений тела A' отличаются от градиентов величин компонентов напряжений тела A в $\frac{\beta}{\alpha}$ раз, а градиенты величин компонентов деформаций тела A' отличаются от градиентов величин компонентов деформаций тела A в $\frac{\beta}{\alpha}$ раз.

Пусть, например, в точках a_1 и a_2 тела A какой-либо компонент напряжений равен σ_1 и σ_2 . В сходственных точках a_1' и a_2' тела A' по условию имеют место компоненты напряжений соответственно $\sigma_1' = \beta \sigma_1$ и $\sigma_2' = \beta \sigma_2$. Скорость изменения напряжений в теле A равна

$$k = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{a_2 - a_1}$$

Скорость изменения напряжения в теле A' равна

$$k' = \frac{\sigma_2' - \sigma_1'}{a_2' - a_1'} = \frac{\beta}{\alpha} k,$$

что и требовалось установить. Аналогичное соотношение имеет место и для деформаций, следует лишь заменить β на γ . При простом подобии градиенты величин напряжений и деформаций обратно пропорциональны линейным размерам тел.

Следствие 6. Если граничные условия для тела A заданы в смещениях w точек поверхности, то для обеспечения подобного состояния необходимо сходственным точкам тела A' сообщить смещения $w' = \alpha \gamma w$.

Для обеспечения заданных смещений точек поверхности тела A , к ней должны быть приложены поверхностные силы определенной напряженности τ . Если приложить поверхностные силы напряженностью $\tau' = \beta \tau$ к телу A' , то обеспечится подобие состояний тел A и A' . Но при этом смещения точек тела A' будут равны $w' = \alpha \gamma w$. Поэтому, если граничные условия для тела A заданы в смещениях w точек поверхности, то заданными смещениями для сходственных точек поверхности тела A' должны быть $w' = \alpha \gamma w$, что и требовалось установить.

Следствие 7. Если граничные условия для тела A заданы частично в напряжениях τ и частично в смещениях w , то в сходствен-

ных точках тела A' должны быть заданы сходственные напряжения $\sigma' = \beta\sigma$ и смещения $\bar{w}' = \alpha\gamma\bar{w}$ для обеспечения подобия состояния тел A и A' .

Следствие 8. Деформированные тела A и A' сохраняют в точности геометрическое подобие лишь при условии $\gamma = 1$.

Действительно, только в этом случае смещения сходственных точек тел A и A' относятся как их линейные размеры. Поэтому, строго говоря, основная теорема при $\gamma \neq 1$ справедлива лишь при малых перемещениях, когда можно практически считать, что геометрическое подобие тел не нарушается и ориентация действующих сил по отношению к телам A и A' практически не изменяется.

При условии $\gamma = 1$ результаты основной теоремы сохраняют свою силу и для больших перемещений, если силы действующие на тела A и A' одинаковым образом изменяют свою ориентацию. Действительно, если пересмотреть вывод основной теоремы, с этой точки зрения, то убедимся, что и в этом случае механические состояния элементов обоих тел неизменно удовлетворяют условиям подобия в процессе деформации.

Следствие 9. Внешние силы, приложенные к телам A и A' , удовлетворяющие условиям основной теоремы, совершают соответственно работы U и $U' = \alpha^2\beta U$.

Рассмотрим, например, работу внешних поверхностных сил. Линейные размеры тела A' $\beta\alpha$ раз отличаются от линейных размеров тела A . Стало быть величины поверхностных сил приложенных к телам A' и A относятся как $\alpha^2\beta$ (следствие 3).

Смещение точек поверхностей A' и A относятся как $\alpha\gamma$. Стало быть работы должны относиться как

$$\alpha^2\beta \cdot \alpha\gamma = \alpha^2\beta\gamma.$$

Доказательство для работ, развиваемых внешними объемными силами, а также силами внутренними, аналогично. Работы, отнесенные к единице объема обоих тел A' и A относятся как $\beta\gamma$.

Следствие 10. Если предельное состояние тела A , выраженное в напряжениях, погонных нагрузках, силах или моментах суть соответственно $\sigma_{пр}$, $q_{пр}$, $P_{пр}$, $M_{пр}$, то предельное состояние тела A' соответственно выразится так:

$$\sigma'_{пр} = \beta\sigma_{пр}, \quad q'_{пр} = \alpha\beta q_{пр}, \quad P'_{пр} = \alpha^2\beta P_{пр}, \quad M'_{пр} = \alpha^2\beta M_{пр}. \quad (8)$$

Действительно, предельное состояние может быть достигнуто в процессе постепенного роста нагрузок и деформаций, то есть оно не выходит за пределы теоремы 1 и следствий 2, 3 и 4. При разрыве сплошности (возникновении трещины) подобие предельных состояний рассмотрим в последующем сообщении. Соотношения (8), при пластических деформациях, и пропорциональном росте внешних сил, могут быть непосредственно установлены из условий предельного равновесия A . А. А. Гвоздева [5].

4. Примеры

1. Теория упругости

Здесь будем рассматривать, для краткости, по одному уравнению каждого типа.

Уравнения равновесия для упругих тел A и A' :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{x'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau'_{x'z'}}{\partial z'} + K'_x = 0.$$

Учитывая, в соответствии с теоремой 1, что $z'_x = \beta z_x$ и т. д. и что $K'_x = \frac{\beta}{\alpha} K_x$, мы убеждаемся, поскольку $x' = \alpha x$, что оба уравнения тождественны.

Уравнения, выражающие зависимость деформаций от напряжений:

$$\varepsilon_x = \frac{z_x - \nu (\sigma'_y + \sigma'_z)}{E},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

и, соответственно

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma'_x - \nu' (\sigma'_y + \sigma'_z)}{E'},$$

$$\varepsilon'_{x'y'} = \frac{\tau'_{x'y'}}{G'}.$$

Подставляя сюда значения $E' = \frac{\beta}{\gamma} E$, $G' = \frac{\beta}{\gamma} G$, $\nu' = \nu$ найдем, что

$$\varepsilon'_x = \gamma \varepsilon_x, \quad \varepsilon'_{x'y'} = \gamma \varepsilon_{xy} \quad (\text{см. [2]}).$$

Уравнения, связывающие деформации с перемещениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

Подставляя сюда значения $u' = \alpha u$, $x' = \alpha x$, найдем

$$\varepsilon'_x = \gamma \varepsilon_x.$$

Граничные условия для случая, когда заданы поверхностные силы

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) = F_{nx}$$

и

$$\sigma'_x \cos(n', x') + \tau'_{x'y'} \cos(n', y') + \tau'_{x'z'} \cos(n', z') = F_{n'x'}.$$

Имея в виду, что

$$\sigma_x = \beta \sigma'_x,$$

$$\tau_{xy} = \beta \tau'_{x'y'},$$

$$\tau_{xz} = \beta \tau'_{x'z'}.$$

и что в силу подобия

$$\cos (n', x') = \cos (n, x),$$

$$\cos (n', y') = \cos (n, y),$$

$$\cos (n', z') = \cos (n, z),$$

найдем, что поверхностные силы должны подчиниться требованию

$$F'_{n'x'} = \beta F_{nx}.$$

Таким образом действительно теорема 1 обеспечивает подобие состояний упругих тел.

2. Техническая теория изгиба балок

Пусть тело A представляет собой балку как-либо закрепленную на опорах при пролете l , ширине b , высоте h и модуле упругости E . Балка загружена по длине погонной нагрузкой q , сосредоточенной силой P и сосредоточенным моментом M .

Пусть характеристика балки A' такова:

$$l' = \alpha l, \quad b' = \alpha b, \quad h' = \alpha h \quad \text{и} \quad E' = \frac{\beta}{\gamma} E.$$

Для обеспечения подобия состояний балок A и A' к балке A' должны быть приложены в сходственных точках нагрузки в соответствии со следствиями 2, 3 и 4:

$$q' = \alpha^2 \beta q, \quad P' = \alpha^2 \beta P \quad \text{и} \quad M' = \alpha^2 \beta M.$$

При этом имеют место следующие соотношения между напряжениями σ и σ' , а также прогибами y и y' балок A и A'

$$\sigma' = \beta \sigma,$$

$$y' = \alpha \gamma y.$$

В частности при шарнирно опертой балке A пролетом l , несущей в середине груз P , имеем

$$M = \frac{Pl}{4}, \quad W = \frac{bh^2}{6}.$$

Напряжение в середине балки

$$\sigma = \frac{M}{W}.$$

Прогиб в середине балки

$$y = \frac{Pl^3}{48 EJ}.$$

Рассмотрим теперь балку A' :

$$M' = \frac{P' l'}{4} = \frac{(\alpha^2 \beta P)(\alpha l)}{4} = \alpha^2 \beta M,$$

$$W' = \frac{b' (h')^2}{6} = \frac{(\alpha b) (\alpha h)^2}{6} = \alpha^3 W,$$

$$a' = \frac{M'}{W'} = \frac{\alpha^3 \beta M}{\alpha^3 W} = \beta a,$$

$$\gamma' = \frac{P' (I')^3}{48 E' J'} = \frac{(\alpha^3 \beta P) (\alpha I)^3}{48 \left(\frac{\beta}{\gamma} E \right) (\alpha^4 J)} = \alpha \gamma.$$

Отсюда становится ясной преимущество зависимости модуля упругости от двух параметров β и γ , так как это позволяет существенно расширить область моделирования упругих тел.

3. Упруго-пластическое кручение стержня круглого сечения

Пусть тело A представляющее собою круглый стержень радиуса a , длиной l находится под действием крутящего момента M .

Тогда касательное напряжение [4]:

$$\tau_r = \begin{cases} \frac{r}{c} \tau_s & \text{при } r \leq c, \\ \tau_s & \text{при } r > c, \end{cases}$$

где r — радиус, $r = c$ — граница, отделяющая упругие деформации от пластических; τ_s — предел текучести.

Скручивающий момент

$$M = M_* \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^3}{a^3} \right),$$

где

$$M_* = \frac{2}{3} \tau_s a^3$$

есть предельный момент.

Угол поворота

$$\varphi = \frac{\tau_s}{G} \frac{l}{c}.$$

Пусть тело A' представляет собою круглый стержень радиуса $a' = \alpha a$ и длиной $l' = \alpha l$, причем для него предел текучести $\tau'_s = \beta \tau_s$.

Покажем, что для обеспечения подобия состояний тел A и A' , следует к A' приложить крутящий момент $M' = \alpha^3 \beta M$ (следствие 4).

Действительно, должно быть

$$\tau'_{r'} = \begin{cases} \frac{r'}{c'} \tau'_s & \text{при } r' \leq c' \\ \tau'_s & \text{при } r' > c' \end{cases}$$

$$M' = M_*' \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c'^3}{a'^3} \right),$$

где

$$M'_0 = \frac{2}{3} \tau'_0 \pi a'^3,$$

$$\varphi' = \frac{\tau'_0}{G'} \frac{l'}{c'}.$$

Подставляя в эти формулы

$$r' = \alpha r; c' = \alpha c; a' = \alpha a; l' = \alpha l; \tau'_0 = 2\tau_0; G' = \frac{\beta}{\gamma} G$$

найдем, что в действительности

$$M' = \alpha^3 M, M'_0 = \alpha^3 M_0 \text{ (следствие 10),}$$

причем зоны распределения пластичности и упругости тел А и А' геометрически подобны и угол кручения

$$\varphi' = \gamma \varphi.$$

Институт стройматериалов и сооружений
 Министерство строительства Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐԱՅԱՆ

ԳԻՆԵՒ ՄԱՐԿՈՎՆԵՐԻ ՄԵԿԱՆԻԿԱԿԱՆ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ
 ԿՈՆՍՏՐԱԿՏԻԱՆԵՐԻ ՈՒ ԿԱՌՈՒՅՎԱՆՔՆԵՐԻ ՍԵՅՄՄԱԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ
 ՄԵՋ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. է. մ.

Հողի մասում զարգացված են [1] եղած խղեաները, որոնք թույլ են ապրիս պինդ և զեֆորմացիայի ենթարկվող մարմինների մեխանիկական նմանության և մոդելացման պայմանների պարզ, բայց և բախարար ու լրիվ նկարագրումը:

Մինչև հիմնական թևորեմայի ապացուցմանը անցնելը, կատարված են նախնական մի քանի գիտողություններ, որտեղ նշվում են էլիմենտար մարմնի հավասարակշռության, լարվածության անհրաժեշտ պայմանները, զեֆորմացիայի տեղերի և լարվածության թինդոսի կապը: Տրված են երկու կոշտ մարմինների մեխանիկական նմանություն, նույնպես և նրանց երկրաչափական նմանությունը ապահովող պորժոնները, որոնք կախված են վերջիններիս մեջ հարաբերած չափերի ու խտությունից, զեֆորմացիայի ու լարվածությունից, ֆիզիկական հատկությունների՝ ինչպես և մասնաձևի ընթացքում զրանց փոփոխման կապից:

Թևորեմայի էությունը մասալորապես հետևյալն է: Մի Ա. մարմին, որը կարող է որոշակի լարվածություն անենալ իր Σ մակերևույթի վրա X, Y, Z հարթություններով, բաժանում ենք էլիմենտար ուղղանկյուն խորանարդների:

Անուհետև, մեծացնելով խորանարդների կողմերը α անգամ, լարվածությունը նրա մակերևույթների վրա, ինչպես և զեֆորմացիոն գիճակը, պահպանում ենք ըստ մեր վազուրք ընդունած պայմանների: Անձացված խորանարդիկները նույն կարգով հավաքելուց հետո ստանում ենք մի նոր մարմին՝ Λ' իր Σ' մակերևույթով: Այս երկու մարմինները նման կետերում կանենան նույնանման լարվածություն և զեֆորմացիա: Այս թեորեման առաջին անգամ առաձգական մարմինների վերաբերյալ ապացուցված է եղել Վ. Լ. Կիրպիչևի կողմից ղևա անցյալ դարում:

Թեորեմայի ապացուցման ընթացքում մյուս գործոններից պատ գիտված է նաև մակերեսային և ծալալային ուժերի գինտովիկ փոփոխման առկալթյան պայմանը, որին հետևում է եզրակացությունը. եթե երկու միանման ամրացում աճեցող նման Λ և Λ' մարմինների միանման կետերում միաժամանակ կիրառվեն նույնաչափ լարվածություն մակերեսային ուժեր, որոնք փոխվում են միանման արագոթյամբ, ինչպես և միանման իրար հալտուար արագոթյամբ փոփոխվող ծալալային ուժեր, որոնք հակադարձ համեմատական են այդ մարմինների գծային չափերին, ապա այս երկու մարմինների նույնանման կետերում եղած զեֆորմացիաները և լարվածությունները կհամընկնեն, իսկ տեղափոխումները կհարաբերեն ինչպես այդ մարմինների գծային չափերը:

Թեորեմայից արված են մի շարք հետևություններ:

Աշխատանքի վերջում օրինակների ձևով գիտված են մի շարք հավասարամեր ստաձղտիանություն տեսություն, հեձանների ծոման տեխնիկական տեսություն, կոլոր հարվածքի ձողի ստաձղտ-պլաստիկական ոլորման ընկալալաներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Г. Назаров. ДАН АрмССР, т. XXV, № 3, 1957.
2. И. Х. Арутюнян. Некоторые вопросы теории ползучести, ГТТИ, М., 1952.
3. В. Л. Кирпичев. О подобии при упругих явлениях. Собр. соч., том I, Издание Совета Петроградского политехн. ин-та, Петроград, 1917.
4. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. ГТТИ, М., 1956.
5. А. А. Гвоздев. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., Стройиздат, 1949.
6. Handbook of Experimental stress Analysis, Edited by M. Hetenyi, sec. prin., New York, London, 1954, Appendix II.