ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա X, № 3, 1957 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

А. К. АНАНЯН

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В ВОДОВОДЕ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ПОТОКА

В настоящей статье мы ограничиваемся рассмотрением одной частной задачи о поперечной циркуляции на повороте водовода треугольного сечения. После решения этой задачи мы получим теоретическую основу, необходимую для решения ряда практических задач, как например: транспортирующая способность циркуляционного потока, потери напора на повороте водовода и т. д. Изложение решения этих задач выходит за пределы настоящей статьи, тем более, что общая теоретическая постановка вопроса о распределении мутности в циркуляционном потоке и о потерях напора на повороте водовода нами была изложена в работах [1—4].

§ 1. Прежде чем перейти к выводу исходных уравнений, пригодных для исследования турбулентного потока на повороте водовода (для любой формы и размеров) необходимо обосновать те оперативные методы, на которых будут построены наши дальнейшие исследования. Это необходимо еще потому, что в современном этапе развития теории турбулентности еще не установлена единая точка зрения об уравнениях турбулентного потока.

Известны следующие уравнения движения сплошной среды, выраженные через напряжения:

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du_x}{dt} &= \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\\
\rho\frac{du_y}{dt} &= \rho Y + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\\
\rho\frac{du_z}{dt} &= \rho Z + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Координатные оси ориентированы следующим образом: x — по направлению течения, z — вертикально вниз, y — перпендикулярно первым двум направлениям.

Присоединяя к этим уравнениям уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad (2)$$

получаем четыре уравнения с девятью неизвестными u_x, u_y, u_z, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{zy}. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, очевидно необходимы дополнительные зависимости, характеризующие свойства турбулентного потока и действующие в нем напряжения. Эти дополнительные зависимости не могут быть найдены только теоритическим путем: их можно получить, в основном, из опыта. Следуя Рейнольдсу и отказавшись от точного воспроизведения картины турбулентного потока, примем, что входящие в уравнения (1) и (2) мгновенные скорости и напряжения складываются из осредненных и пульсационных величин.

Тогда систему уравнений (1) и (2), после осреднения по времени и элементарных преобразований для установившегося движения, можно представить в следующем виде:

$$\rho\left(\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_x}{\partial z}\right)=\rho X+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{p}_{xx}-\overline{\rho u'_x u'_x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{xy}-\overline{\rho u'_x u'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\tau}_{xz}-\overline{\rho u'_x u'_z}\right)$$
$$\rho\left(\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_y}{\partial z}\right)=\rho Y+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{xy}-\overline{\rho u'_x u'_y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{p}_{yy}-\overline{\rho u'_y u'_y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\tau}_{yz}-\overline{\rho u'_y u'_z}\right)$$
$$\rho\left(\bar{u}_x\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)=\rho Z+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{xz}-\overline{\rho u'_x u'_z}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{yz}-\overline{\rho u'_y u'_z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{p}_{zz}-\overline{\rho u'_z u'_z}\right), \tag{3}$$

где черта над буквами обозначает осредненные величины, а штрихом обозначены пульсационные величины.

Из системы уравнений (3) видно, что уравнения турбулентного потока, написанные для средних величин скоростей и давлений, имеют такой же вид, как уравнения Навье—Стокса, с той лишь разницей, что компоненты тензора напряжения увеличены на:

$$\tau'_{xx}=-\overline{\rho u'_x u'_x},\quad \tau'_{xy}=-\overline{\rho u'_x u'_y},\quad \tau'_{xz}=-\overline{\rho u'_x u'_z},$$
$$\tau'_{yy}=-\overline{\rho u'_y u'_y};\quad \tau'_{yz}=-\overline{\rho u'_y u'_z}\ \text{и т. д.}$$

Эти напряжения появляются в результате осреднения членов, выражающих конвективное ускорение, т. е. в результате замены истинного конвективного ускорения осредненным ускорением.

Число неизвестных величин, которые входят в уравнения (3), десять. Три проекции осредненных скоростей, осредненное давление и, наконец, шесть неизвестных турбулентных напряжений. В поисках дополнительных соотношений, связывающих пульсационные скорости с напряжениями, в теории турбулентности развилось два направления. Так называемая „полуэмпирическая“ теория и статистическая теория турбулентности.

Изучение турбулентности для многих задач практики представляется целесообразным только с точки зрения установления для выбранной точки средних характеристических величин, получаемых обычно путем осреднения во времени. Изучая непосредственно осредненные величины, т. е. только средний статистический уровень и лишь учитывая при объяснении явления влияние отбрасываемых пульсаций на осредненные величины, мы получаем, конечно, только приближенное описание явления, схватываем только основные его черты, представляющиеся, однако, на первых этапах исследования наиболее важными для нашей задачи.

Из полученных выше уравнений было видно, что дополнительные турбулентные напряжения появляются лишь при замене реального движения осредненным. Тогда, естественно, появляется мысль об установлении связей между искомыми напряжениями и осредненными элементами потока, который в общем случае можно представить в следующем виде:

$$\tau^{*}_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j} = -\rho\Phi\left(\bar{u}_i, \bar{u}_j, \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}, \frac{\partial^2\bar{u}_i}{\partial x_j^2}, \frac{\partial^2\bar{u}_j}{\partial x_i^2}, \ldots\right) \tag{4}$$

Установить вид функциональной зависимости (4) пока не удается. Поэтому на практике прибегают к различным гипотезам. Наиболее распространенная гипотеза гласит: нельзя ли напряжение (4) выразить, притом линейно, через средние скорости деформации в осредненном движении, т. е. принять, что

$$\tau^{*}_{ij} = (\nu + \rho m_{ij})\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right) = A\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{5}$$

В этом выражении $A(x, y, z)$, в отличие от того, что имеет место при ламинарном движении, является функцией координат. В данном случае гипотетической является не столько зависимость вида (5) сколько принятие того условия, что $A(x, y, z)$ должна являться скалярной функцией координат. Для зоны потока вдали от твердых стенок водовода, где наблюдаются сравнительно малые изменения скоростей, при решении многих практических задач гипотеза о скалярности функции $A(x, y, z)$ оправдывается [4—7].

Зависимость $A(x, y, z)$ обычно называется коэффициентом турбулентной или виртуальной вязкости.

После подстановки значений турбулентных напряжений τ^{*}_{ij} из (5) в (3) и перехода к цилиндрическим координатам получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial R}+\frac{u_\varphi}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}-u_z\frac{\partial u_z}{\partial R}-u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi^2}{R}=\\
&=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial R}-\frac{u_R}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_R}{\partial \varphi^2}-\right.\\
&\left.-\frac{2}{R^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{\rho}\left(2\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_R}{\partial z}\right)\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi}+\frac{u_R}{R}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi}+u_R\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_R u_\varphi}{R}-\\
&-\frac{u_z}{R}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2}+\right.\\
&\left.+\frac{2}{R^2}\frac{\partial u_R}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}\frac{\partial A}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{u_\varphi}{R}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+u_R\frac{\partial u_z}{\partial R}-u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}-u_R\frac{\partial u_R}{\partial z}=\\
&=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_z}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2}\right)+\\
&+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_z}{dR}+2\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right| \qquad (6)$$

где

$$H=U+\frac{p}{\rho}+\frac{(u_\varphi^2+u_z^2+u_R^2)}{2}.$$

К этим уравнениям необходимо присоединить еще следующее уравнение непрерывности:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Ru_R)+\frac{\partial u_\varphi}{R\partial \varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \qquad (7)$$

Число неизвестных, входящих в (6) и (7), пять. Три составляющих скорости, давление и коэффициент турбулентной вязкости. Таким образом, мы видим, что даже принятие условия о скалярности коэффициента турбулентной вязкости не позволяет нам получить замкнутую систему уравнений. Поэтому необходимо искать дополнительно другие зависимости для замыкания системы уравнений (6) и (7). Из числа неизвестных величин наиболее изученными являются продольные скорости. Многочисленные эксперименты дают нам возможность установить общий вид функции распределения продольных скоростей для довольно широкого класса задач практики. Поэтому, в дальнейшем, при определении (в первом приближении) поля скоростей на повороте водовода будем задаваться продольными скоростями до поворота, где имеется вполне установившееся турбулентное движение.

Избранный нами путь замыкания приведенных выше уравнений является не строгим и с точки зрения теории на первый взгляд может оказаться даже не приемлемым, но, будучи убежденными в том, что заданная функция распределения продольных скоростей с ее первыми и вторыми производными очень близка к истинной, то в этих условиях мы можем считать, что результаты решения уравнения (6) и (7) в отношении остальных неизвестных должны привести к правдоподобным результатам. Конечно, при этом не исключается необходимость проверки совпадения окончательных результатов, полученных теоретически с экспериментом.

§ 2. Решение системы уравнений (6) и (7) в общем виде пока не представляется возможным. Поэтому вводим ряд ограничений, что не может чувствительно снизить точность решаемой задачи.

1. Принимаем, что в соответствующих точках всех поперечных сечений изогнутого водовода скорости не меняются, т. е. принимаем движение осесимметричным.

2. Принимаем, что поле продольных скоростей до поворота водовода является известной функцией координат.

После введения этих упрощающих предположений решение системы уравнений (6) и (7) будем искать в виде рядов по степеням малого параметра $\varepsilon = \frac{b}{R}$, где b — линейный размер потока, например, ширина водовода. R — радиус закругления поворота.

$$\left.\begin{aligned} u_{\varphi} &= u_{\varphi_0} + \varepsilon u_{\varphi_1} + \varepsilon^2 u_{\varphi_2} + \varepsilon^3 u_{\varphi_3} + \cdots \\ u_R &= \varepsilon u_{R_1} + \varepsilon^2 u_{R_2} + \varepsilon^3 u_{R_3} + \cdots \\ u_z &= \varepsilon u_{z_1} + \varepsilon^2 u_{z_2} + \varepsilon^3 u_{z_3} + \cdots \\ A &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon^3 A_3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

При помощи этих рядов решение системы уравнений можно получить при приближении. Займемся исследованием системы дифференциальных уравнений в первом приближении, т. е. примем, что продольные скорости на повороте водовода можно выразить в виде следующего ряда

$$u_{\varphi} = u_{\varphi_0} + \varepsilon u_{\varphi_1} + \cdots = u_{\varphi_0} + \frac{c(R, z)}{R} + \cdots \tag{9}$$

где u_{φ_0} — функция распределения продольных скоростей до поворота водовода. $c(R, z)$ — некоторая неизвестная функция координат. R — радиус закругления поворота. Для пологих поворотов R можно заменить радиусом закругления оси поворота т. е. R_0.

Условно примем, что продольные скорости до поворота водовода имеют порядок единицы. Тогда нетрудно показать, что поперечные скоросты u_R и u_z имеют порядок ε. Действительно, раскладывая функцию $u_R\left(\frac{b}{R}, u_{\varphi_0}, R_e\cdots\right)$ и $u_z\left(\frac{b}{R}, u_{\varphi_0}, R_e\cdots\right)$ и их производные в ряд Тейлора в точке $R\to\infty$ получим:

$$u_R\left(\frac{b}{R}, u_{\varphi_0}, R_e\cdots\right)=u_R(0, u_{\varphi_0}, R_e\cdots)+\frac{b}{R}u_R'(0, u_{\varphi_0}, R_e\cdots)+\cdots, \quad (10)$$

$$u_R'\left(\frac{b}{R}, u_{\varphi_0}, R_e\cdots\right)=u_R'(0, u_{\varphi_0}, R_e\cdots)+\frac{b}{R}u_R''(0, u_{\varphi_0}, R_e\cdots)+\cdots, \quad (11)$$

Так как на прямом участке водовода, где $R\to\infty$ поперечные скорости отсутствуют, следовательно будем иметь, что $u_R(0, u_{\varphi_0}, R_0\cdots)=0$ и $u_R'(0, u_{\varphi_0}, R_e\cdots)=0$.

Аналогичным образом мы можем поступить и для скоростей u_z. Из соотношений (10) и (11) мы получаем наш первый основной вывод: Поперечные скорости и их первые производные имеют порядок $\varepsilon\sim\frac{b}{R}$.

Отсюда вытекает, что произведения вида $u_z\frac{\partial u_z}{\partial R}$, $u_z\frac{\partial u_R}{\partial R}$, $u_z\frac{\partial u_z}{\partial R}$ имеют порядок ε^2; $u_\varphi\frac{\partial u_z}{\partial R}=0\left(\frac{b}{R}\right)$; $\frac{u_\varphi^2}{R}=0\left(\frac{b}{R}\right)$ и т. д. Что касается слагаемых $\frac{\partial H}{\partial R}$, $\frac{\partial H}{\partial z}$ и $\frac{\partial H}{R\partial\varphi}$, то они являются конечными величинами. Вторые слагаемые в правых частях уравнения (6) хотя и содержат производные от u_z и u_R, но порядок произведения $\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_R}{\partial R}$ и т. д. получается не выше $\frac{b}{R}$, так как производные от коэффициента турбулентной вязкости имеют порядок не ниже порядка продольных скоростей. И, наконец, из соотношения (9) видно, что $\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}$ и $\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}$ имеют $0\left(\frac{b}{R}\right)$.

Принимая во внимание все эти соотношения из дифференциальных уравнений (6), мы можем отбросить все величины, которые имели порядок выше $\frac{b}{R}$. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial R}-u_\varphi\frac{\partial u_z}{\partial R}-\frac{u_\varphi^2}{R}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_R}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_R}{\partial z^2}\right)+\\&\quad+\frac{1}{\rho}\left(2\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right)\\&\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\varphi}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}\right)+\end{aligned}\right| \quad (12)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi}{R}\frac{\partial A}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial H}{\partial z}-u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)+\\
&+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial R}+2\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial R}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (12)
$$

Из уравнения неразрывности (7) имеем:

$$
u_R=-\frac{1}{R}\frac{\partial F(R,z)}{\partial z},\quad u_z=\frac{1}{R}\frac{\partial F(R,z)}{\partial R}, \qquad (13)
$$

где $F(R, z)$ в дальнейшем будем называть функцией поперечной циркуляции. Из системы уравнений (12) видно, что поле скоростей поперечной циркуляции на повороте водовода с точностью $0\left(\frac{h}{R}\right)$ определяется из первого и третьего уравнений и независимо от второго уравнения. С учетом (13) первое и третье уравнение системы можем представить в следующем виде

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial R}-u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial R}-\frac{u_\varphi^2}{R}=\frac{-A}{\rho}\left(\frac{2}{R^3}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial^3 F}{\partial R^2\partial z}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\partial R}\right)+\frac{1}{\rho}\left(2\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_R}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_z}{\partial R}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial u_R}{\partial z}\right)\\
&\qquad\frac{\partial H}{\partial z}-u_\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}=\frac{A}{\rho}\left(\frac{2}{R^3}\frac{\partial F}{\partial R}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^3 F}{\partial R^3}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{R}\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\partial R}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial R}+2\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial A}{\partial R}\cdot\frac{\partial u_R}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (14)
$$

Продифференцируем первое уравнение системы (14) по z, а второе уравнение по R. После почленного вычитания и ряда преобразований получаем следующие дифференциальные уравнения [2], [8].

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)+\\
&\qquad+4\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial z}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial R\,\partial z}\right)=2\rho u_{\varphi 0}\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (15)
$$

Из второго уравнения системы (6) с учетом (9), (13) и внесенных выше упрощающих предположений нетрудно получить общее дифференциальное уравнение для A. Подставляя (8) во второе уравнение системы (6) после ряда преобразований и отбрасывания величин второго порядка малости получим:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(A\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial R}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial u_{\varphi_0}}{\partial z}\right)=\rho\frac{\partial H}{R\partial\varphi}-gi\rho \tag{16}$$

Анализ этого дифференциального уравнения дан в [9]. Из ур-ния (16) видно, что коэффициент турбулентного перемешивания в первом приближении определяется по заданному полю продольных скоростей до поворота водовода.

Таким образом, при заданном поле продольных скоростей до поворота водовода при помощи уравнений (15) и (13) можем определить, с точностью $O\left(\frac{\delta}{R}\right)$, поле скоростей поперечной циркуляции на повороте водовода. В этом и заключается сущность решения поставленной выше задачи в первом ее приближении. Для нахождения решения той же задачи в последующих приближениях необходимо сохранять в уравнениях (6) величии $O\left(\frac{\delta^2}{R^2}\right)$ и выше. Следует отметить, что для поворотов с большим радиусом закругления уже первое приближение в основном решает задачу и нет нужды в данном случае прибегать к использованию последующих приближений [8—10].

§ 3. Для решения дифференциального уравнения (15) необходимо устанавливать граничные условия. На основании данных многочисленных опытов и теоретических исследований [5, 11] установлено, что при турбулентном движении у пристенного слоя потока образуется тонкая пленка, где турбулентные напряжения настолько малы, что ими можно пренебречь по сравнению с вязкостными напряжениями. Принимаем, что толщина переходной области мала и, что напряжения по ту и другую стороны этой области равны. С точностью $O(\delta)$ указанное выше граничное условие можно представить в следующем виде [2, 8]

$$\left[\frac{A\delta}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}+\frac{\partial F}{\partial n}\left(1-\frac{A\delta}{\mu r_0}\right)\right]\Bigg|_{\Gamma}=0, \tag{17}$$

где A — коэффициент турбулентного перемешивания на границе ламинарной пленки, δ — толщина ламинарной пленки, μ — коэффициент вязкости, r_0 радиус кривизны контура водовода. Для водовода с прямолинейными очертаниями контура очевидно r_0 будет равна бесконечности, поэтому выражение (17) примет следующий вид:

$$\left(\frac{A\delta}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}+\frac{\partial F}{\partial n}\right)\Bigg|_{\Gamma}=0 \tag{18}$$

Для шероховатых водоводов принимаем, что у пристенного слоя ламинарная пленка, а если образуется, то она не сможет играть существенной роли в процессах передачи динамических усилий от потока к стенкам водовода.

Таким образом граничное условие (17) для шероховатых водоводов можно представить в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{19}$$

Второе граничное условие для гладких водоводов выводится из условия равенства скоростей на твердой стенке водовода $\left(\text{т. е. } \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\Gamma} = 0 \right.$ и $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\Gamma} = 0$, что можно заменить записью вида $F\Big|_{\Gamma} = 0, \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$ где n — направление нормали к поверхности$\Big)$. Не трудно доказать, что если на границе ламинарной пленки пренебрегать величинами $O(\delta)$, то функцию поперечной циркуляции можно принимать равным нулю [2]:

$$F(S)\Big|_{\Gamma} = 0 \tag{20}$$

Таким образом для гладких поверхностей будем иметь граничные условия интегрирования для уравнения (15) в виде зависимостей (17) и (20), а для шероховатых (19) и (20).

§ 4. Решение уравнения (15) при заданных граничных условиях 17), (20) или (19), (20) осуществляется вариационными методами. Этим путем было получено решение поставленной выше задачи для водоводов прямоугольного и круглого сечений [3] и [8]. В результате произведенных исследований было доказано, что решение задачи о поперечной циркуляции можно упростить путем замены в уравнении движения переменного коэффициента турбулентной вязкости его осредненной величиной [3—4], [6], [10]. При этом ошибка составляет лишь несколько процентов, что не имеет практического значения. Полученный вывод подтверждается так же данными экспериментов [3], [7], [12]. Учитывая это положение, мы переходим к решению задачи о поперечной циркуляции для водовода треугольного (равнобедренного) сечения предварительно заменяя в уравнении (15) переменный коэффициент турбулентной вязкости средней его величиной по сечению водовода.

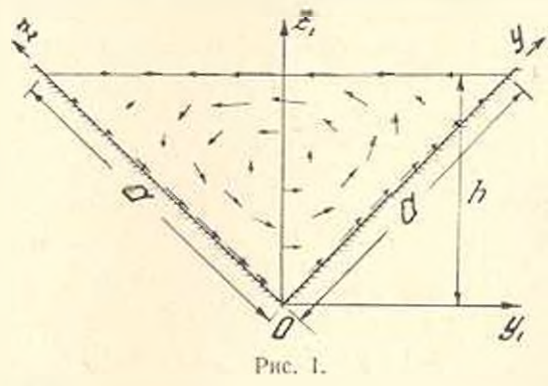

Рис. 1.

В соответствии с принятой на рис. 1 системой координат граничные условия на боковых стенках водовода можно согласно (18), (20) представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + k\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{z=0} = 0 \qquad F\Big|_{z=0} = 0 \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}+k\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\bigg|_{y=0}=0 \qquad F\bigg|_{y=0}=0 \qquad \text{где} \quad k=\frac{A\delta}{\mu} \tag{22}$$

На свободной поверхности потока должны удовлетворяться условия: равенство нулю нормальной к поверхности скорости и касательных напряжений (т. е. эпюры скоростей должны подойти к поверхности потока по направлению нормали). Для принятой системы координат нетрудно доказать, что эти условия запишутся так:

$$F\bigg|_{y+z=a}=0 \tag{23}$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\bigg|_{y+z=a}=0. \tag{24}$$

Решение задачи будем осуществлять по методу Галеркина [13].

$$F(y,z)=f(y,z)+\varphi(y,z) \tag{25}$$

где $\varphi(y,z)$ представляет из себя ряд с неопределенными коэффициентами, которые определяются из граничных условий.

Функция $\varphi(u,z)$ есть бигармоническая функция двух переменных.

Функция $f(u,z)$ выбирается так, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению движения и частично граничным условиям.

Функцию $\varphi(y,z)$ представим в виде следующего ряда

$$\varphi(y,z)=\sum_{n=1\ldots}^{\infty}A_n\left[\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-z)}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}+(-1)^{n+1}\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\ldots}^{\infty}B_n\left[\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-y)}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}-(-1)^{n+1}\operatorname{sh}\frac{n\pi z}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\ldots}^{\infty}C_n\left[(a-z)\operatorname{ch}\frac{n\pi(a-z)}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}-(-1)^{n+1}\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\left[(a-y)\operatorname{ch}\frac{n\pi(a-y)}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}-(-1)^{n+1}z\operatorname{ch}\frac{n\pi z}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\right]. \tag{26}$$

Нетрудно заметить, что $\varphi(y,z)$ представленная уравнением (26), удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности потока при любых значениях постоянных A_n, B_n, C_n и D_n. Эта функция удовлетворяет также бигармоническому уравнению.

Функция $f(y,z)$ может быть представлена в виде следующего полинома.

$$f(y, z) = m\left[(y + z - a)^4 + 2a(y + z - a)^3 - a^3(y + z - a)\right] \quad (27)$$

Нетрудно заметить так же, что $f(y, z)$ представленная выражением (27), также удовлетворяет условиям на свободной поверхности потока.

Для решения задачи о поперечной циркуляции необходимо задаваться распределением продольных скоростей до поворота водовода.

В гидравлике треугольные водоводы исследовались очень мало, поэтому, за неимением более достоверных данных, эпюру распределения продольных скоростей выразим формулой вида

$$u = u_0\left(\frac{z}{a}\right)^{1/6}\sqrt{\frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{a}\right)}, \quad (27)$$

которая соответствует опытным данным Никурадзе.

Необходимо отметить, что в работах [4], [10] доказана теорема об „устойчивости“ (малое изменение) поперечных скоростей при различных степенных законах распределения продольных скоростей. Поэтому это дает нам уверенность предполагать, что если формулы вида (28) не точно отражает истинную картину распределения продольных скоростей, то конечные результаты для u_y и u_z от этого чувствительно не должны разойтись с действительностью.

Подставим функцию $F(y, z)$ определяемую из выражения (25) в уравнение (15) при $A = A_{ср} = \text{const}$. Тогда с учетом (26) и (27) получим

$$96\,m = -\frac{u_0^2}{A_{ср}}\frac{\rho}{a}\cdot\frac{y}{a}\cdot\left(\frac{y}{a} - 1\right) \quad (28)$$

Разложим левые и правые части уравнения (28) в ряд Фурье в пределах от 0 до a по $\sin\frac{n\pi y}{a}$. После элементарных преобразований будем иметь

$$\frac{384\,m}{\pi}\sum_{n=1\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{a} = -\frac{2u_0^2}{a^2 h}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a^3}{n^3\pi^3}\left[-(n^2\pi^2 - 2)\cos n\pi - 2\right] + \frac{a^3\cos n\pi}{n\pi}\right\}\sin\frac{n\pi y}{a},$$

откуда

$$m = -\sum_{n=1\cdots}^{\infty}\frac{\frac{2u_0^2}{a^2 h}\left\{\frac{a^3}{n^3\pi^3}\left[-(n^2\pi^2 - 2)\cos n\pi - 2\right] + \frac{a^3\cos n\pi}{n\pi}\right\}}{\frac{384}{n\pi}} =$$

$$= \sum_{n=1\cdots}^{\infty}\frac{u_0^2}{48\,hA_{ср}\,\pi^2(2n - 1)^2} \quad (29)$$

Таким образом дифференциальное уравнение движения (15) (с осредненным значением A) с учетом (26—29) удовлетворяется.

Остается удовлетворить граничным условиям на контуре треугольника. Число граничных условий шесть (21—24). Функции $\phi(y, z)$ и $f(y, z)$ подобраны так, что они удовлетворяют условиям на гипотенузе треугольника, при любых значениях постоянных. Остается удовлетворить четырем граничным условиям на катетах треугольника.

Постоянные A_n, B_n, C_n и D_n определяем из граничных условий (21—22). Граничные условия (21) с учетом (25—27) можно представить в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}+k\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\Big|_{y=0}=\sum_{n=1\ldots}^{\infty}A_n\left[\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-z)}{a}-(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{a}\sin\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\ldots}^{\infty}B_n\left[\frac{n\pi}{a}\operatorname{ch}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}-(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\ldots}^{\infty}C_n\left[\frac{n\pi}{a}(a-z)\operatorname{ch}\frac{n\pi(a-z)}{a}-(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi z}{a}\right]-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}D_n\left[-\operatorname{ch}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}-n\pi\operatorname{sh}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}-(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{a}z\operatorname{ch}\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+K\left\{\left[\sum_{n=1\ldots}^{\infty}B_n\frac{n^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sh}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}\right]+\right.$$

$$+\sum_{n=1\ldots}^{\infty}D_n\left[\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}+\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}+\frac{n^2\pi^2}{a}\operatorname{ch}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}\right]+$$

$$+12m\left[(z-a)^2+a(z-a)\right]\Big|+m\left[4(z-a)^3+6a(z-a)^2-a^3\right]. \qquad (30)$$

Разложим в ряд Фурье все те члены в (30'), которые не содержат $\sin\frac{n\pi z}{a}$. Пользуясь обычными формулами разложения функции $f(z)$ в ряд Фурье, т. е.

$$f(z)=\sum\alpha_n\sin\frac{n\pi z}{a}, \qquad \text{где} \qquad \alpha_n=\frac{2}{a}\int\limits_0^a f(z)\sin\frac{n\pi z}{a}\,dz \qquad (31)$$

окончательно получим:

$$\frac{n\pi}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi(a-z)}{a} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sh}\,n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}\,;\ \frac{n\pi}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi z}{a} =$$

$$= -\frac{1}{a}\sum_{n=1\ldots}^{\infty}\mathrm{sh}\,n\pi\cos n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}\,;\ \frac{n\pi}{a}(a-z)\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi(a-z)}{a} =$$

$$= \sum_{n=1\ldots}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,n\pi - \frac{\mathrm{sh}\,n\pi}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi z}{a}\,;\ \frac{n\pi}{a}z\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi z}{a} =$$

$$= \sum_{n=1\ldots}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sh}\,n\pi}{n\pi} - \mathrm{ch}\,n\pi\right)\cos n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}\ldots \qquad (32)$$

$$m\left[4(z-a)^3 + 6a(z-a)^2 - a^3\right] = m\sum_{n=1\ldots}^{\infty}\left(\frac{24a^3}{n^3\pi^3} + \frac{2a^3}{n\pi}\right)\times$$

$$\times\left[1+(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi z}{a}$$

$$12m\left[(z-a)^2 + a(z-a)\right] = \frac{48a^2m}{n^3\pi^3}\sum_{n=1\ldots}^{\infty}\left[(-1)^n - 1\right]\sin\frac{n\pi z}{a} \qquad (33)$$

С учетом (32—33) граничные условия (30), после ряда элементарных преобразований и сокращений на $\sin\frac{n\pi z}{a}$, можно представить в следующем виде:

$$\sum_{n=1\ldots}^{\infty}A_n\left[\frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\,n\pi - (-1)^{n+1}\frac{n\pi}{a}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[-\frac{n\pi}{n}\,\mathrm{ch}\,n\pi + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+1}\frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\,n\pi\cos n\pi\right] + C_n\left[\mathrm{ch}\,n\pi - \frac{\mathrm{sh}\,n\pi}{n\pi} - (-1)^{n+1}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1\ldots}^{\infty}D_n\left[-\mathrm{ch}\,n\pi - n\pi\,\mathrm{sh}\,n\pi - (-1)^{n+1}\left(\frac{\mathrm{sh}\,n\pi}{n\pi} - \mathrm{ch}\,n\pi\right)\cos n\pi\right] +$$

$$+ K\left\{\sum_{n=1\ldots}^{\infty}B_n\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\,\mathrm{sh}\,n\pi\right) + \sum_{n=1\ldots}^{\infty}D_n\left(2\frac{n\pi}{a}\,\mathrm{sh}\,n\pi + \frac{n^2\pi^2}{a}\,\mathrm{ch}\,n\pi\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{48a^2}{n^3\pi^3}m\left[(-1)^n - 1\right]\right\} + \sum_{n=1\ldots}^{\infty}ma^3\left(\frac{24}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n\pi}\right)\left[(-1)^n + 1\right] = 0 \qquad (34)$$

Аналогичным образом получаем граничные условия на катете.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}+K\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\Bigg|_{z=0}=\sum_{n=1\cdots}^{\infty}A_n\left[-\frac{n\pi}{a}\operatorname{ch}n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sh}n\pi\cos n\pi}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}B_n\left[\frac{\operatorname{sh}n\pi}{a}-(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{a}\right]+$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}C_n\left[-n\pi\operatorname{sh}n\pi-\operatorname{ch}n\pi-(-1)^{n+1}\left(\frac{\operatorname{sh}n\pi}{n\pi}-\operatorname{ch}n\pi\right)\cos n\pi\right]+$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}D_n\left[\operatorname{ch}n\pi-\frac{\operatorname{sh}n\pi}{n\pi}-(-1)^{n+1}\right]+$$

$$+K\left\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sh}n\pi\right)+\right.$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}C_n\left(2\frac{n\pi}{a}\operatorname{sh}n\pi+\frac{n^2\pi^2}{a}\operatorname{ch}n\pi\right)+$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{48a^2m}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\right\}+$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}ma^3\left(\frac{24}{n^3\pi^3}+\frac{2}{n\pi}\right)[(-1)^n-1]=0 \qquad (35)$$

Граничные условия $F\big|_{z=0}=0$ и $F\big|_{z=0}=0$ после ряда элементарных преобразований, можно представить в следующем виде:

$$\sum_{n=1\cdots}^{\infty}B_n\operatorname{sh}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}+$$

$$+\sum_{n=1\cdots}^{\infty}D_n a\operatorname{ch}n\pi\sin\frac{n\pi z}{a}-m\left[(z-a)^4+2a(z-a)^3-n^2(z-a)\right]=0 \qquad (36)$$

Последний член в выражении (36) разложим в ряд Фурье по $\sin\frac{n\pi z}{a}$. Тогда получим:

$$m\left[(z-a)^4+2a(z-a)^3-a^3(z-a)\right]=\frac{96a^4m}{\pi^5}\sum_{n=1\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi z}{a} \qquad (37)$$

С учетом этого выражения (36) окончательно примет следующий вид

$$\sum_{n=1\cdots}^{\infty} B_n \operatorname{sh} n\pi + \sum_{n=1\cdots}^{\infty} aD_n \operatorname{ch} n\pi + \frac{96\, a^4 m}{\pi^5 n^5} = 0 \qquad (38)$$

Аналогичным образом получаем следующее выражение для граничных условий $F|_{\xi=0} = 0$:

$$\sum_{n=1\cdots}^{\infty} A_n \operatorname{sh} n\pi + \sum_{n=1\cdots}^{\infty} aC_n \operatorname{ch} n\pi + \frac{96 a^4 m}{\pi^5 n^5} = 0 \qquad (39)$$

Из (38) и (39) видно, что $A_n = B_n$, $C_n = D_n$.

Суммируя уравнения (30) и (35) и учитывая, что $A_n = B_n$ и $D_n = C_n$ получаем два уравнения с двумя неизвестными A_n и B_n.

После совместного решения этих уравнений и ряда элементарных преобразований получаем

$$C_n = \frac{\frac{96a^4 m}{n^5\pi^5 \operatorname{sh} n\pi}\left[\frac{\operatorname{sh} n\pi}{a}\left(1 + (-1)^{n+1}\cos n\pi\right) - n\pi \operatorname{sh} n\pi + (-1)^{n+1}(\operatorname{ch} n\pi \cos n\pi - 1) - \frac{n\pi}{a}\left((-1)^{n+1} + \operatorname{ch} n\pi\right) + \frac{K}{a^2} n^2\pi^2 \operatorname{sh} n\pi\right] - \frac{48a^3 mK}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right) - ma^3\left(\frac{24}{n^3\pi^3} + \frac{2}{n\pi}\right)\left[(-1)^n + 1\right]}{-\frac{\operatorname{sh} n\pi}{n\pi}\left[1 + (-1)^{n+1}\cos n\pi\right] + K\left(\frac{2n\pi}{a}\operatorname{sh} n\pi + \frac{n^2\pi^2}{a}\operatorname{ch} n\pi\right) - \frac{a \operatorname{ch} n\pi}{\operatorname{sh} n\pi}\left[\frac{1}{a}\operatorname{sh} n\pi\left(1 + (-1)^{n-1}\right)\cos n\pi - \frac{n\pi}{a}\left((-1)^{n+1} + \operatorname{ch} n\pi + \frac{K}{a^2} n^2\pi^2 \operatorname{sh} n\pi\right)\right]} \qquad (40)$$

$$A_n = C_n - \frac{96a^4 m}{n^4\pi^3 \operatorname{sh} n\pi} \cdots \qquad (41)$$

Ряды (40) и (41) быстро сходятся, поэтому для практических расчетов вполне достаточно ограничиваться первым членом разложения. С учетом этого обстоятельства выражение скоростей поперечной циркуляции окончательно можно представить в следующем виде:

$$u_y = \frac{1}{R_0}\Bigg\{A_1\Bigg[-\frac{\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi(a-z)}{a}\sin\frac{\pi y}{a}-\frac{\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi z}{a}+$$

$$+\frac{\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi(a-z)}{a}\cos\frac{\pi z}{a}-\frac{\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\Bigg]+$$

$$+C_1\Bigg[-(a-z)\frac{\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi(a-z)}{a}\sin\frac{\pi y}{a}-\operatorname{ch}\frac{\pi(a-z)}{a}\sin\frac{\pi y}{a}-$$

$$-\frac{\pi}{a}y\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}\cos\frac{\pi z}{a}+\frac{\pi}{a}(a-y)\operatorname{ch}\frac{\pi(a-y)}{a}\cos\frac{\pi z}{a}-$$

$$-\operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}\sin\frac{\pi y}{a}-\frac{\pi}{a}z\operatorname{sh}\frac{\pi z}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\Bigg]+$$

$$+\frac{u_0\rho}{48\,h\,\pi^2 A_{cp}}\left[4(z+y-a)^3+6a(z+y-a)^2-a^3\right]\Bigg\}\cdots, \qquad (42)$$

$$u_z = -\frac{1}{R_0}\Bigg\{A_1\Bigg[\frac{\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi(a-z)}{a}\cos\frac{\pi y}{a}-\frac{\pi}{a}\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi z}{a}-$$

$$-\frac{\pi}{a}\operatorname{ch}\frac{\pi(a-y)}{a}\sin\frac{\pi z}{a}-\frac{\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\Bigg]+$$

$$+C_1\Bigg[\frac{\pi}{a}(a-z)\operatorname{ch}\frac{\pi(a-z)}{a}\cos\frac{\pi y}{a}-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}-\sin\frac{\pi z}{a}-$$

$$-\frac{\pi}{a}y\operatorname{sh}\frac{\pi y}{\pi}\sin\frac{\pi z}{a}-\operatorname{ch}\frac{\pi(a-y)}{a}\sin\frac{\pi z}{a}-$$

$$-\frac{(a-y)\pi}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi(a-y)}{a}\sin\frac{\pi z}{a}-\frac{\pi}{a}z\operatorname{ch}\frac{\pi z}{a}\cos\frac{\pi y}{a}\Bigg]+$$

$$+\frac{u_0^3\rho}{48\pi^2 h\,A_{cp}}\left[4(z+y-a)^3+6a(z+y-a)^2-a^3\right]\Bigg\}. \qquad (43)$$

Как видно, окончательные расчетные формулы для u_y и u_z получились довольно громоздкими. Однако, нетрудно видеть, что все функции, входящие в выражения для u_y и u_z легко табулируются, если задаться значениями относительных координат $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$ и $\frac{3A}{\mu}=K$.

С учетом этого замечания формулы для u_y и u_z можно представить в следующем виде:

$$u_y = 0{,}003\frac{u_0^3 a^2}{R_0 A_{cp}}\rho\, f_1(y,z) \qquad (44)$$

$$u_z = -0{,}003\frac{u_0^3 a^2}{R_0 A_{cp}}\rho\, f_2(y,z) \qquad (45)$$

Значения функций $f_1(y, z)$ и $f_2(y, z)$ приведены на рис. 2. При $K = 0$ общая картина поперечной циркуляции выражаемая расчетными формулами (44) и (45) представлена на рис. (1).

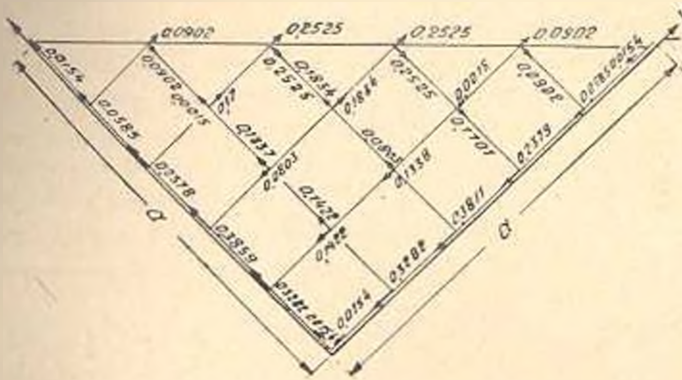

Рис. 2.

Из рис. (1) видно, что качественная картина поперечной циркуляции в треугольном водоводе вполне подтверждается данными как модельных, так и натурных наблюдений [14]. Количественное сопоставление не можем делать так как в опубликованных работах не приводятся необходимые для этого данные.

При других эпюрах распределения продольных скоростей изложенный выше метод, а также ход решения задачи остаются неизменными.

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Поступило 6 I 1957

Ա. Կ. ԱՆԱՆՅԱՆ

ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՑԻՐԿՈՒԼՅԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՁԵՎ ՋՐԱՏԱՐ ՈՒՂՈՐԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է եռանկյունաձև տրամաչափերի ջրատար ուղորաններում ցիրկուլյացիայի խնդրի լուծմանը։

Ստացված արդյունքները կարող են կիրառվել մի շարք պրակտիկ խնդիրների լուծման համար, որոնք հանդիպում են հիդրոտեխնիկայի զանազան բնագավառներում։

Ելնելով միջինացված ըստ ժամանակի տուրբուլենտ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներից, կիրառելով փոքր պարամետրի մեթոդը, հնարավոր է դառնում նշված հավասարումները պարզեցնել։ Որպես փոքր պարամետր վերցրված է ջրատարի լայնությունը և ոլորանի շառավղի հարաբերությունը. շարժման հավասարումները պարզեցնելու ժամանակ անտեսված են բոլոր այն անդամները, որոնք ունեն $O\left(\frac{b^2}{R^2}\right)$-ից ավելի բարձր կարգ։

Պարզեցված հավասարումներից (13) արտաքսելով ճնշման մեծությունը և օգտվելով անխզելիության հավասարումից հնարավոր է դառնում ստանալ

շարժման վերջնական հավասարումը տանգենցիալների արագությունների համար. (15). Հավասարման լուծելիս համար օգտված են սահմանային պայմանները հարթ և խորդուբորդ պատերի դեպքում։ Հարթ պատերի համար սահմանային պայմանները (17), (20) ստացված են, ընդունելով, որ պատերի մոտ առաջանում է լամինար թաղանթ. խորդուբորդ պատերի դեպքում լամինար թաղանթը կարող է բոլորովին չառաջանալ, իսկ եթե առաջանա էլ, ապա նա ոչ մի դեր չի կարող խաղալ դինամիկ պրոցեսների համար։

Օգտվելով Բ. Գ. Գալյորկինի մեթոդից ստացված է դիֆերենցիալ հավասարման (15) լուծումը հավասարակողմ եռանկյունաձև հարթ պատեր ունեցող ջրատարի համար։ Անհրաժեշտ է նշել, որ հավասարման լուծման ժամանակ տուրբուլենտության գործակցի փոփոխական արժեքը. խնդրի պարզեցման համար, փոխարինված է նրա միջին արժեքով՝ ըստ կտրվածքի մակերեսի։

Ստացված վերջնական հաշվային բանաձևի համար (44), (45) կազմված են աղյուսակներ՝ ընդունելով, որ լամինար թաղանթի հաստությունը հավասար է զրոյի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Ананян* — О распределении мутности в потоке с поперечной циркуляцией. ДАН СССР, том 109, № 2. 1956 г.
2. *А. К. Ананян* — Уравнения движения турбулентного потока на повороте водовода. ДАН СССР, том XCIII № 4, 1953 г.
3. *А. К. Ананян* — Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока в водоводах круглого и прямоугольного сечения. Известия Академии наук Армянской ССР, том VI, № 1. 1952 г. Серия физ. мат., естеств. и техн. наук. Ереван, 1953 г.
4. *А. К. Ананян* — Поперечная циркуляция при изгибе турбулентного потока. Автореферат докторской диссертации. Ереван. 1952 г.
5. *А. Н. Патрашев* — Гидромеханика. Военно-морское издательство Военно-морского министерства Союза ССР, Москва, 1953 г.
6. *В. М. Маккавеев* — К динамике твердого и жидкого стока свободных потоков при прямолинейном и извилистом руслах. Труды по гидрологии Гидрометеоиздат. Ленинград—Москва, 1938 г.
7. *В. М. Маккавеев* — Некоторые теоретические задачи динамики открытых потоков. Труды государственного Гидрологического института, выпуск 8 (62), Гидрометеоиздат, Ленинград, 1948 г.
8. *Л. А. Оганесян* — Уравнение распределения поперечных скоростей и коэффициент турбулентного перемешивания при движении жидкости на повороте. Известия Акад. наук Армянской ССР, том VI, № 3. Серия физ. мат., естеств. и тех. наук Ереван. 1953 г.
9. *А. А. Оганесян* — О поперечной циркуляции в напорной трубе на ее повороте. Доклады АН Армянской ССР, том XV, № 3. 1952 г.
10. *Л. А. Оганесян* — О турбулентном движении жидкости на повороте напорного водовода. Автореферат кандидатской диссертации. Ереван, 1954 г.
11. *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц* — Механика сплошных сред. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1953 г.
12. *И. А. Розовский* — К вопросу о распределении скоростей на изгибе потока. АН Украинской ССР, Институт Гидрологии и гидротехники. Киев, 1954 г.
13. *Б. Г. Галеркин* — Упругие тонкие пластинки. Госстройиздат. Ленинград—Москва, 1933 г.
14. *А. А. Большаков* — Поперечная циркуляция в потоке сжатого сечения. Труды ВНИИГиМ, том XXX, Сельхозгиз, Москва, 1950 г.