АСТРОФИЗИКА

ТОМ 62 АВГУСТ, 2019 ВЫПУСК 3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ СКАЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ АТМОСФЕРЕ

А.Г.НИКОГОСЯН

Среди задач теории переноса излучения особое место занимают так называемые скалярные задачи, в которых не учитываются пространственная и частотная зависимости поля излучения. Такие задачи легче поддаются решению и потому удобны для выявления и изучения тех эффектов, которые связаны сугубо с процессом многократного расеяния. Именно таким задачам посвящены пионерские работы создателей астрофизической теории переноса излучения, выполненные в первые десятилетия прошлого века. Изучение астрофизических объектов и явлений, связанное с интерпретацией данных наблюдений, естественным образом сводится к решению тех или иных так называемых обратных задач, в частности, относящихся к теории переноса излучения. Такого рода задачи принадлежат к классу некорректных задач и их решение связано, как правило, с большими, порой принципиальными, трудностями. С этой точки зрения, представляют особый интерес те редкие случаи, когда удается при некоторых исходных допущениях аналитически получить точное решение такого типа задач. К их числу можно отнести, например, известную задачу о восстановлении пространственного распределения плотности излучаемых объектов по наблюдаемому двухмерному изображению, которая, как известно, сводится к решению уравнения Абеля.

В данной работе рассматривается задача о диффузии излучения в одномерной однородной и изотропно рассеивающей атмосфере конечной оптической толщины. При классической постановке целью таких задач обычно является определение глобальных оптических характеристик среды (коэффициенты отражения и пропускания), если известны оптическая толщина среды τ_0 и ее локальные физические свойства, определяющие специфику возникающего в ней явления многократного рассеяния. Скалярная задача рассматривалась Амбарцумяном, для решения которой им был предложен так называемый метод сложения слоев [1,2]. Применение метода приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям относительно искомых коэффициентов отражения $r(\tau_0)$ и пропускания $q(\tau_0)$

$$\frac{dr}{d\tau_0} = \frac{\lambda}{2} - (2-\lambda) r(\tau_0) + \frac{\lambda}{2} r^2(\tau_0), \tag{1}$$

$$\frac{dq}{d\tau_0} = -\left\{1 - \frac{\lambda}{2}\left[1 + r(\tau_0)\right]\right\} q(\tau_0), \tag{2}$$

где λ - вероятность переизлучения кванта при элементарном акте рассеяния. Уравнения (1), (2) удовлетворяют очевидным начальным условиям $r(0)=0$, $q(0)=1$. Подход, примененный при получении данных уравнений, в дальнейшем получил название инвариантного погружения [3]. Решения указанных уравнений известны, их можно найти, например, в [4,5]. В данной статье мы их не приводим, поскольку ниже будут даны выражения для несколько других величин, связанных простыми соотношениями с коэффициентами отражения и пропускания. Уравнения (1), (2) показывают, что глобальные оптические характеристики рассматриваемых поглощающих и рассеивающих сред определяются парой параметров λ и τ_0. Можно показать, что в случае, когда все четыре величины существуют, соответствие между парами величин (r, q) и (λ, τ_0) является взаимно однозначным (соответствующий якобиан отличен от нуля). В связи с этим возникает естественный вопрос, возможно ли получить в явном виде формулы, связывающие каждую из величин λ, τ_0 с коэффициентами отражения и пропускания среды. Другими словами, позволяет ли знание наблюдаемых оптических характеристик среды судить о каждом из тех ее характеристик, которые описывают диффузию излучения. Именно этому вопросу посвящена данная работа.

В недавних работах автора [5,6] была развита теория, заключающаяся в применении методов теории групп к задачам переноса излучения. В рамках указанной теории, в частности, было введено понятие группы композиций поглощающих и рассеивающих сред и получено соответсвующее ей представление, позволяющее при объединении нескольких сред складывать их оптические характеристики. Фактически, данный подход является обобщением метода сложения слоев Амбарцумяна и охватывает достаточно широкий круг задач переноса излучения в плоскопараллельных средах.

Представление группы композиции для рассматриваемой здесь одномерной задачи имеет вид

$$\mathbf{A}(\tau) = \begin{pmatrix} P(\tau) & -S(\tau) \\ S(\tau) & M(\tau) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения: $P = q^{-1}$, $S = rq^{-1}$, $M = \left(1 - S^2\right)/P = q - r^2 q^{-1}$.

Матрицы **A**, сами образуя группу, устанавливают закон сложения оптических свойств сред при их объединении. Для двух сред с толщинами τ_1 и τ_2 он записывается в виде

$$\begin{pmatrix} P(\tau_1+\tau_2) \\ S(\tau_1+\tau_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\tau_2) & -S(\tau_2) \\ S(\tau_2) & M(\tau_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\tau_1) \\ S(\tau_1) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Инфинитезимальный оператор группы **A** в нашем случае имеет вид

$$\Xi = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\lambda}{2} & -\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Как было показано в [5], используя (3), приходим к системе линейных дифференциальных уравнений относительно величин P и S

$$P'(\tau_0) = \left(1-\frac{\lambda}{2}\right) P(\tau_0) - \frac{\lambda}{2} S(\tau_0), \tag{6}$$

$$S'(\tau_0) = \frac{\lambda}{2} P(\tau_0) - \left(1-\frac{\lambda}{2}\right) S(\tau_0), \tag{7}$$

с начальными условиями $P(0)=1$, $S(0)=1$.

Из (6) и (7) легко получить, что сумма и разность искомых функций удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического типа

$$Y''(\tau_0) - (1-\lambda) Y(\tau_0) = 0, \tag{8}$$

при следующих начальных условиях

$$P(0) \pm S(0) = 1, \quad P'(0) + S'(0) = 1; \quad P'(0) - S'(0) = 1-\lambda. \tag{9}$$

Решения соответствующих уравнений имеют вид

$$P(\tau_0) = \frac{1+k^2}{2k} \operatorname{sh}(k\tau_0) + \operatorname{ch}(k\tau_0), \tag{10}$$

$$S(\tau_0) = \frac{1-k^2}{2k} \operatorname{sh}(k\tau_0). \tag{11}$$

С учетом связи между функцией $M(\tau_0)$ и функциями $P(\tau_0)$, $S(\tau_0)$ имеем

$$M(\tau_0) = -\frac{1+k^2}{2k} \operatorname{sh}(k\tau_0) + \operatorname{ch}(k\tau_0), \tag{12}$$

где $k = \sqrt{1-\lambda}$.

Далее, из (10) и (12) следует, что

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) = P(\tau_0) + M(\tau_0) = 2\operatorname{ch}(k\tau_0). \tag{13}$$

При решении (13) относительно $k\tau_0$ заметим, что $(1/2)\operatorname{Tr}(\mathbf{A}) \geq 1$ или

$1+q^2-r^2 \geq 2q$. Это, в свою очередь, следует непосредственно из физически очевидного неравенства $r+q \leq 1$. Тогда из (13) следует

$$k\tau_0 = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right), \quad (14)$$

где для краткости введено обозначение $y=(1/2)\mathrm{Tr}(\mathbf{A})=(1/2q)\left(1+q^2-r^2\right)$.

Соотношение (14) позволяет определить произведение искомых величин λ и τ_0 через наблюдаемые оптические характеристики среды. С другой стороны, как известно [7], инвариантность решения задачи (и соответствующего Лагранжиана) по отношению к сдвигу оптической глубины приводит к следующему закону сохранения

$$\lambda r^2 - 2(2-\lambda)r + \lambda = \lambda q^2 , \quad (15)$$

откуда имеем

$$\lambda = 4r\Big/\left[(1+r)^2 - q^2\right] . \quad (16)$$

Соотношения (14) и (16) решают поставленную задачу.

На рис.1 приводятся типичная зависимость оптической толщины τ_0 и коэффициента рассеяния λ от пропускательной способности среды q при некоторых значениях коэффициента отражения r. Как это явствует из

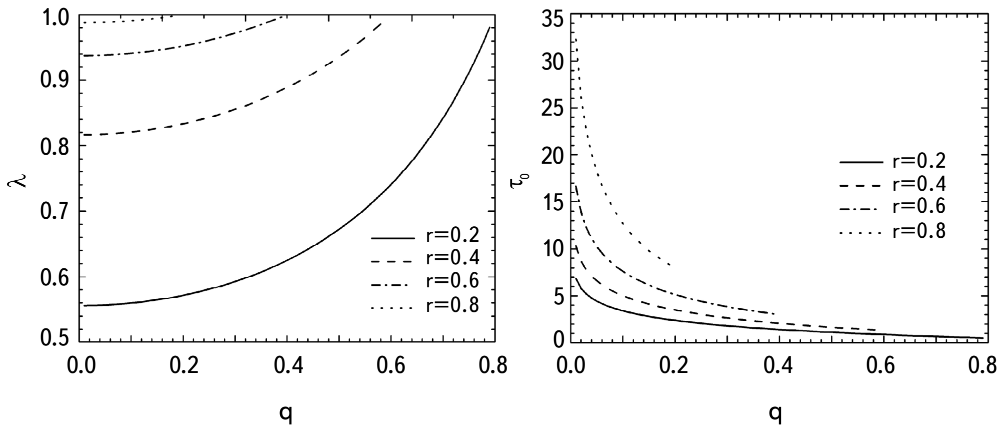

Рис.1. Зависимость коэффициента рассеяния и оптической толщины среды от коэффициента пропускания при заданных значениях отражательной способности среды.

приведенных рисунков, не все комбинации величин $r, q \leq 1$ могут иметь физический смысл в рамках рассматриваемой задачи.

The exact solution of the inverse scalar problem of the radiative transfer in a one-dimensional atmosphere. The inverse scalar problem of ID radiative transfer problem is solved analytically. It is particularly shown that

not all combination of reflection and transmission coefficients $r, q \leq 1$ can be physically meaningful.

Keywords: *radiative transfer - one-dimensional atmosphere - inverse problems*

3 мая 2019

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения,
e-mail: nikoghoss@yahoo.com

А.Г.Никогосян
A.G.Nikoghossian

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, Изв. АН АрмССР, 1-2, 1944.
2. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изв. АН АрмССР, Ереван, 1960.
3. *R.Bellman*, *R.Kalaba*, *M.Wing*, J. Math. Phys., **1**, 280, 1960.
4. *В.В.Соболев*, Перенос излучения в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
5. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 149, 2011, (Astrophysics, **54**, 126, 2011).
6. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **57**, 295, 2014, (Astrophysics, **57**, 272, 2014).
7. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.