

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИФфуЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ЧИСТО РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ. I

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 18 октября 2018

Принята к печати 29 мая 2019

Рассматривается простой пример нелинейной задачи отражения-пропускания излучения одномерной рассеивающей и поглощающей изотропной средой конечной геометрической толщины при консервативном и изотропном рассеянии. Показана эффективность разработанного ранее автором метода линейных образов (ЛО) решения нелинейной задачи переноса излучения. Для искомого ЛО получено явное выражение. С его помощью построено в явном замкнутом виде решение задачи отражения-пропускания при двустороннем освещении среды конечной толщины и определено поле излучения внутри нее при двух взаимно противоположных постановках - "прямой" и "обратной". Приводятся численные результаты, иллюстрирующие различия между решениями исследуемых задач в линейном и нелинейном случаях.

Ключевые слова: перенос излучения; нелинейная задача

1. *Введение и постановка задачи.* Задачи переноса лучистой энергии в астрофизических средах (звездные и планетные атмосферы, межзвездные облака, космические газопылевые комплексы и т.д.) играют важную роль при интерпретации наблюдаемых спектров космических объектов. Физические процессы многократного взаимодействия излучения с веществом приводят к взаимному изменению первичных характеристик как распространяющегося в данной среде излучения, так и свойств самой рассеивающей и поглощающей среды. В линейных задачах переноса учитывается лишь первый из указанных двух факторов, при этом оптические свойства среды считаются известными заранее и неменяющимися. В нелинейных задачах это упрощающее предположение не делается, поэтому установившиеся характеристики поля излучения и рассеивающей среды теперь определяются совместно - самосогласованным образом. Ввиду математической сложности, исследование таких задач в основном проводится лишь численными, а в лучшем случае, численно-аналитическими методами (см., напр., литературу к работе [1]). Однако важно отметить, что в некоторых частных случаях решение подобных задач все же удается получить аналитически в замкнутом явном виде. Рассмотрение таких примеров представляет определенный интерес, поскольку выполненный на их

основе сравнительный анализ позволяет непосредственно аналитически выявить основные различия физических картин линейной и нелинейной моделей переноса излучения.

В настоящем исследовании, состоящем из двух частей, приводятся аналитические решения простой нелинейной задачи свечения одномерной и изотропной среды конечной геометрической толщины, состоящей из двухуровневых атомов, при чистом и изотропном рассеянии в случае двустороннего освещения среды извне. При этом появляется возможность анализировать также ряд смежных нелинейных задач переноса в их "прямой" и "обратной" постановках. В частности, описывается зависимость поля излучения и оптических характеристик среды от мощности внешнего возбуждающего излучения.

Пусть имеется одномерная среда геометрической толщины L , состоящая из двухуровневых атомов, которая со стороны обеих своих границ $l=0$ и $l=L$ находится под воздействием интенсивных пучков внешнего возбуждающего излучения с интенсивностями x и y , соответственно. Требуется определить интенсивности $u(x, y, L)$ и $v(x, y, L)$ выходящего из среды излучения, соответственно через правую и левую границы, а также интенсивности $I^-(l, x, y, L)$ и $I^+(l, x, y, L)$ излучения на произвольной глубине l , идущие соответственно в направлении правой (+) и левой (-) границы.

2. Исходные соотношения. В работах [1-3] (см. также [4,5]) нелинейная задача переноса излучения в одномерной анизотропной среде конечной геометрической толщины в своей общей постановке рассматривалась с помощью принципа инвариантности и метода сложения слоев [6-8]. Далее, с целью дальнейшего упрощения решения данной нелинейной задачи, в работе [9] был введен метод линейных образов (ЛО) решения задачи (первое сообщение об этом см. [10]; в [11] метод распространяется на задачи определения поля излучения внутри среды). Линейные образы являются вспомогательными функциями, описывающими процесс многократного рассеяния одного фотона или их пучка единичной интенсивности, падающего на одну из двух границ среды, в то время, как сама среда освещена с двух сторон. Оказывается, что решение исследуемой нелинейной задачи выражается через элементарные линейные комбинации указанных вспомогательных функций.

В работе [9] (см. также [12]) для величин u и v для частного случая изотропной среды и консервативного рассеяния были получены явные выражения:

$$u = (x - y)T + y, \quad v = -(x - y)T + x \quad (1)$$

и функциональное уравнение полной инвариантности Амбарцумяна (ПИА)

$$\left[k(x+v) \frac{\partial}{\partial x} + k(y+u) \frac{\partial}{\partial y} \right] T = -TM(x, y), \quad (2)$$

являющееся квазилинейным дифференциальным уравнением симметричного вида, где величина $T \equiv T_L \equiv T(x, y) \equiv T(x, y; L)$ представляет собой ЛО пропускания, а

$$M(x, y) = M(y, x) \equiv \frac{k(x+v) - k(y+u)}{x-y}, \quad (3)$$

где $k(\xi)$ - коэффициент поглощения для данной среды при элементарном акте взаимодействия излучения с веществом. Изотропность среды и консервативность рассеяния проявляются в соотношениях

$$v(x, y) \equiv u(y, x), \quad (4)$$

$$u+v = x+y, \quad R+T = 1 \quad (5)$$

соответственно, где величина $R \equiv R(x, y) \equiv R(x, y; L)$ является ЛО отражения. Начальные условия уравнения (2) задаются в виде:

$$T(x, 0; L) = \sigma(x) \quad \text{или} \quad T(0, y; L) = \sigma(y), \quad (6)$$

где величина $\sigma \equiv \sigma(\zeta) \equiv \sigma(\zeta; L)$ есть решение более частной нелинейной задачи прохождения единичного кванта через среду с односторонним освещением [9]

$$\left[\frac{\partial}{\partial L} + \zeta \sigma \frac{k(2\zeta - \zeta \sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \sigma = -\sigma^2 \frac{k(2\zeta - \zeta \sigma)}{2}, \quad (7)$$

$$\sigma|_{L=0} = 1 \quad \text{или} \quad \sigma|_{\zeta=0} = q, \quad (8)$$

а величина $q \equiv q_L \equiv q(L) = \sigma(0; L) = T(0, 0; L)$ - аналогичное решение линейной задачи, удовлетворяющее хорошо известному уравнению инвариантного погружения ($0 \leq l \leq L$):

$$\frac{\partial}{\partial l} q = -q^2 \frac{k_0}{2}, \quad q|_{l=0} = 1, \quad k_0 \equiv k(0) \equiv k(0, l) \equiv k_0(l) = n(l) \frac{h\nu}{2} B_{12}, \quad (9)$$

имеющему решение [4]

$$q_L \equiv q(\tau_0) = \left(1 + \frac{\tau_0}{2} \right)^{-1}. \quad (10)$$

В соотношении (10) использовано понятие предельной (т.е. соответствующей линейному случаю) оптической толщины [5]

$$\tau_0 \equiv \int_0^L k_0(l) dl = \frac{h\nu}{2} B_{12} \int_0^L n(l) dl. \quad (11)$$

Из сказанного вытекает, что для получения полного решения поставленной выше задачи определения величин $u, v, I^\pm$, необходимо вначале найти ЛО пропускания $T(x, y; L)$ из уравнения ПИА (2)-(3) с начальными условиями (6), определяемыми из (7)-(8). Некоторые из полученных ниже результатов ранее без доказательств были представлены в [13,14].

3. *Решение уравнения ПИА для линейного образа пропускания.*
Коэффициент поглощения при консервативном рассеянии [9] имеет вид

$$k(\xi) \equiv k(\xi, l) = \frac{k(0)}{1 + b\xi}, \quad \xi \equiv x + y, \quad (12)$$

где

$$b \equiv \frac{B_{12} + B_{21}}{2 A_{21}} = \frac{c^2}{4 h \nu^3} \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right), \quad (13)$$

(здесь используются стандартные обозначения [15]).

Для перехода к линейному случаю достаточно с учетом условия $b\xi \ll 1$ разложить знаменатель в (12) в ряд Тейлора и ограничиться лишь первым членом. Полученный при этом результат показывает, что указанный переход формально соответствует подстановке $b \equiv 0$.

Квазилинейное уравнение (2)-(4) в характеристиках имеет вид

$$\frac{\partial x}{k(x+v)} = \frac{\partial y}{k(y+u)} = -\frac{\partial T}{TM(x, y)}. \quad (14)$$

При соблюдении условий

$$1 + b\xi_1 \neq 0, \quad 1 + b\xi_2 \neq 0, \quad \text{где} \quad \xi_1 \equiv x + v, \quad \xi_2 \equiv y + u, \quad (15)$$

подстановка (12) в соотношения (14) и (3) после необходимых сокращений дает:

$$\partial x = -\frac{(1 + b\xi_2)(x - y)}{b(\xi_2 - \xi_1)} \frac{\partial T}{T}, \quad (16)$$

$$\partial y = -\frac{(1 + b\xi_1)(x - y)}{b(\xi_2 - \xi_1)} \frac{\partial T}{T}. \quad (17)$$

С другой стороны, вычисление выражений в скобках, содержащих ξ , с учетом (1) приводит к соотношениям

$$1 + b\xi_1 = 1 + 2bx - b(x - y)T, \quad 1 + b\xi_2 = 1 + 2by + b(x - y)T, \quad (18)$$

$$\xi_2 - \xi_1 = 2(x - y)(T - 1).$$

С помощью последних уравнения (16), (17) переписутся в более простой форме

$$\partial x = [1 + 2by + b(x - y)T] \frac{\partial T}{2b(1 - T)T}, \quad (19)$$

$$\partial y = [1 + 2bx - b(x - y)T] \frac{\partial T}{2b(1 - T)T}, \quad (20)$$

сложение которых сводит задачу к интегрированию уравнения

$$\frac{b \partial \xi}{1 + b\xi} = \frac{\partial T}{(1 - T)T}. \quad (21)$$

Полученное уравнение выявляет весьма важное свойство искомой величины T . Оказывается, что ЛО пропускания является функцией лишь одной пере-

менной ξ (не считая, естественно, его зависимость от параметра толщины среды L), являющейся суммой интенсивностей, освещающих среду с двух сторон

$$T(x, y) \equiv T(x + y) \equiv T(\xi). \quad (22)$$

Нетрудно понять, что это является прямым следствием изотропности среды и физического смысла ЛО. Интегрируя левую и правую части уравнения (21) по переменным ξ и T в взаимно согласованных пределах $[0, \xi]$ и $[q, T(\xi)]$, получим

$$\ln(1 + b\xi) = \ln \frac{(1 - q)T(\xi)}{[1 - T(\xi)]q}, \quad (23)$$

откуда следует явное выражение для ЛО пропускания

$$T(\xi) = q \frac{1 + b\xi}{1 + qb\xi} = \frac{2(1 + b\xi)}{\tau_0 + 2(1 + b\xi)}. \quad (24)$$

В последнем равенстве было использовано также (10). Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что полученное решение (24) превращает исходное квазилинейное уравнение (2) в тождество.

ЛО $T(\xi, \tau_0)$ имеет прозрачный физический смысл (рис.1). Он представляет собой вероятность пропускания единичного кванта слоем предельной оптической толщины τ_0 , когда обе стороны среды освещаются излучением с интенсивностями (x, y) (см. рис.1). В линейном случае, как и следовало ожидать, из (24) следует $T_0 \equiv T|_{b=0} = q$.

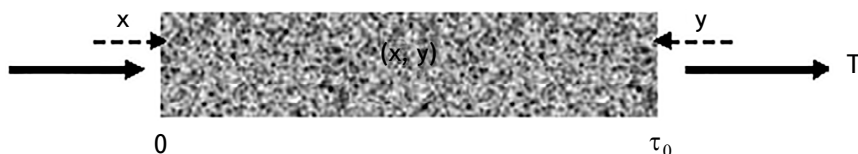


Рис.1. К физической интерпретации ЛО.

В пионерской работе Амбарцумяна [16] (см. также [8]) указывается, что при переходе от линейной задачи пропускания излучения к нелинейному случаю возникает новый эффект, выражающийся в уменьшении исходной предельной оптической толщины при увеличении интенсивности падающего излучения. Причина этого - переход некоторой доли атомов среды в возбужденное состояние, вследствие чего последние перестают поглощать фотоны и среда как бы "просветляется". Это наглядно видно из графиков коэффициента пропускания, приведенных на рис.2.

Рис.2 иллюстрирует эффект просветления среды для различных значений оптической толщины, задаваемой формулой (24) (здесь и ниже в рисунках условно принято $b = 1$). С ростом интенсивности падающего излучения доля

пропущенного средой излучения растет нелинейным образом. Начиная с линейного (при $\xi = 0$) значения q , доля пропущенного излучения монотонно

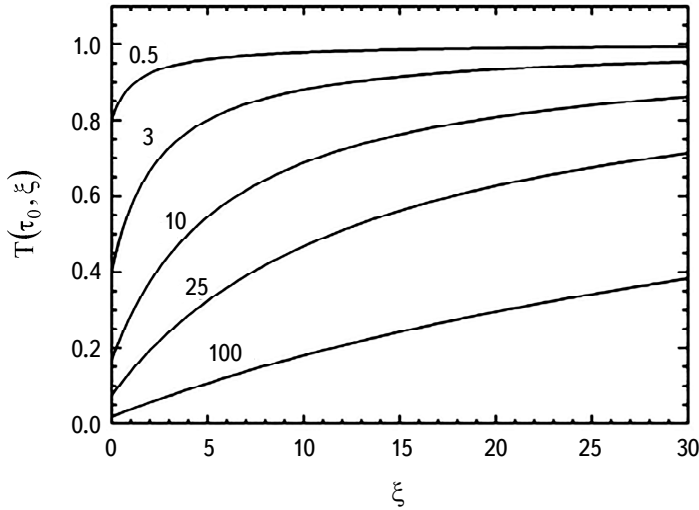


Рис.2. Пропускающая способность среды в зависимости от интенсивности возбуждающего излучения.

стремится к единице, в результате чего среда должна стать полностью прозрачной $\lim_{\xi \rightarrow \infty} T(\xi) = 1$. При этом, чем больше начальная предельная оптическая толщина среды, тем медленнее развивается процесс ее просветления.

С учетом (5) можно также получить в явном виде ЛО отражения

$$R(z) = \frac{1-q}{1+b\xi q} = \frac{\tau_0}{\tau_0 + 2(1+b\xi)}. \quad (25)$$

4. Решение нелинейной задачи отражения-пропускания в явном виде. Соотношения (1) выражают решение исходной нелинейной задачи отражения-пропускания при двустороннем внешнем освещении среды через вспомогательную функцию T . Подстановкой (24) в (1) и с использованием (10) получим раскрытые формы этого решения:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+b\xi)qx + (1-q)y}{1+b\xi q} = \frac{2(1+b\xi)x + \tau_0 y}{\tau_0 + 2(1+b\xi)}, \\ v &= \frac{(1-q)x + (1+b\xi)qy}{1+b\xi q} = \frac{\tau_0 x + 2(1+b\xi)y}{\tau_0 + 2(1+b\xi)}. \end{aligned} \quad (26)$$

При $b=0$ соотношения (26) описывают линейное приближение (см. также формулы (24) и (1)):

$$u_0 \equiv qx + (1-q)y = \frac{2x + \tau_0 y}{\tau_0 + 2}, \quad v_0 \equiv (1-q)x + qy = \frac{\tau_0 x + 2y}{\tau_0 + 2}. \quad (27)$$

Здесь, как и выше, нижним индексом "0" отмечены решения соответствующих линейных задач $u|_{b=0} = u_0$, $v|_{b=0} = v_0$. Сопоставлением формул (27) и (26) нетрудно представить непосредственную связь полей излучения при линейном и нелинейном случаях:

$$u = \frac{u_0 + b\xi qx}{1 + b\xi q} = \frac{(\tau_0 + 2)u_0 + 2b\xi x}{(\tau_0 + 2) + 2b\xi}, \quad v = \frac{v_0 + b\xi qy}{1 + b\xi q} = \frac{(\tau_0 + 2)v_0 + 2b\xi y}{(\tau_0 + 2) + 2b\xi}. \quad (28)$$

Рис.3 показывает зависимость пропущенного излучения $u(x, y, \tau_0)$ от роста интенсивности правостороннего внешнего освещения y для различных оптических толщин ($\tau_0 = 1$ и $\tau_0 = 10$), при $x = 2$.

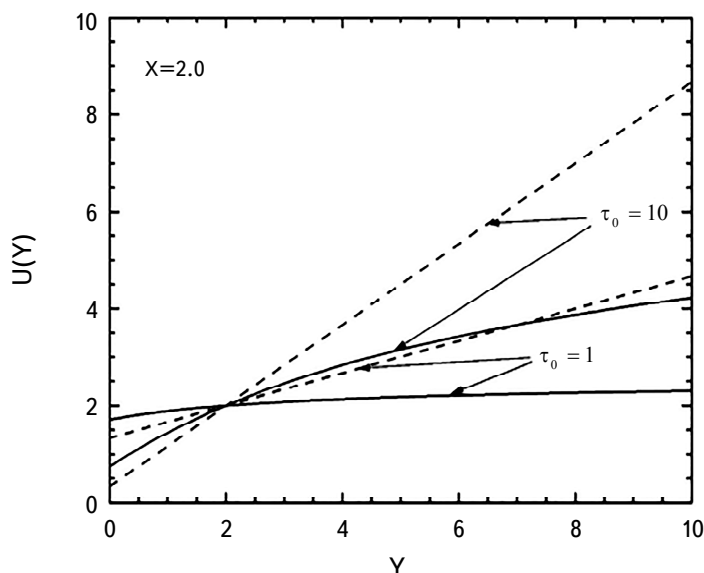


Рис.3. Зависимость пропущенного средой излучения от интенсивности внешнего правостороннего излучения.

Сплошной линией показана кривая, соответствующая нелинейному случаю, а пунктир представляет решение линейной задачи. В нелинейном случае с увеличением мощности внешнего возбуждающего поля рост интенсивности пропущенного средой диффузного излучения сильно замедляется по сравнению с линейным случаем. Более того, расхождение между двумя кривыми монотонно растет. Различие между указанными решениями тем больше, чем толще среда.

Таким образом, использование понятия ЛО в рассмотренном частном случае изотропной и чисто рассеивающей среды позволяет не только выделить линейную структуру решения исследуемой нелинейной задачи, как это имело место в общем случае [9], но также показать, что искомые функции двух энергетических

переменных $u(x, y)$, $v(x, y)$ выражаются через вспомогательную функцию $T(\xi)$ (т.е. через их ЛО), зависящую лишь от одной переменной $\xi \equiv x + y$. При этом величина $T(\xi)$, в свою очередь, с помощью функционального уравнения ПИА (2) определяется аналитически из (24). Важно, что в данном случае, вследствие (6) и (22), отпадает необходимость рассмотрения нелинейной задачи одностороннего освещения среды (7)–(8). Для нахождения $T(\xi)$ достаточно ограничиться предварительным решением лишь линейной задачи пропускания (9). В структуре аналитического решения (28) нелинейной задачи явным образом выделяется полное решение линейного случая (27), что явно указывает на одинаковое асимптотическое поведение обеих задач при $b=0$.

5. *Задача о внутреннем световом режиме среды.* Перейдем теперь к рассмотрению более общей задачи об определении поля излучения $I^\pm$ внутри среды. Ее решение проведем двумя разными способами - в виде "прямой" и "обратной" задач. В первом случае рассматриваемая среда предполагается составной, для компонентов которой заранее известны решения задач отражения и пропускания, а определению подлежит поле на контактной границе их соединения. Во втором - по интенсивностям падающего и отраженного излучения, которые известны лишь на одной границе среды, находится поле излучения внутри среды.

5.1. *Прямая задача.* Пусть известны решения $u(x, y; L)$, $v(x, y; L)$ и $u(x, y; L-l)$, $v(x, y; L-l)$ частных задач отражения-пропускания излучения для двух отдельно взятых сред $[0, l]$ и $[l, L]$, т.е. двух отделенных друг от друга подслоев исходной составной среды $[0, L]$ с толщинами l и $L-l$, соответственно. Требуется определить поле $I^\pm(l; x, y; L)$ на геометрической глубине l внутри составной среды $[0, L]$ (с толщиной $L=l+(L-l)$), полученной путем объединения ее двух упомянутых выше составляющих частей $[0, l]$ и $[l, L]$, когда она освещена извне интенсивностями (x, y) . Знак "+" соответствует направлению роста глубины. Из метода сложения слоев непосредственно следует следующая система (см., напр., [1,2,7-9]):

$$\begin{cases} p = u(x, s; l) \\ s = v(p, y; L-l), \end{cases} \quad (29)$$

где

$$p \equiv I^+(l; x, y; L), \quad s \equiv I^-(l; x, y; L). \quad (30)$$

С учетом соотношений (1) и (24) система (29) переписывается в виде:

$$\begin{cases} (1 + q_l bx)(p-s) + (sp)q_l b = -q_l s + (1 + bx)q_l x \\ (1 + q_{L-l} by)(p-s) - (ps)q_{L-l} b = q_{L-l} p - (1 + by)q_{L-l} y. \end{cases} \quad (31)$$

Умножением первого из уравнений (31) на q_{L-l} , а второго на q_l , и

последующим их сложением нетрудно получить:

$$p-s = \frac{f_2}{f_1}, \quad (32)$$

где введены следующие обозначения ($\xi^\pm \equiv x \pm y$):

$$f_1 \equiv q_l + q_{L-l} - (1 - b\xi^+) q_l q_{L-l}, \quad (33)$$

$$f_2 \equiv \xi^- (1 + b\xi^+) q_l q_{L-l}. \quad (34)$$

Подставляя (32) в первое из уравнений (31), после несложных выкладок приходим к следующему квадратному уравнению

$$As^2 + Bs - C = 0, \quad (35)$$

где

$$A \equiv bq_l B \equiv \left(1 + b \frac{f_2}{f_1}\right) q_l, \quad C \equiv (1 + bx) q_l x - (1 + bq_l x) \frac{f_2}{f_1}. \quad (36)$$

С помощью (30), (32) и (35) окончательно находим

$$I^+(l; x, y; L) = \frac{f_2}{f_1} + I^-(l; x, y; L), \quad I^-(l; x, y; L) = \frac{1}{2bq_l} \left(-B + \sqrt{B^2 + 4bq_l C} \right). \quad (37)$$

Очевидно, что физическому решению уравнения (35) соответствует положительный знак перед корнем, при котором удовлетворяется предельный переход к линейному случаю ($b=0$).

5.2. Определение внутреннего поля излучения как обратная задача. Уравнение переноса для величины $I^\pm \equiv I^\pm(l) \equiv I^\pm(l; x, y; L)$ имеет форму

$$\frac{dI^\pm}{dl} = \pm \alpha(I^+, I^-), \quad (38)$$

где $\alpha(x, y)$ - "интеграл столкновений" данного уравнения Больцмана для фотонного газа. Величина $\alpha(x, y)$ - нелинейный "радиационный отклик" элементарного слоя среды на внешнее, двухстороннее воздействие (x, y) . В классической постановке теории переноса решение уравнения (38) является двухточечной краевой задачей с граничными условиями, заданными на обеих ($l=0, l=L$) границах среды:

$$I^+(0; x, y; L) = x, \quad I^-(L; x, y; L) = y. \quad (39)$$

В краевой задаче (38), (39) определение выходящего излучения и внутреннего поля рассматриваются совместно. Хорошо известно, что граничные задачи достаточно сложны для анализа, поэтому их по возможности сводят к задачам с начальными условиями, т.е. к задачам Коши. Поскольку решение задачи о выходящем излучении уже известно - (28), то с ее помощью нетрудно от двухточечной граничной задачи перейти непосредственно к

задаче с начальными условиями. Для этого достаточно на одной границе среды задать значения падающего и выходящего излучений совместно, т.е. вместо (39) исходить из

$$I^+ \Big|_{l=0} = x, \quad I^- \Big|_{l=0} = v(x, y; L) \quad \text{или} \quad I^+ \Big|_{l=L} = y, \quad I^- \Big|_{l=L} = u(x, y; L). \quad (40)$$

Тогда граничная задача (38)-(39), заменяется одной из двух отдельных равноценных задач Коши (38), (40).

Данная задача решается весьма просто. Учитывая, что в рассматриваемом нами изотропном и консервативном случае интеграл столкновений известен в явном виде [9]

$$\alpha(x, y) = \mp(x - y)k(\xi)/2, \quad (41)$$

уравнение переноса (38) можно переписать в виде

$$\frac{dI^+}{dl} = \frac{dI^-}{dl} = -(I^+ - I^-)k(I^+ + I^-)/2, \quad (42)$$

где $k(\xi)$ дается выражением (12). Введя обозначения

$$I^+ + I^- \equiv H, \quad I^+ - I^- \equiv S, \quad (43)$$

и учитывая (12), получим

$$\frac{dH}{dl} = -Sk_0/(1 + bH), \quad \frac{dS}{dl} = 0, \quad (44)$$

при этом очевидно, что $H \equiv H(l) \equiv H(l, x, y, L)$, $S \equiv S(l) \equiv S(l, x, y, L)$. Интегрируя первое из уравнений (44) с использованием первой пары условий (40), получим

$$\int_{H(0)}^{H(l)} (1 + bH(l'))dH(l') = H(l) - H(0) + \frac{b}{2}[H^2(l) - H^2(0)] = -\int_0^l k_0(l')S(l')dl'. \quad (45)$$

Из второго соотношения (44), а также из (43), (40), будем иметь соответственно

$$S(l) = S(0), \quad H(0) = x + v(x, y; l), \quad S(0) = x - v(x, y; L). \quad (46)$$

В свою очередь, соотношения (46), (43) дают

$$I^+(l) - I^-(l) = x - v(x, y; l). \quad (47)$$

Нетрудно заметить, что с учетом (28) полученное соотношение (47), с точностью до обозначений (30), совпадает с соотношением (32) или (37) прямой задачи. Соотношения (45) с учетом (9) приводят к квадратному уравнению

$$\frac{b}{2}H^2(l) + H(l) - D(l) = 0, \quad (48)$$

где

$$D(l) \equiv \frac{b}{2}H^2(0) + H(0) - S(0) \int_0^l \frac{hv}{2} B_{12} n(l') dl'. \quad (49)$$

С учетом обозначений (45), условий (40) и выражений (28) уравнение (48) переписывается в виде:

$$A(I^-)^2 + BI^- - C = 0, \quad (50)$$

где

$$A \equiv 2b, \quad B \equiv 2[1 + bS(0)], \quad C \equiv D(I) - \frac{b}{2}S^2(0) - S(0). \quad (51)$$

Нетрудно показать, что квадратные уравнения (35) и (50) идентичны.

На рис.4 показана зависимость интенсивности $I^\pm(\tau, x, y, \tau_0) \Big|_{\substack{\tau=0.5 \\ x=y \\ \tau_0=1}} \equiv I^\pm(x) \equiv I(x)$ внутреннего поля излучения на оптической глубине $\tau = 0.5$ слоя оптической толщины $\tau_0 = 1$ в зависимости от роста внешнего излучения x , когда среда со стороны обеих границ освещается пучками равных мощностей $x = y$. Пунктир относится к линейному, а сплошная линия - к нелинейному случаю.

Из рис.4 видно, что с ростом мощности возбуждающего излучения, расхождение между решениями линейной и нелинейной задач становится весьма существенным.

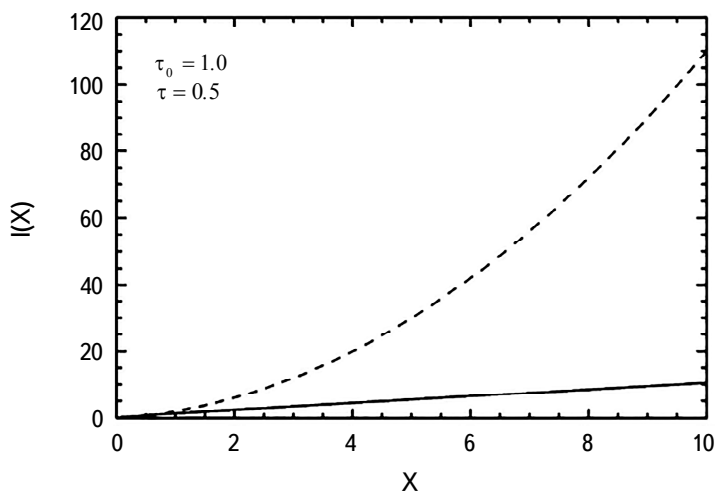


Рис.4. Изменение интенсивности внутри среды.

6. Заключение. Таким образом, на примере аналитического решения простой нелинейной задачи переноса излучения в изотропной, одномерной, консервативно и изотропно-рассеивающей среде при ее двустороннем освещении интенсивными пучками излучения, была продемонстрирована эффективность использования введенного ранее в [10,9,12] понятия ЛО. При этом сначала был найден явный вид указанной величины, а затем с его помощью были

определены интенсивности излучения, выходящего из среды. Далее было построено явное решение более общей задачи об определении поля излучения внутри среды. Очередность определения неизвестных величин сводится к схеме ($\xi \equiv x + y$).

$$T(\xi, \tau_0) \rightarrow u(x, y, \tau_0) \rightarrow I^\pm(\tau, x, y, \tau_0). \quad (52)$$

При решении задачи осуществлялись два разных подхода. Сначала, с применением метода сложения слоев, рассматривалась составная среда с заданными характеристиками отражения-пропускания ее двух составляющих подслоев. А затем, путем формулирования обратной задачи (задачи Коши для уравнения переноса), было восстановлено поле излучения внутри среды по наблюдаемым данным, относящимся одной из двух внешних границ среды.

Рассмотренный выше простой пример показывает, что выявление линейной структуры решения нелинейной задачи теории переноса, посредством введения понятия линейного образа искомого решения, эффективно упрощает процесс его поиска, а в некоторых простых случаях позволяет получить решение аналитически. Анализ реальных полей диффузного излучения, полученных в линейном приближении, содержит опасность получения завышенных оценок значений как для интенсивностей диффузного поля излучения, так и оптических параметров среды, даже при сравнительно небольших значениях внешнего возбуждающего излучения.

Автор искренне признателен профессору А.Г.Никогосяну за интерес к данной работе.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна,
e-mail: hovpik@gmail.com, hovpik@bao.sci.am

ANALYTICAL SOLUTION OF THE NON-LINEAR PROBLEM OF RADIATION DIFFUSION IN ONE-DIMENSIONAL PURE SCATTERING MEDIUM. I

H.V.PIKICHYAN

A simple example of non-linear problem of reflection and transmission is treated for a one-dimensional isotropic medium of finite geometrical thickness in the case of conservative and isotropic scattering. It is shown the efficiency of the method of linear images (LI) developed previously by the author in solving non-

linear problems of radiative transfer. A closed-form explicit expression for the LI is obtained which is used in constructing explicit closed-form solutions for both the problem of reflection-transmission in the case of two-sided illumination of the medium boundaries and the problem of determination of the internal field of radiation. The latter problem is solved for two mutually opposite formulations - "direct" and "inverse". Numerical results illustrate the discrepancy between the linear and non-linear cases of considered problems.

Keywords: *radiative transfer: non-linear problem*

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В.Пикичян, *Астрофизика*, **53**, 285, 2010, (*Astrophysics*, **53**, 251, 2010).
2. О.В.Пикичян, *Астрофизика*, **59**, 131, 2016, (*Astrophysics*, **59**, 114, 2016).
3. О.В.Пикичян, *Астрофизика*, **59**, 309, 2016, (*Astrophysics*, **59**, 272, 2016).
4. H.Pikichian, pp.226-232, in: Proc. of international conf. on "Lasers'97" (New Orleans, LA, December 15-19, 1997), Eds. J.J.Carrol, T.A.Goldman, STS press, McLEAN, VA, 1998, 1011p.
5. H.V.Pikichian, pp.302-315, in: Proc. of the Conf. "Evolution of Cosm. Obj. through their Phys. Activity" (dedic. to V.Ambartsumian's 100th anniversary, 15-18 sept. 2008 Yerevan-Byurakan, Armenia), Eds. H.Harutyunian, A.Mickaelian, Y.Terzian, Publ. House of NAS RA, Yerevan, 2010, 356p.
6. В.А.Амбарцумян, *Изв. АН Арм. ССР, Естеств. науки*, N1-2, 31-36, 1944.
7. В.А.Амбарцумян, *ДАН Арм. ССР*, **38**, N4, 225-230, 1964.
8. В.А.Амбарцумян, с.91-104, в кн.: "Теория звездных спектров", под. ред. В.В.Соболева и др., М., Наука, 1966, 388с.
9. H.V.Pikichyan, *JQSRT*, **183**, 113, 2016.
10. О.В.Пикичян, с.48-49, в сб.: "Пятое Росс.-Арм. Совещ. по мат. физ., комплексному анализу и смежным вопросам" (28 сент. - 3 окт., 2014, Ереван, Армения), Тезисы докладов, , Изд. НАН РА, Ереван, 2014, 56с.
11. H.V.Pikichyan, pp.231-237, in: "Non-Stable Universe: Energetic Resources, Activity Phenomena, and Evolutionary Processes", Proc. of Intern. Symp. dedicated to the 70th anniversary of the BAO, held at 19-23 Sept. 2016 in Yerevan-Byurakan, Armenia, ASP Conference Series, **511**, Eds.: A.M.Mickaelian, H.A.Harutyunian, E.H.Nikoghosyan, Astron. Soc. Pacif., San Francisco, 2017, 314p.
12. H.V.Pikichyan, pp.65-72, in: Radiation mechanisms of astrophysical objects: classics today, Proc. of the cof. in honor of the 100th birthday of Academician V.V.Sobolev (St. Petersburg, Sept. 21-25, 2015), Eds.: V.P.Grinin, H.Harutyunian, V.B.II'in, A.F.Kholtygin, A.Nioghossian, Publ. comp. "Edit Print", Yerevan,

2017, 460р.

13. *О.В.Пикичян*, с.64-67, в сб.: "Седьмое Росс.-Арм. Совещ. по мат. физ., комплексному анализу и смежным вопросам" (9-15 сент., 2018, Ереван, Армения), Тезисы докладов, Ереван, Изд. "Гитутюн", 2018, 84с.
14. *H.V.Pikichyan*, report in Conf. "Instability Phenomena and Evolution of the Universe", devoted to Viktor Ambartsumian's 110th anniversary, (Byurakan Astrophysical Observatory, Armenia, Sept 17-21, 2018), Conf. Proc. will appear in "Comm. of BAO".
15. *В.В.Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, М., Наука, 1969, 472с.
16. *В.А.Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, **39**, 159, 1964.