АСТРОФИЗИКА

ТОМ 62 ФЕВРАЛЬ, 2019 ВЫПУСК 1

ЭФФЕКТ МАССЫ НЕЙТРИНО В КОСМОЛОГИИ

Д.И.НАГИРНЕР, Д.Г.ТУРИЧИНА

Поступила 5 ноября 2018
Принята к печати 12 декабря 2018

Оценивается влияние наличия малой массы нейтрино на свойства космологического нейтринного газа и на эволюцию Вселенной. Сначала рассчитываются характеристики равновесного газа нейтрино и находятся температуры, до которых их можно считать ультрарелятивистскими при различных возможных их массах. Прослеживается эволюция космологических нейтрино любого типа при разных значениях их массы. Определено, до каких красных смещений нейтрино остаются ультрарелятивистскими. Сделаны оценки эффективной температуры нейтринного газа и влияния учета наличия масс у нейтрино на описание темпа расширения Вселенной.

Ключевые слова: *Космологические нейтрино: массы нейтрино: эволюция Вселенной*

1. *Введение.* Как известно, существование частиц, названных впоследствии Энрико Ферми нейтрино, было предположено В.Паули в 1930г. (он их называл нейтронами). Это было сделано в частном письме участникам конференции в Тюбингене (опубликовано в [1]) и в 1931г. в докладе на заседании Американского физического общества в Пасадене. Целью такого предположения явилось желание обеспечить выполнение закона сохранения энергии при бета-распаде некоторых ядер. Аналогичная проблема возникает при распаде нейтрона на протон и электрон. Среднее время жизни свободного неподвижного нейтрона составляет $\bar{t}_N = 14.7$ мин. (период полураспада $t_{1/2} = \ln(2)\bar{t}_N = 10.2$ мин.). Вылетающий при таком процессе электрон уносит энергию, однако, ее оказывалось меньше, чем разность между энергиями покоя нейтрона и протона, а распределение энергий было случайным. Введением нейтрино разрешалось еще одно несоответствие, а именно, устранялось несоблюдение условия сохранения момента, а именно, спина. Трудность прямого обнаружения такой частицы заключалась в очень слабом ее взаимодействии с другими частицами и ядрами (слишком малые сечения реакций), поэтому ее существование следовало из условия сохранения энергии, импульса и момента при экспериментах с реакциями распада. Впоследствии гипотеза Паули полностью подтвердилась, нейтрино было зафиксировано на ускорителе в 1953г. в реакции захвата нейтрино, противоположной его

испусканию [2]. Окончательное заключение о существовании нейтрино и антинейтрино было сделано теми же авторами несколько позже [3]. В 1995г. один из авторов (F.Raines) получил Нобелевскую премию по физике за экспериментальное обнаружение нейтрино. История этого предсказания и подтверждения его справедливости описаны в статье самого Паули [4]. Подробное описание вклада последующих работ Паули в теорию β -распада и общей проблемы нейтрино содержится в обзоре [5].

В настоящее время наблюдаются солнечные нейтрино и нейтрино космических лучей на нескольких нейтринных обсерваториях, в частности, на Ледяном кубе (Ice Cube) со стороной 1 км в Антарктиде [6].

Свойства нейтрино достаточно подробно изучены. Существуют нейтрино и соответствующие им антинейтрино трех типов (ароматов): электронные, мюонные и тау-нейтрино. При этом долгое время считалось, что масса нейтрино точно равна нулю, как у фотона. Однако опыты с так называемыми осцилляциями нейтрино, когда они переходят из одного типа в другой, свидетельствуют о наличии у нейтрино конечных масс [7-9] (Нобелевская премия по физике 2015г. T.Kajita и A.B.McDonald). Эти массы по сравнению с массами других частиц очень малы и определить их величину очень трудно. Возможные последствия отличия масс нейтрино от нуля для астрономии обсуждались в статье [10]. Однако массы нейтрино оказались значительно меньше, чем предполагалось там. По наблюдениям осцилляций определяются разности квадратов масс, другими методами - суммы масс всех типов. По последним оценкам $m_{\nu e}^2 - m_{\nu\mu}^2 \approx \left| m_{\nu\mu}^2 - m_{\nu\tau}^2 \right| < 0.6 + 0.7$ (эВ)^2 [11], а сумма масс нейтрино не превосходит ≈ 0.1 эВ [12] (все в энергетических единицах).

Существование космологических нейтрино следует из теории горячей Вселенной, согласно которой на ранних этапах ее эволюции при высокой температуре, в находящейся в состоянии термодинамического равновесия материи должны были происходить уравновешенные реакции слабого взаимодействия с испусканием и поглощением нейтрино (поэтому их химический потенциал равен нулю). При понижении температуры вследствие космологического расширения пространства нейтрино отделились от остального вещества и распространяются свободно. Зафиксировать эти нейтрино, по-видимому, если и окажется когда-нибудь возможным, то очень нескоро. Возможно, удастся наблюдать косвенные проявления присутствия нейтрино.

Есть еще одно осложнение в теории нейтрино: если фиксируется масса нейтрино, то их аромат неопределен и наоборот. Можно сказать, что нейтрино это не отдельные частицы, а суперпозиция частиц и ее состояние задается матрицей 3×3.

Имеются некоторые свидетельства, что существуют нейтрино еще одного, четвертого типа, называемые стерильными, так как они не участвуют ни в

каких взаимодействиях, включая слабые, кроме гравитационного. Эти нейтрино, имеющие большую массу, чем 3 упомянутых типа, как предполагается, могут составлять, по крайней мере, часть темного вещества Вселенной и, следовательно, они учитываются именно, как эта компонента (см. [13]).

В последнее время появляются работы, посвященные расчетам эволюции состава нейтрино в ходе космологического расширения, если задан их начальный состав (см. [14]). Обсуждается влияние нейтрино на лептогенезис [15], на формирование крупномасштабной структуры Вселенной [16,17], на L_α -лес [18], на анизотропию и поляризацию реликтового излучения [19], на изменение со временем красных смещений [20] и др. [11] (это последние публикации в архиве, где даются также обзоры предшествующих работ).

Цель настоящей заметки более простая. Как кажется, представляет интерес оценить влияние нейтрино на ход эволюции Вселенной, а также, найти более точные значения температуры нейтринного газа, чем при предположении безмассовости нейтрино. При этом достаточно допустить, что при термодинамическом равновесии соответствие массы и аромата достигается, т.е. все нейтрино и антинейтрино можно рассматривать независимо.

Начнем с изложения теории равновесных нейтрино в принятом приближении.

2. *Равновесный нейтринный газ.*

2.1. ***Равновесные распределения нейтрино.*** Концентрация n_ν, массовая плотность ρ_ν и давление P_ν фермионов со спином 1/2 и массой m_ν при равном нулю химическом потенциале, каковыми являются нейтрино всех типов, в состоянии термодинамического равновесия определяются формулами Ферми-Дирака (см., например, [21]):

$$n_\nu = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\,\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(p)/k_B T_\nu}+1}, \tag{1}$$

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{h^3 c^2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon(p)\,p^2\,\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(p)/k_B T_\nu}+1}, \tag{2}$$

$$P_\nu = \frac{8\pi}{3h^3}\int_0^\infty \frac{v\,p^3\,\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(p)/k_B T_\nu}+1}. \tag{3}$$

Здесь использованы общепринятые обозначения, напомним только, что $\varepsilon(p)=c\sqrt{m_\nu^2 c^2+p^2}$ - полная энергия (включая энергию покоя) частицы с импульсом p, а $v=c^2\,p/\varepsilon(p)$ - ее скорость. При нулевом химическом потенциале плотность энтропии, т.е. энтропия единицы объема выражается через две приведенные величины:

$$\bar{S}_\nu = \frac{s_\nu}{V} = \frac{\rho_\nu c^2 + P_\nu}{T_\nu} = \frac{8\pi}{h^3}\frac{1}{T_\nu}\int_0^\infty \left(\varepsilon(p)+\frac{v\,p}{3}\right)\frac{p^2\,\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(p)/k_B T_\nu}+1}. \tag{4}$$

Произведя замену переменной интегрирования $z = pc/(k_B T)$, перепишем распределения в виде

$$n_\nu = a_n T_\nu^3 G_n(y), \quad G_n(y) = \frac{2}{3\zeta(3)} \int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{e^{\sqrt{z^2+y^2}}+1}, \quad a_n = 12\pi\zeta(3)\left(\frac{k_B}{hc}\right)^3 = \frac{15.2}{(\text{см К})^3} \tag{5}$$

$$\rho_\nu = a_\rho T_\nu^4 G_\rho(y), \quad G_\rho(y) = \frac{120}{7\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^2\,dz\sqrt{z^2+y^2}}{e^{\sqrt{z^2+y^2}}+1},$$

$$a_\rho = \frac{7}{15}\pi^5 \frac{k_B^4}{h^3 c^3} = \frac{7}{8}\frac{a_{SB}}{c^2} = 7.37\cdot 10^{-36}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3\text{К}^4} \tag{6}$$

$$P_\nu = a_P T_\nu^4 G_P(y), \quad G_P(y) = \frac{120}{7\pi^4} \int_0^\infty \frac{z^4}{\sqrt{z^2+y^2}} \frac{dz}{e^{\sqrt{z^2+y^2}}+1},$$

$$a_P = \frac{c^2}{3} a_\rho = \frac{7}{24} a_{SB} = 2.21\cdot 10^{-15}\,\frac{\text{г}}{\text{см с}^2\text{К}^4}. \tag{7}$$

Здесь и далее $\zeta(x)$ - значения дзета-функции Римана, а $y = m_\nu c^2/k_B T_\nu$ - безразмерная обратная температура нейтринного газа. Коэффициенты в формулах для ρ_ν и P_ν выражаются через постоянную Стефана $a_{SB} = (8\pi^5/15)(k_B^4/h^3 c^3) = 7.5657\cdot 10^{-15}$ г/(см с^2 К^4).

Графики функций $G_n(y)$, $G_\rho(y)$ и $G_P(y)$ приведены на рис.1.

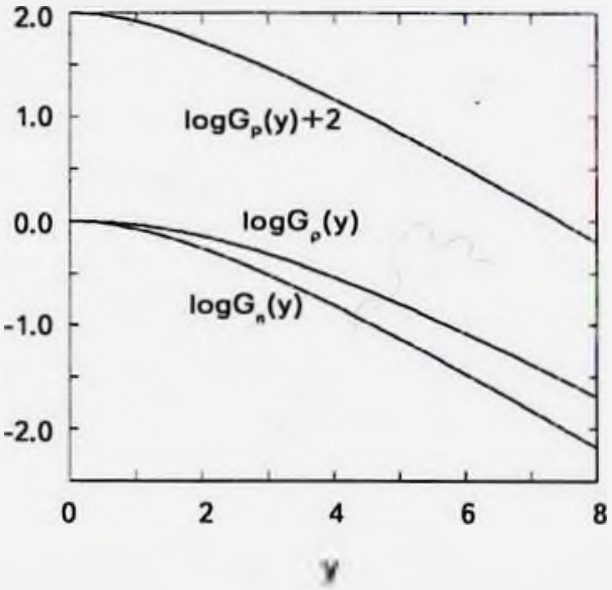

Рис.1. Функции $\log G_n(y)$, $\log G_\rho(y)$ и $\log G_P(y)$. К последней добавлено 2, чтобы отделить от остальных.

2.2. *Предельные случаи.* Рассмотрим крайние случаи распределений.

2.2.1. *Ультрарелятивистский предел.* При $y = 0$ три множителя в (5)-(7) обращаются в единицу: $G_n(0) = G_\rho(0) = G_P(0) = 1$, так что при $y << 1$

предельные формулы получаются просто после такой замены этих множителей.

В распределения входит y^2, однако в разложении по y^2 можно получить только слагаемые первого порядка, так как уже вторые производные по y^2 при $y=0$ логарифмически расходятся. Разложения имеют простой вид:

$$G_n(y)\sim 1-\frac{\ln 2}{3\zeta(3)}y^2+\frac{y^3}{18\zeta(3)},\quad G_p(y)\sim 1-\frac{5}{7}\frac{y^2}{\pi^2},\quad G_P(y)\sim 1-\frac{15}{7}\frac{y^2}{\pi^2}. \tag{8}$$

Входящее в первую формулу значение $\zeta(3)=1.20205690316$. Коэффициенты при y и y^3 у двух последних функций равны нулю, но у первой слагаемое с y^3 сохранилось. Приведем также формулу для плотности энтропии:

$$s\sim a_s T_\nu^3\left(1-\frac{15}{14}\frac{y^2}{\pi^2}\right),\quad a_s=\frac{28}{45}\pi^5\frac{k_B^4}{h^3c^3}=8.82\cdot 10^{-15}\frac{\text{г}}{\text{см с}^2\text{К}^4}. \tag{9}$$

2.2.2. ***Нерелятивистский предел.*** В противоположном случае, когда $y>>1$, справедливы разложения по функциям Макдональда:

$$G_n(y)=\frac{2}{3\zeta(3)}y^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}K_2((n+1)y), \tag{10}$$

$$G_p(y)=\frac{120}{7\pi^4}y^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{3}{(n+1)y}K_2((n+1)y)+K_1((n+1)y)\right], \tag{11}$$

$$G_P(y)=\frac{360}{7\pi^4}y^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}K_2((n+1)y). \tag{12}$$

Из них получаются асимптотики

$$G_n(y)\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{3\zeta(3)}y^{3/2}e^{-y}\left(1+\frac{15}{8y}\right),\quad G_p(y)\sim\frac{60}{7\pi^4}\sqrt{2\pi}\,y^{5/2}e^{-y}\left(1+\frac{27}{8y}\right),$$
$$G_P(y)\sim\frac{180}{7\pi^4}\sqrt{2\pi}\,y^{3/2}e^{-y}. \tag{13}$$

2.3. ***Средняя энергия частиц и степень "релятивизма".*** Представляет интерес найти среднюю энергию нейтрино

$$\bar{\varepsilon}_\nu(y)=\frac{\rho_\nu}{n_\nu}c^2=a_{pn}k_BT_\nu\frac{G_p(y)}{G_n(y)},\quad a_{pn}=\frac{7\pi^4}{180\zeta(3)}=3.1514. \tag{14}$$

При малых y средняя энергия намного больше энергии покоя $\bar{\varepsilon}_\nu(y)\sim a_{pn}k_BT_\nu=a_{pn}m_\nu c^2/y$. Напротив, если $y\to\infty$, средняя энергия стремится к энергии покоя нейтрино $m_\nu c^2$.

Ввиду приведенных оценок средней энергии естественно ввести безразмерную величину, характеризующую близость состояния нейтринного газа к предельным:

$$r = y\frac{\rho_\nu - n_\nu}{n_\nu} = \frac{a_{pn}G_p(y) - yG_n(y)}{G_n(y)} \to \begin{cases} a_{pn} - y & \text{при} \quad y \ll 1, \\ 3/2 & \text{при} \quad y \gg 1. \end{cases} \tag{15}$$

На рис.2 показан ход изменения величины r в зависимости от безразмерной температуры y и для трех значений массы нейтрино - в зависимости от температуры.

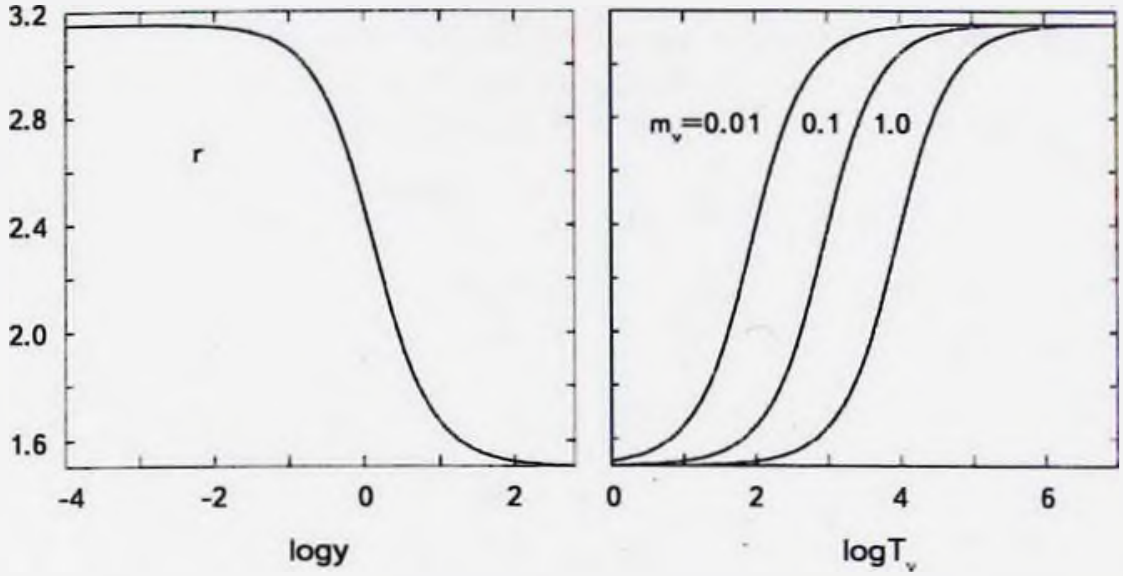

Рис.2. Степень релятивизма в зависимости от $\log y$ и $\log T_\nu$ (при трех значениях массы частиц в эВ).

Задав предельное отклонение параметра от асимптотического значения $a_{pn} - r < \varepsilon$, получим простые оценки: $y < \varepsilon$ и $T_\nu > m_\nu c^2 / k_B \varepsilon$.

Теперь перейдем к космологическим моделям с учетом нейтрино.

3. *Космологическая модель с безмассовыми нейтрино.*

3.1. ***Параметры модели.*** Согласно космологической модели, принятой сейчас в качестве наиболее адекватной реальной Вселенной и называемой Стандартной или ΛCDM, пространство плоское. Основными компонентами этой модели являются пылевидное вещество, включающее видимое (барионное) и темное, и так называемая темная энергия, соответствующая космологическому слагаемому Эйнштейна.

В эту модель легко могут быть включены еще две компоненты, а именно, излучение и ультрарелятивистские нейтрино. Излучение называется реликтовым, так как оно осталось от эпох эволюции Вселенной, когда она была горячей. После эпохи рекомбинации излучение отделилось от остальной материи и, свободно распространяясь и оставаясь чернотельным, остывает. Современное значение температуры реликтового излучения $T_0 = 2.726$ K является самой точной величиной, известной в космологии. Такой температуре отвечает плотность энергии,

определяемая по формуле Стефана-Больцмана, $a_{SB}T_0^4 = 4.17\cdot10^{-13}$ эрг/см^3 и соответствующая плотность массы $\rho_\gamma^0 = a_{SB}T_0^4/c^2 = 4.65\cdot10^{-34}$ г/см^3.

С меньшей точностью (несколько процентов) известна постоянная Хаббла, примем, что $H_0 = 70$ км/(с Мпк) $= 2.27\cdot10^{-18}$ с$^{-1}$. Тогда современная критическая плотность $\rho_c^0 = 3H_0^2/8\pi G = 9.21\cdot10^{-30}$ г/см^3, так что доля излучения в ней $\Omega_\gamma^0 = \rho_\gamma^0/\rho_c^0 = \quad = 5.06\cdot10^{-5}$.

Доля темной энергии по определениям [22] составляет 0.721±0.035. Здесь примем, что $\Omega_\Lambda^0 = 0.72$, так что $\rho_\Lambda^0 = 6.63\cdot10^{-30}$ г/см^3.

Плотность пылевидного вещества определяется как дополнение до полной плотности к сумме плотностей темной энергии, излучения и нейтрино. Последнюю надо найти.

Связь температур нейтрино и излучения была получена авторами [23], когда масса нейтрино считалась равной нулю, так что они должны были быть ультрарелятивистскими, как и фотоны. Воспроизведем рассуждение этих авторов.

3.2. *Температура и плотность безмассовых нейтрино.* Согласно теории горячей Вселенной в начальные этапы ее эволюции вся материя находилась в состоянии термодинамического равновесия с большим набором разнообразных составляющих ее частиц (в широком смысле). В ходе космологического расширения, при котором все линейные масштабы Вселенной (расстояния) увеличиваются пропорционально масштабному множителю a, и остывания материи, некоторые ее компоненты исчезали, аннигилируя (например, антипротоны с протонами, мезоны противоположных знаков, позитроны с электронами) или объединяясь с другими и образуя новые компоненты (например, из кварков сформировались нуклоны и пи-мезоны, нейтроны с протонами в ходе первичного нуклеосинтеза образовали ядра простейших элементов). Другие компоненты переставали взаимодействовать между собой и с остальными, отделялись и начинали свободный разлет. Первыми оторвались гипотетические частицы гравитоны - кванты гравитационного поля. Следующими, при падении температуры до значений порядка 10^{10} К, отделились нейтрино.

Хотя процесс их отделения занимает какой-то промежуток времени, примем, что это произошло мгновенно при температуре T_ν^* и значении масштабного множителя a_ν^*. Обозначим через $y_\nu^* = m_\nu c^2/k_B T_\nu^*$ безразмерную обратную температуру в момент отделения. Разные типы нейтрино, вообще говоря, отделяются в разные периоды, но за каждым из них можно следить отдельно от других, так что рассмотрим какой-нибудь один тип нейтрино или антинейтрино.

Температура при отделении нейтрино T_ν^* была достаточно высока, так что все компоненты вещества были ультрарелятивистскими и их энтропии были пропорциональны третьей степени температуры. Нас интересуют электроны,

позитроны, нейтрино и фотоны. Энтропии трех газов фермионов в момент отделения нейтрино были одинаковы (9), а энтропия фотонного газа отличалась множителем. Указанные энтропии в объеме V_* тогда были

$$S_{e^-}^* = S_{e^+}^* = \frac{7}{6} a_{SB} V_* \left(T_\nu^*\right)^3, \quad S_\gamma^* = \frac{4}{3} a_{SB} V_* \left(T_\nu^*\right)^3. \tag{16}$$

Космологическое расширение происходит как адиабатический процесс, при котором энтропия определенного объема не меняется. Следовательно, температура всех ультрарелятивистских газов изменяется обратно пропорционально масштабному множителю.

После отделения нейтрино разлетались свободно, а электроны и позитроны продолжали взаимодействовать. Когда температура стала существенно ниже, чем $6 \cdot 10^9$ К, все позитроны аннигилировали с электронами, и аннигилировавшие пары передавали свою энергию, включая энергию покоя, фотонному газу. В результате этого и энтропия электрон-позитронных пар перешла к фотонам. Фотоны продолжали взаимодействовать с оставшимися электронами и газ фотонов пришел к равновесному состоянию, повысив свою температуру, которая впоследствии уменьшалась в соответствии с общим расширением пространства. Энтропия излучения после этого сохранялась:

$$S_\gamma = \left(\frac{4}{3} + 2\frac{7}{6}\right) a_{SB} V_* \left(T_\nu^*\right)^3 = \frac{11}{3} a_{SB} V_* \left(T_\nu^*\right)^3 = \frac{4}{3} a_{SB} V T^3. \tag{17}$$

Энтропия нейтринного газа не изменялась, т.е. определялась формулой (9):

$$S_\nu = \frac{7}{6} a_{SB} V_* \left(\frac{a}{a_\nu^*}\right)^3 T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{SB} V T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{SB} V_* \left(T_\nu^*\right)^3. \tag{18}$$

Вследствие космологического расширения объемы в моменты, которым соответствуют значения масштабного множителя a_ν^* и a, связаны соотношением $V_*\left(a_\nu^*\right)^3 = V a^3$. Температуре T_ν сопоставим безразмерную обратную температуру $y_\nu = m_\nu c^2 / k_B T_\nu$.

Подставив в (17) произведение $V_*\left(T_\nu^*\right)^3$ из (18), получим связь между температурами фотонного и нейтринного газов после аннигиляции электрон-позитронных пар:

$$\frac{11}{3} a_{SB} V T_\nu^3 = \frac{4}{3} a_{SB} V T^3, \quad T^3 = \frac{11}{4} T_\nu^3, \quad T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}}\, T = 0.7137658\,56\,T. \tag{19}$$

В частности, современная температура безмассовых нейтрино $T_\nu^0 = \sqrt[3]{4/11}\, T_0 = 1.95$ К, так что плотность их массы (всех типов вместе) и доля в критической плотности

$$6\rho_\nu^0 = 6 a_\rho \left(T_\nu^0\right)^4 = 6.35 \cdot 10^{-34}\ \text{г/см}^3, \quad \Omega_\nu^0 = 6\frac{\rho_\nu^0}{\rho_c^0} = 6.90 \cdot 10^{-5}. \tag{20}$$

Ввиду одинаковой зависимости от температуры плотностей излучения и

безмассовых нейтрино их можно объединить и определить совместный вклад излучения и таких нейтрино в критическую плотность:

$$\rho^0_{r\nu} = \rho^0_r + 6\rho^0_\nu = 1.10\cdot 10^{-33}\ \text{г/см}^3, \quad \Omega^0_{r\nu} = \Omega^0_r + \Omega^0_\nu = 1.196\cdot 10^{-4}. \qquad (21)$$

Плотность и доля пылевидного вещества при том же условии равны разностям

$$\rho^0_d = \rho^0_c - \rho^0_\Lambda - \rho^0_{r\nu} = 2.58\cdot 10^{-30}\ \text{г/см}^3, \quad \Omega^0_d = 1 - \Omega^0_\Lambda + \Omega^0_{r\nu} = 0.27988 \approx 0.28. \qquad (22)$$

3.3. *Основные уравнения модели.* Два уравнения Фридмана для масштабного множителя при плоском пространстве и безмассовых нейтрино имеют вид

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g a, \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_t a^2. \qquad (23)$$

Зависимость плотностей от a подразумевается.

В уравнения входят полная и гравитирующая плотности массы компонент:

$$\rho_t = \rho_d + \rho_\Lambda + \rho_{r\nu}, \quad \rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}, \quad P_t = P_d + P_\Lambda + P_{r\nu}, \qquad (24)$$

где P_t - полное давление всех компонент (в том числе шести типов нейтрино). Ввиду соблюдения уравнений состояния компонент

$$P_d = 0, \quad P_r = \frac{c^2}{3}\rho_r, \quad P_\nu = \frac{c^2}{3}\rho_\nu, \quad P_{r\nu} = \frac{c^2}{3}\rho_{r\nu}, \quad P_\Lambda = -c^2\rho_\Lambda, \qquad (25)$$

гравитирующая плотность переписывается через плотности компонент так:

$$\rho_g = \rho_d + 2\rho_{r\nu} - 2\rho_\Lambda. \qquad (26)$$

Условием совместности уравнений (23) является равенство

$$\dot{\rho}_t = -3\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)H, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}, \qquad (27)$$

которое отражает адиабатичность космологического расширения и выполняется для каждой компоненты отдельно. Интегрируя эти уравнения, получаем соотношения, описывающие эволюцию плотностей компонент:

$$\rho_d = \frac{\rho^0_d}{a^3} = \rho^0_c\frac{\Omega^0_d}{a^3}, \quad \rho_r = \frac{\rho^0_r}{a^4} = \rho^0_c\frac{\Omega^0_r}{a^4}, \quad \rho_{r\nu} = \frac{\rho^0_{r\nu}}{a^4} = \rho^0_c\frac{\Omega^0_{r\nu}}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho^0_\Lambda. \qquad (28)$$

Зависимости плотности массы и давления каждого типа безмассовых нейтрино от a можно представить в виде

$$\rho_\nu(a) = a_\rho T_\nu^4 = a_\rho\left(\frac{a^*_\nu}{a}T^*_\nu\right)^4, \quad P_\nu(a) = \frac{c^2}{3}\rho_\nu(a). \qquad (29)$$

3.4. *Решение уравнений.* Соотношения (28) позволяют второе уравнение (23) переписать в виде

$$H=\frac{\dot a}{a}=\frac{H_0}{a^2}\sqrt{\Omega(a)},\quad \Omega(a)=\Omega^0_{\nu\nu}+\Omega^0_d\,a+\Omega^0_\Lambda\,a^4. \tag{30}$$

Разделение переменных и интегрирование дают связь масштабного множителя со временем:

$$H_0 t=\int_0^a \frac{a\,\mathrm{d}\,a}{\sqrt{\Omega(a)}}. \tag{31}$$

При $a=1$ получается возраст Вселенной $t_0=13.7\cdot10^9$ лет. При $a\to\infty$ возраст Вселенной $\tilde t\sim(\ln a)/H_\Lambda$, где $H_\Lambda=\sqrt{\Omega^0_\Lambda}\,H_0=59.397$ км/с Мпк $=1.9249\cdot10^{-18}\,\mathrm{c}^{-1}$, что отражает экспоненциальный рост масштабного множителя на временах $t>1/H_\Lambda$, т.е. вторую инфляцию.

Теперь откажемся от безмассовости нейтрино и посмотрим, к каким последствиям этот отказ приводит. Для простоты примем, что все нейтрино одинаковы, т.е. имеют равные массы и отделились от остальной материи одновременно.

4. *Распределения космологических нейтрино с ненулевой массой.*

4.1. *Концентрация космологических нейтрино.* Плотность массы космологических нейтрино с массой (их часто называют массивными) зависит от масштабного множителя a более сложно, чем плотность безмассовых нейтрино. Для получения этой зависимости рассмотрим распределения трех величин, как и при термодинамическом равновесии. Для различения будем отмечать эти величины титлом. Начнем с концентрации.

Как уже говорилось, в некоторый момент расширения Вселенной t^*_ν нейтрино перестают взаимодействовать с другими частицами и между собой, отделяются от остальной материи и распространяются свободно. При отделении все сорта нейтрино были равновесными, после этого равновесие нарушается.

Так как нейтрино после отделения распространяются свободно, их концентрация убывает только за счет увеличения объема при космологическом расширении:

$$\bar n_\nu(a)=\left(\frac{a^*_\nu}{a}\right)^3\bar n_\nu(a^*_\nu)=\left(\frac{a^*_\nu}{a}\right)^3\frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty\frac{p_*^2\,\mathrm{d}\,p_*}{e^{c(p_*)/(k_BT^*_\nu)}+1}=\frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty\frac{p^2\,\mathrm{d}\,p}{e^{c(ap/a^*_\nu)/(k_BT^*_\nu)}+1}. \tag{32}$$

Из приведенных формул следует, что средние числа заполнения нейтринных состояний, выражаемые дробью $1/[e^{c(ap/a^*_\nu)/(k_BT^*_\nu)}+1]$, остаются неизменными, изменяются только импульсы нейтрино по тому же закону, что и частоты фотонов: $p=\frac{a^*_\nu}{a}p_*$. Этот факт в монографии [24] выводится путем расчета изменения импульса при локальном преобразовании от сопутствующей частице системы отсчета к бесконечно близкой по расширению. Произведение $\bar n_\nu(a)V$ также не меняется в ходе космологического расширения.

4.2. *Плотность массы и давление*. При переходе к распределениям космологических нейтрино в формулах для плотности массы и давления (2)–(3) так же, как и в формуле (1) для концентрации, в знаменателях в показателе экспоненты (и только там) энергию $\varepsilon(p)$ надо заменить на $\varepsilon\left(ap\ a_\nu^*\right)$. После этой замены сделаем замену переменной интегрирования $z=\dfrac{cp}{k_B T_\nu^*}\dfrac{a}{a_\nu^*}$:

$$\bar{n}_\nu(a)=n_\nu(a)G_n\left(y_\nu^*\right),\quad n_\nu(a)=a_n\left(\frac{a_\nu^*}{a}T_\nu^*\right)^3, \tag{33}$$

$$\bar{p}_\nu(a)=\frac{8\pi}{h^3c^3}\int_0^\infty\frac{p^3\,\varepsilon(p)\,\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(ap\ a_\nu^*)/(k_BT_\nu^*)}+1}=p_\nu(a)G_p\left(y_\nu^*,\frac{a}{a_\nu^*}\right), \tag{34}$$

$$\bar{P}_\nu(a)=\frac{8\pi c^2}{3h^3}\int_0^\infty\frac{p^4}{\varepsilon(p)}\frac{\mathrm{d}\,p}{e^{\varepsilon(ap\ a_\nu^*)/(k_BT_\nu^*)}+1}=P_\nu(a)G_P\left(y_\nu^*,\frac{a}{a_\nu^*}\right). \tag{35}$$

Здесь введены функции, аналогичные введенным ранее, но зависящие от двух аргументов:

$$G_\rho(y,A)=\frac{120}{7\pi^4}\int_0^\infty\frac{z^2\sqrt{z^2+(yA)^2}\,\mathrm{d}z}{e^{\sqrt{z^2+y^2}}+1},\quad G_P(y,A)=\frac{120}{7\pi^4}\int_0^\infty\frac{z^4}{\sqrt{z^2+(yA)^2}}\frac{\mathrm{d}z}{e^{\sqrt{z^2+y^2}}+1}. \tag{36}$$

Масса нейтрино входит только в эти функции через аргумент y и при $y=0$ они обращаются в единицы, так что распределения обращаются в справедливые для безмассовых частиц. Функции, входящие в формулы (6)–(7), являются частными случаями (36): $G_\rho(y)=G_\rho(y,1)$, $G_P(y)-G_P(y,1)$.

Можно ввести безразмерную функцию распределения нейтрино

$$f_\nu(z)=\frac{2}{3\zeta(3)}a_n\left(\frac{a_\nu^*}{a}T_\nu^*\right)^3V\frac{z^2}{e^{\sqrt{z^2+(yA)^2}}+1}=\frac{2}{3\zeta(3)}a_n\left(T_\nu^*\right)^3V_*\frac{z^2}{e^{\sqrt{z^2+(yA)^2}}+1}, \tag{37}$$

нормированную по z на число частиц $\bar{n}_\nu(a)V$ в объеме V. Эта функция также не меняется в ходе расширения, как и определяемая через нее H-функция Больцмана

$$H=\int_0^\infty f_\nu(z)\ln f_\nu(z)\mathrm{d}z, \tag{38}$$

что согласуется с адиабатичностью космологического расширения.

4.3. *Свойства распределений*. Функции G_ρ и G_P подчиняются непосредственно проверяемому соотношению:

$$a\frac{\partial G_\rho\left(y,a\ a_\nu^*\right)}{\partial a}=A\frac{\partial G_\rho(y,A)}{\partial A}=G_\rho(y,A)-G_P(y,A), \tag{39}$$

которое может быть использовано для контроля вычислений этих функций. С его помощью легко проверить, что выполняется условие адиабатичности

расширения (27) по отношению к нейтринному газу:

$$\dot{\tilde{\rho}}_\nu(a) = -3\left(\tilde{\rho}_\nu(a) + \frac{\tilde{P}_\nu(a)}{c^2}\right)H. \tag{40}$$

Приняв во внимание, что $\dot{\tilde{\rho}}_\nu(a) = \dot{a}\,\mathrm{d}\tilde{\rho}_\nu(a)/\mathrm{d}a$, а $H = \dot{a}/a$, можно в этом равенстве исключить производную $\dot{a}$ и переписать его в виде равенства

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_\nu(a)}{\mathrm{d}a} = -\frac{3}{a}\left(\tilde{\rho}_\nu(a) + \frac{\tilde{P}_\nu(a)}{c^2}\right), \tag{41}$$

которое также легко проверить.

По смыслу определения параметр $A = a/a_\nu^* \geq 1$, причем с увеличением A интеграл $G_\rho(y, A)$ растет, а $G_P(y, A)$ уменьшается. Значения y_ν^* очень маленькие, так как масса нейтрино мала, а температура при их отделении велика. Напротив, значения параметра A могут быть очень большими, так как в период отделения масштабный множитель очень мал, а $a \geq a_\nu^*$ изменяется до 1 в современную эпоху и до бесконечности в будущем. Произведение $y_\nu^* A = y_\nu^* a/a_\nu^*$ может быть любым.

При небольших y и больших значениях произведения yA справедливы разложения

$$G_\rho(y, A) \sim \frac{yA}{a_{\rho n}}\left[1 + \frac{15}{2}\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)}\frac{1}{y^2A^2} - \frac{945}{16}\frac{\zeta(7)}{\zeta(3)}\frac{1}{y^4A^4}\right], \tag{42}$$

$$G_P(y, A) \sim \frac{120}{7\pi^4}\frac{1}{yA}\left[\frac{45}{2}\zeta(5) - \frac{2835}{8}\frac{\zeta(7)}{y^2A^2} + \frac{240975}{16}\frac{\zeta(9)}{A^4y^4}\right]. \tag{43}$$

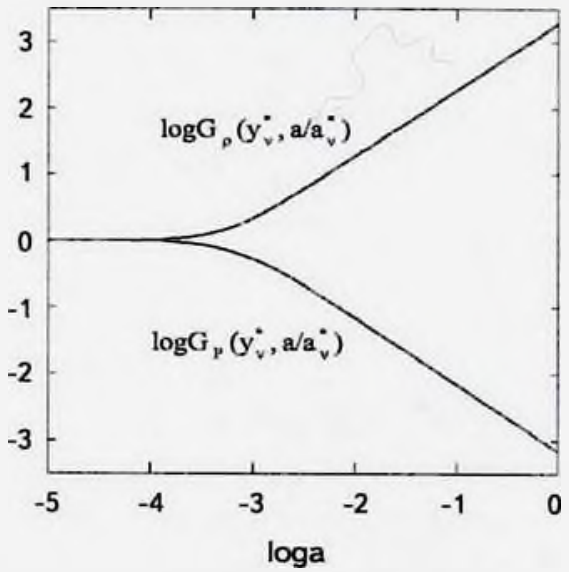

Рис.3. Функции $\log G_\rho(y_\nu^*, a/a_\nu^*)$ и $\log G_P(y_\nu^*, a/a_\nu^*)$ в зависимости от $\log a$.

Первая формула обеспечивает точность лучше 10^{-4} при $Ay>15$, 10^{-5} при $Ay>23$, 10^{-6} при $Ay>34$, 10^{-7} при $Ay>49$, 10^{-8} при $Ay>72$. Точность второй формулы ниже: ее погрешность меньше 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, соответственно при $Ay>13$, 19, 29, 42, 61, 90.

Графики функций $G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right)$ и $G_P\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right)$ приведены на рис.3.

Если бы масса нейтрино была равна нулю, то они были бы ультрарелятивистскими на протяжении всей эволюции Вселенной. Для перехода к этому случаю достаточно положить $y_\nu^* = 0$. Тогда интегралы, входящие в поправочные функции, превратятся в постоянные, а сами функции обратятся в единицы и мы возвратимся к формулам предыдущего раздела.

Можно ввести величину, аналогичную (15) и тоже характеризующую степень релятивизма распределения, но теперь в зависимости от масштабного множителя a:

$$r(a)=y_\nu^*\frac{a}{a_\nu^*}\left[\frac{\tilde{\rho}_\nu(a)}{m_\nu\tilde{n}_\nu(a)}-1\right]=y_\nu^*\frac{a}{a_\nu^*}\left[\frac{a_\rho}{m_\nu a_n}\frac{a_\nu^*}{a}T_\nu^*\frac{G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right)}{G_n\left(y_\nu^*\right)}-1\right]= \\ =a_{\rho n}\frac{G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right)}{G_n\left(y_\nu^*\right)}-y_\nu^*\frac{a}{a_\nu^*}. \tag{44}$$

При $a=a_\nu^*$ эта разность очень близка к $a_{\rho n}$, а при $a\geq 1$ имеет асимптотику

$$r(a)\sim\frac{15}{2}\frac{\zeta(5)}{\zeta(3)}\frac{a_\nu^*}{a}\frac{1}{y_\nu^*}\left[1-\frac{63}{8}\frac{\zeta(7)}{\zeta(5)}\left(\frac{a_\nu^*}{ay_\nu^*}\right)^2\right]. \tag{45}$$

На рис.4 показана зависимость $r(a)$ для четырех значений массы нейтрино в эВ.

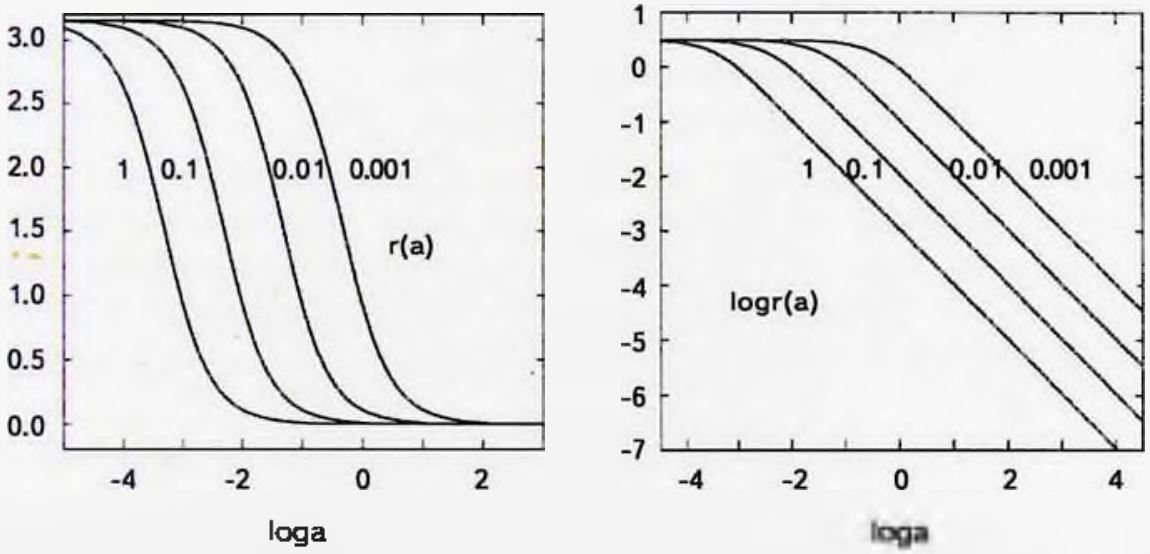

Рис.4. Степень релятивизма космологических нейтрино при четырех значениях массы.

Отличие распределений нейтрино от распределений излучения объясняется формально тем, что из-за наличия ненулевой массы энергия нейтрино не пропорциональна их импульсу, как у фотонов, распределения которых описываются формулой Планка во все время эволюции Вселенной, где частота и температура одинаково изменяются с a.

4.4. *Температура нейтрино с конечной массой.* Задав значение массы нейтрино m_ν, значения температуры T_ν^* и масштабного множителя a_ν^* в момент их отделения, находим значения параметра y_ν^* распределений (33)-(35) и интеграла $G_n(y_\nu^*)$, затем зависимость функций $G_\rho(y_\nu^*, a/a_\nu^*)$ и $G_P(y_\nu^*, a/a_\nu^*)$ от a. Для количественных оценок примем, что $k_B T_\nu^* = 10^6$ эВ = $= 1.6022 \cdot 10^{-6}$ эрг, так что $T_\nu^* = 1.1605 \cdot 10^{10}$ К и $y_\nu^* = m_\nu \cdot 10^{6}$, где масса также в эВ. Из соотношений (18)-(19) находим, что $a_\nu^* = \sqrt[3]{4/11}\, T_0 / T_\nu^* = 1.6777 \cdot 10^{-10}$.

Так как распределения нейтрино перестают быть равновесными, то и понятие температуры к ним неприменимо. Можно ввести различные вспомогательные температуры, как это делается в астрофизике по отношению, например, к излучению звезд. Воспользуемся понятием "эффективная" температура.

Определим эффективную температуру космологического нейтринного газа T_{eff}, приравняв космологическую плотность массы (34) ее равновесному значению с такой температурой:

$$T_\nu^4 G_\rho\left(y_\nu^*, \frac{a}{a_\nu^*}\right) = T_{eff}^4 G_\rho\left(y_{eff}, 1\right), \quad T_\nu = \frac{a_\nu^*}{a} T_\nu^*, \quad y_{eff} = \frac{m_\nu c^2}{k_B T_{eff}}. \tag{46}$$

Если масса нейтрино равна нулю $m_\nu = 0$, то $y_\nu^* = y_{eff} = 0$ и тогда $T_{eff} = \left(a_\nu^*/a\right) T_\nu^* = $ $= T_\nu = \sqrt[3]{4/11}\, T$.

При $m_\nu \neq 0$ соотношение (46) можно записать через безразмерные обратные температуры:

$$\frac{y_\nu}{\sqrt[4]{G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right)}} = \frac{y_{eff}}{\sqrt[4]{G_\rho\left(y_{eff}\right)}}. \tag{47}$$

При небольших значениях отношения a/a_ν^* значения функций G_ρ близки к единице и поэтому величины y_{eff} и y_ν совпадают, что означает и совпадение температур T_{eff} с T_ν. Если, напротив, отношение a/a_ν^* велико, можно воспользоваться асимптотикой функции G_ρ (42). Подставив ее в (47), придем к асимптотическому соотношению между y_{eff} и a:

$$a_{\rho=2}^{1/4} y_\nu^{3/4} = \frac{y_{eff}}{\sqrt[4]{G_\rho\left(y_{eff}\right)}}. \tag{48}$$

Таким образом, при больших отношениях a/a_ν^* эффективная температура T_{eff} зависит не порознь от T_ν^* и масштабного множителя a, а только от их комбинации, а именно, температуры безмассовых нейтрино T_ν (а y_{eff}, соот-

естественно - от $y_\nu = (a_\nu^* / a) y_\nu^*$). Учет следующих слагаемых в разложении (42) сделанный вывод не изменяет.

Это утверждение демонстрируется на рис.5, где видно, что кривые идут совершенно одинаково и могут быть совмещены параллельным переносом. О том же говорят и данные табл.1, в которой эффективные температуры при одинаковых произведениях am_ν совпадают с пятью значащими цифрами.

Естественно, при больших массах нейтрино отличие температур T_{eff} от T_ν больше.

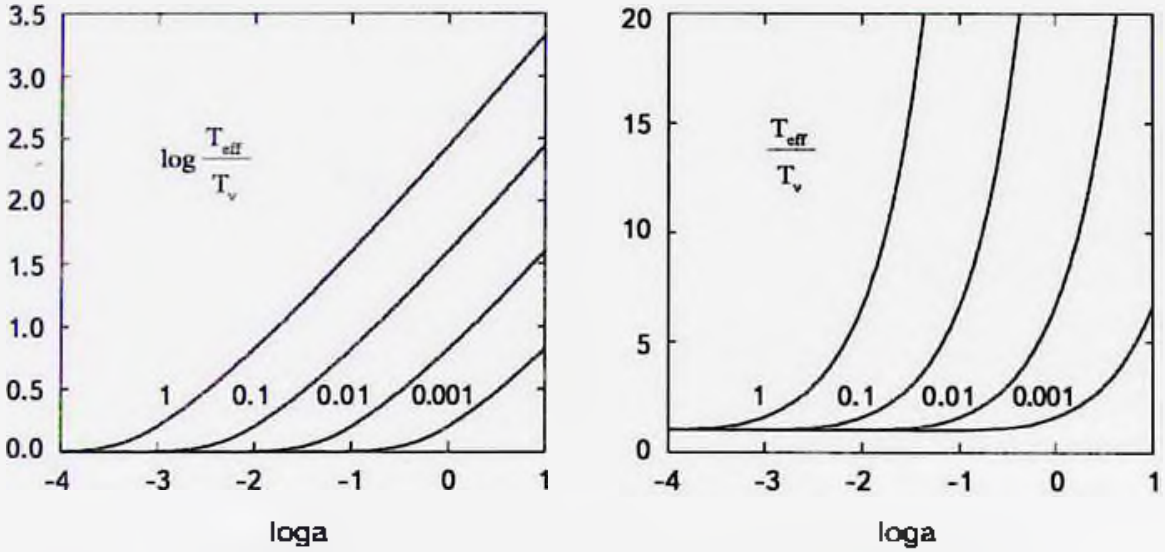

Рис.5. Отношения температур T_{eff} и T_ν в зависимости от a при четырех значениях массы.

Таблица 1

ТЕМПЕРАТУРА БЕЗМАССОВЫХ НЕЙТРИНО И ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ПРИ НЕКОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЯХ a

m_ν			0.001		0.01		0.1		1.0	
log$a$	a	T_ν	T_{eff}	T_{eff}/T_ν	T_{eff}	T_{eff}/T_ν	T_{eff}	T_{eff}/T_ν	T_{eff}	T_{eff}/T_ν
-4.0	0.0001	19469	19469	1.0	19469	1.0	19472	1.0001	19717	1.0127
-3.0	0.001	1946.9	1946.9	1.0	194.72	1.0001	1971.7	1.0127	3117.3	1.6011
-2.0	0.01	194.69	194.72	1.0001	197.17	1.0127	311.73	1.6011	1292.9	6.6405
-1.0	0.1	19.469	19.717	1.0127	31.173	1.6011	129.29	6.6405	775.10	39.811
0.0	1.0	1.9469	3.1173	1.6011	12.929	6.6405	77.510	39.811	545.18	280.02
1.0	10	0.19469	1.2929	6.6405	7.7510	39.811	54.518	280.02	418.05	2147.2

5. *Влияние масс нейтрино на эволюцию Вселенной.*

5.1. *Космологические уравнения при конечной массе нейтрино.* Два основных уравнения космологии и при учете массы нейтрино сохраняют форму (23) (обозначение масштабного множителя не меняем, в этом пункте

не отмечаем зависимости от него плотностей):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\tilde{\rho}_g\, a\,, \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}_t\, a^2\,, \tag{49}$$

где теперь полная и гравитирующая плотности массы компонент:

$$\tilde{\rho}_t = \bar{\rho}_d + \rho_\Lambda + \rho_r + 6\bar{\rho}_\nu\,, \quad \tilde{\rho}_g = \bar{\rho}_t + 3\frac{\bar{P}_t}{c^2}\,, \quad \bar{P}_t = P_\Lambda + P_r + 6\bar{P}_\nu\,. \tag{50}$$

Сохраняется и условие совместности уравнений (27):

$$\dot{\tilde{\rho}}_t = -3\left(\bar{\rho}_t + \frac{\bar{P}_t}{c^2}\right)H\,. \tag{51}$$

Его по-прежнему можно применять к каждой компоненте отдельно. Для нейтрино оно также выполняется, как показано в (40).

Уравнения состояния пылевидного вещества, излучения и темной энергии остаются прежними, как в (25), но теперь объединять нейтрино с излучением нельзя. Применение условия (51) показывает, что сохраняются также вторая и четвертая формулы в (28), описывающие эволюцию излучения и темной энергии. В качестве плотности массы нейтрино надо взять (34) и соответственно исправить плотность пылевидного вещества.

Определение эволюции плотностей компонент означает, что первое уравнение в (49) уже использовано и осталось решить второе уравнение.

5.2. *Решение уравнений*. Выразим долю плотности массы нейтрино в критической плотности через долю безмассовых нейтрино в соответствии с представлением самой плотности в (34):

$$\tilde{\Omega}_\nu^0 = 6\frac{\bar{\rho}_\nu^0}{\rho_c^0} = 6\frac{\bar{\rho}_\nu(1)}{\rho_c^0} = \frac{\rho_\nu^0}{\rho_c^0}G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right) = \Omega_\nu^0\, G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right). \tag{52}$$

Требуется изменить и долю пылевидного вещества:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_d^0 &= 1 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda^0 - \tilde{\Omega}_\nu^0 = 1 - \Omega_r^0 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_\nu^0 - \Omega_\nu^0\left[G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right) - 1\right] = \\ &= \Omega_d^0 - \Omega_\nu^0\left[G_\rho\left(y_\nu^*, 1/a_\nu^*\right) - 1\right].\end{aligned} \tag{53}$$

При этом закон изменения плотности этой компоненты не зависит от величины массы нейтрино: она убывает, как $1/a^3$:

$$\bar{\rho}_d(a) = \rho_c^0\frac{\tilde{\Omega}_d^0}{a^3}\,. \tag{54}$$

В результате подстановки законов эволюции компонент второе уравнение в (49) получает вид

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{H_0}{a^2}\sqrt{\Omega(a) + \Delta(a)}\,, \quad \Delta(a) = \Omega_\nu^0\left\{G_\rho\left(y_\nu^*, a/a_\nu^*\right) - 1 - \left[G_\rho\left(y_\nu^*, 1/a_\nu^*\right) - 1\right]a\right\}. \tag{55}$$

Функция $\Delta(a)$ представляет собой поправку, возникающую из-за конечности массы нейтрино. Очевидно, что $\Delta(1)=0$ и подкоренное выражение обращается в единицу, так как оно привязано к современной эпохе.

После разделения переменных и интегрирования, получаем уточненную связь a и t:

$$\int_0^a \frac{a\,da}{\sqrt{\Omega(a)+\Delta(a)}} = H_0 t. \qquad (56)$$

Оценим относительный вклад слагаемых под корнем, зависящих и не зависящих от массы нейтрино. На рис.6 приведены логарифмы модулей отношений $\Delta(a)/\Omega(a)$ в зависимости от $\log a$ для четырех значений массы m_ν, указанных в эВ около кривых. При $a<1$ отношения отрицательны и принимают минимумы, при $a>1$ они положительны, сливаются при $m_\nu > 0.001$ и имеют максимумы, которые меньше модулей отрицательных минимумов. При $a=1$ функция $\Delta(a)$, а с ней и отношение обращаются в нуль (логарифм - в $-\infty$). При $a \to \infty$ отношения стремятся к нулю. Как видно из рисунка, даже при $m_\nu = 1$ эВ указанный минимум соответствующего отношения не превосходит -0.14, причем он достигается при малом значении $a=0.00048$, т.е. при красном смещении большем 2000. Таким образом, ненулевые массы нейтрино, если они не больше 1 эВ, не влияют на ход расширения Вселенной.

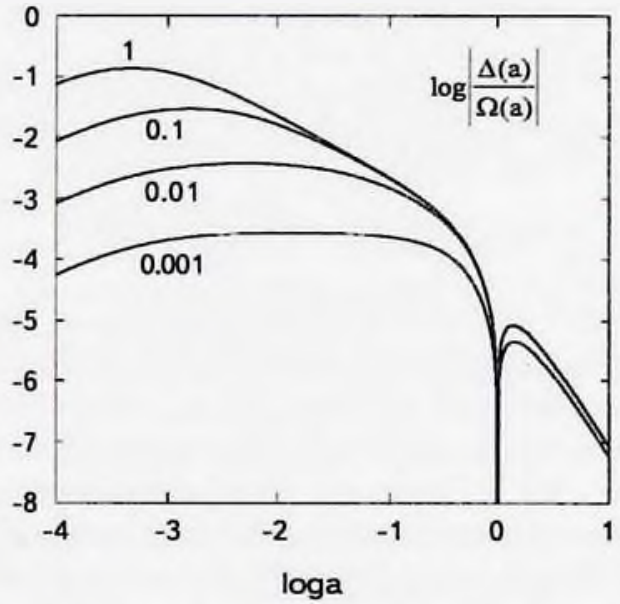

Рис.6. Относительный вклад поправки за конечную массу нейтрино в зависимости от масштабного множителя.

6. *Заключение.* Таким образом, при простейших предположениях о существовании трех типов нейтрино и антинейтрино как отдельных частиц и равенстве нулю химического потенциала в их распределениях приведены

формулы, описывающие состояние нейтринных газов в условиях термодинамического равновесия. Вводится параметр, названный степенью релятивизма, позволяющий оценивать близость распределений к ультрарелятивистским и нерелятивистским.

Воспроизводятся уравнения и формулы, описывающие расширение Вселенной в рамках Стандартной космологической модели ΛCDM с включением излучения и безмассовых нейтрино. Затем показано, как космологическая модель обобщается, если учитывается наличие у нейтрино конечной массы. Дается обобщение степени релятивизма для космологических нейтрино. Показано, что наличие массы у нейтрино приводит к существенным отличиям (эффективной) температуры газа космологических нейтрино от ее значения при предположении безмассовости частиц. В то же время влияние масс нейтрино на ход космологического расширения незначительно.

Можно предположить, что косвенное влияние нейтрино и их масс скажется в других процессах, играющих роль в космологии. Теоретические оценки такого влияния уже производились, например, в работах, упомянутых во *Введении*.

Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: dinagirner@gmail.com

THE EFFECT OF NEUTRINO MASS IN COSMOLOGY

D.NAGIRNER, D.TURICHINA

The influence of non-zero neutrino mass on the properties of the cosmological neutrino gas and the evolution of the Universe is estimated. Firstly, the characteristics of the equilibrium neutrino gas are calculated and the boundary temperatures for neutrino to be considered ultra-relativistic is obtained for different possible neutrino masses. The evolution of all types and mass cases of cosmological neutrino is examined and the boundary redshifts for cosmological neutrino to be considered ultra-relativistic is obtained. The effective temperature of the cosmological neutrino gas and the influence of non-zero neutrino mass on the rate of the Universe expansion is estimated.

Keywords: *Cosmological neutrinos: neutrino masses: evolution of the Universe*

ЛИТЕРАТУРА

1. *W.Pauli*, Letter to a physicist's gathering at Tübingen, December 4, 1930. Reproduced in L.M.Brown, Physics Today, **31**, 9, 1978.
2. *F.Reines, C.L.Cowan*, Phys. Rev., **92**, 830, 1953.
3. *F.Reines, C.L.Cowan*, Phys. Rev., **113**, 273, 1959.
4. *W.Pauli*, in "Aufsätse und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie". ed. V.F.Weisskopf (Vieweg, Braunschweig, 1961), p.156.
5. *Wu Tsyan-sui*, in "Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli." (USA, Cambridge, Interscience Publishers, 1960), p.249.
6. Donglian Xu for IceCube collaboration. Nuclear and Particle Physics Proceedings, **287**, 139, 2017.
7. *Y.Fukuda et al.*, Phys. Rev. Lett., **81**, 1562, 1998.
8. *Q.R.Ahmad et al.*, (SNO Collaboration), Phys. Rev. Lett., **87**, 071301, 2001.
9. *Q.R.Ahmad et al.*, Phys. Rev. Lett., **89**, 011301, 2002.
10. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов*, УФН, **135**, 45, 1981.
11. *M.Gerbino, M.Lattanzi*, arXiv:astro-ph/1712.07109.
12. *Sai Wang, Dong-Mei Xia*, arXiv:astro-ph/1707.00588.
13. *S.Gariazzo*, arXiv:astro-ph/1601.01475.
14. *D.Boriero, D.T.Schwatz, H.Velten*, Flavour composition and entropy increase of cosmological neutrinos after decoherence. JCAP in press. arXiv:astro-ph 1704.06139.
15. *A.Ahada, G.Arcadi, V.Domcke et al.*, arXiv:astro-ph/1709.00415.
16. *R.Ruggeri, E.Castorina, C.Carbone et al.*, arXiv:astro-ph/1712.02334.
17. *M.Zennaro, J.Bel, J.Dossett et al.*, arXiv:astro-ph/1712.02886.
18. *G.Rossi*, arXiv:astro-ph/1712.00230.
19. *R.C.Nunes, A.Bonilla*, arXiv:astro-ph/1710.10264.
20. *A.Upadhye*, Neutrino mass and dark energy constraints from redshift-space distortions, arXiv:astro-p/1707.09354.
21. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теоретическая физика в 10 т., т. V, Статистическая физика, ч. I, М., Наука, 1995.
22. *G.Hinshaw et al.*, Astrophys. J. Suppl. Ser., **208**, article id. 19, 2013.
23. *R.Alpher, J.W.Follin, R.C.Herman*, Phys. Rev., **92**, 1347, 1953.
24. *Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков*, Строение и эволюция Вселенной, М., Наука, 1975.