

ГРУППЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ
ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ. III

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 5 октября 2018

Эта последняя из серии работ, посвященной применению методов теории групп в астрофизических задачах теории переноса излучения. Приводится доказательство равенства единиче супердетерминанта операторов - суперматриц групп композиции и трансляции для неоднородных поглощающих и рассеивающих сред конечной толщины. Демонстрируется возможность применения группового подхода при определении статистических средних величин, описывающих процесс диффузии излучения. При описании диффузии излучения в однородных средах применяется вариационный принцип, дается формулировка принципа Гамильтона, находятся соответствующие Лагранжиан и закон сохранения. Обсуждаются примеры двухпараметрических групп композиции, вводимых при рассмотрении нестационарных задач переноса излучения и задач, связанных с диффузией излучения при развитой в среде турбулентности.

Ключевые слова: *перенос излучения; группы; суперматрицы; турбулентная атмосфера*

1. **Введение.** В свете новых результатов в данной области появляется необходимость продолжить серию работ с указанным выше заглавием. Развитый в ее первых двух частях [1,2] (далее H1 и H2) теоретико-групповой подход в применении к задачам теории переноса излучения восходит к пионерским работам Амбарцумяна, посвященным принципу инвариантности [3] и, так называемому, методу сложения слоев [4]. В последней из них впервые были установлены законы, по которым складываются глобальные оптические характеристики поглощающих и рассеивающих сред при их объединении. В результате выявляется структура коэффициентов отражения и пропускания составной среды, выраженная через указанные характеристики ее компонентов. В качестве следствия, когда толщина одного из компонентов бесконечно мала, найденные законы приводят к системе дифференциальных уравнений, позволяющей находить искомые оптические характеристики непосредственно для семейства атмосфер, обладающих различными оптическими толщинами. В дальнейшем полученные формулы для трехмерной среды приводились Соболевым [5], Чандрасекаром [6]. Однако наиболее важным результатом развития идеи Амбарцумяна следует признать введение Беллманом понятия инвариантного погружения, сыгравшего фундаментальную роль как в данной области, так и в ряде других областей [7,8]. Другим важным следствием

законов сложения слоев является сформулированный самим Амбарцумяном принцип инвариантности, сыгравший большую роль в дальнейшем развитии теории переноса излучения на годы вперед. В отличие от классических методов определения наблюдаемых потоков, предполагающих знание поля излучения всюду в атмосфере, применение принципа позволяет находить нужные потоки непосредственно, без полного решения задачи. Следует при этом особо отметить математический аспект предложенного принципа, который позволяет свести трудно разрешимые граничные задачи к задачам с начальными условиями. Последние сравнительно легко поддаются численному решению, что имело особенно важное значение в годы появления указанного принципа. Идеи, связанные с свойством инвариантности, нашли отражение в работах многих авторов, однако теоретического исследования сущности такого свойства не было, что часто приводило к неверному представлению о ней ([4], см. также [9,10]). Важные вопросы, связанные с свойством инвариантности, были затронуты в работе Райбики [11], в которой поднимался вопрос о возможности объяснения природы полученных им ряда квадратичных и билинейных соотношений свойством инвариантности.

Возвращаясь вновь к методу сложения слоев Амбарцумяна, отметим, что идея, на которой он основан, на самом деле, является более общей, нежели тот частный случай однородных сред, рассмотрением которого ограничивался сам автор. Было очевидно, что полученные законы несложно переформулировать для более общего случая неоднородных атмосфер с учетом свойства поляриности последних. Такое обобщение было произведено в одной из наших работ [12]. Более того, можно увидеть, что сама процедура композиции сред обладает групповыми свойствами, являющимися проявлением своего рода свойства суперсимметрии (см. H1, H2, [13]). Полученные представления групп композиций и трансляций определяют алгоритм нахождения оптических характеристик разного рода многокомпонентных рассеивающих и поглощающих сред.

В настоящей работе сначала будет дана физическая трактовка введенных нами величин, описывающих глобальные оптические свойства среды. Будучи преобразуемыми величинами, они одновременно являются компонентами операторов этих преобразований, задающихся в общем случае в виде суперматриц. Формулируется принцип Гамильтона для задач теории переноса излучения. Рассматриваются вопросы симметрии, обусловленной наличием в соответствующих уравнениях циклических координат, и связанные с ними законы сохранения. Показывается, что полученные Райбики в [11] квадратичные Q - интегралы (в обозначениях указанной статьи) фактически являются законами сохранения, аналогичные законам сохранения импульса в классической механике. Выявляется также природа билинейных интегралов, частным случаем которых является известное из теории уравнение Амбарцумяна для функции

отражения от полубесконечной атмосферы [11]. Полученные в H2 результаты группы трансляции оптической глубины позволяют построить операторы трансляции функции источника и потока излучения в задаче диффузного отражения и пропускания средой конечной оптической толщины. Далее приводятся примеры двухпараметрических групп композиций, появляющихся при рассмотрении нестационарных задач и задач переноса излучения в турбулентных атмосферах.

2. *Оптические характеристики рассеивающих и поглощающих атмосфер.* Специфика представлений введенных нами групп композиций и трансляций заключается в том, что компонентами операторов-суперматриц являются сами подвергающиеся изменению величины. В этом они отличаются от многих известных в физике представлений групп. Базовыми здесь являются комбинированные величины $P = Q^{-1}$, $S = RP$, $\bar{S} = \bar{P}\bar{R}$, $M = Q^* - \bar{S}\bar{R}$, выражающиеся через коэффициенты отражения и пропускания среды. Если среда однородная, $S = \bar{P}\bar{R} = S^*$. Первый из данных четырех величин описывает непрозрачность (opacity) среды, а последующие две величины условно могут быть названы "эффективными" коэффициентами отражения от каждой из ее границ. Обращает на себя внимание тот факт, что указанные две величины, в общем случае, различаются, даже если среда является однородной. Особое место среди четверки рассматриваемых величин занимает величина M , являющаяся двученом и нелинейным образом выражающаяся через остальные три коэффициента. То, что оптические свойства среды описываются лишь тремя независимыми величинами, обусловлено законом обратимости оптических явлений, в согласии с которым коэффициенты пропускания неоднородной атмосферы в двух взаимно противоположных направлениях задаются одной и той же матрицей, но различающимися друг от друга транспонированием (см. [3]). Величина M не обладает очевидным физическим смыслом. В простейшей скалярной задаче переноса излучения в одномерной однородной среде перечисленные базовые величины вычисляются в явном виде и выражаются через гиперболические функции [14]. Вместе с тем, представляет немалый интерес поведение указанных величин в зависимости от оптической толщины в неоднородных средах, в которых неоднородность обусловлена изменениями в среде коэффициента рассеяния λ . На рис. 1, 2 приводятся графики нужных зависимостей для двух неоднородных одномерных сред, в одной из которых роль рассеяния с глубиной возрастает, а в другой - убывает: $\lambda(\tau) = 1/(1 + ae^{+\tau})$ (параметр a считается постоянным) [15]. Мы видим, что все функции, за исключением $M(\tau_0)$, положительно определены и возрастают с увеличением оптической толщины. Что касается функции $M(\tau_0)$, то, как нетрудно убедиться, при достаточно больших толщинах она убывает

может принять и отрицательные значения. Важной особенностью указанных величин и следствием обратимости оптических явлений является тот факт,

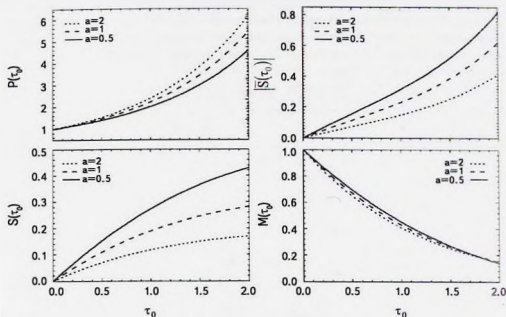


Рис.1. Зависимость базовых величин P , S , $|\bar{S}|$, M от толщины атмосферы при $\lambda(\tau) = 1/(1 + a\epsilon^*)$.

что детерминант оператора композиций $\mathbf{A}$ равен единице. В работе Н1 было установлено равенство единице супердетерминантов (Березинианов) всех суперматриц $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ и $\tilde{\mathbf{D}}$. Ввиду важности данного результата приведем здесь его более подробное, по сравнению с [1], доказательство для суперматриц $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & -\bar{\mathbf{S}} \\ \mathbf{S} & \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\bar{\mathbf{S}} \\ \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad (1)$$

По определению супердетерминанта [4],

$$\text{Ber}(\tilde{\mathbf{A}}) = \text{Ber}(\tilde{\mathbf{B}}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{M} + \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{S}}). \quad (2)$$

Как было показано в [1] (см. там соотношение (20)),

$$(\mathbf{M} + \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{S}})^{-1} = \mathbf{P}^*, \quad (3)$$

откуда

$$\text{Ber}(\tilde{\mathbf{A}}) = \text{Ber}(\tilde{\mathbf{B}}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{P}^*)^{-1} = 1. \quad (4)$$

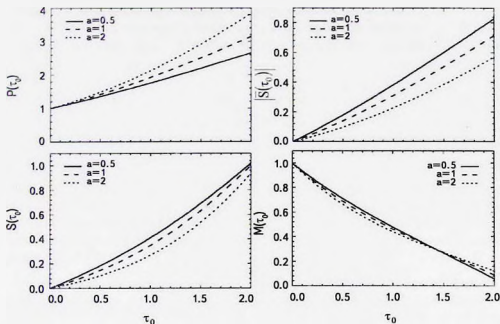


Рис.2. То же самое, что на рис.1, при $\lambda(\tau) = 1/(1 + a\epsilon^2)$.

Аналогичным образом доказывается равенство единице супердетерминантов двух других суперматриц $\bar{C}$ и $\bar{D}$. Таким образом, приведенные выше четыре суперматрицы вместе с их обратными обладают супердетерминантом в качестве инварианта, равного единице. Другими словами, *единственным глобальным инвариантом при композиции сред произвольной оптической толщины является супердетерминант соответствующего оператора преобразования*. Напомним, что указанные операторы образуют также группы трансляций оптической глубины. В случае одномерной скалярной задачи диффузного отражения и пропускания данный результат может быть иллюстрирован, если воспользоваться геометрическим смыслом детерминанта обычной двумерной матрицы (рис.3).

3. Средние статистические характеристики диффузии излучения в среде. В линейной теории переноса излучения глобальные оптические характеристики поглощающей и рассеивающей атмосферы определяются оптической толщиной среды и параметрами, описывающими процесс многократного рассеяния. При этом данные характеристики не зависят ни от величины освещающих ее потоков, ни от распределения в ней различных физических величин. Это обстоятельство позволяет ввести, как мы видели, некоторые комбинированные величины, выражающиеся через коэффициенты

отражения и пропускания, которые обладают групповыми свойствами и образуют представления групп композиций и трансляций. При этом следует ожидать, что аналогичными свойствами должны обладать и те величины, которые

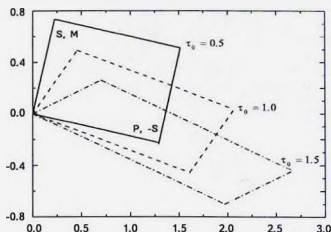


Рис.3. Геометрическая интерпретация детерминанта скалярной матрицы A для некоторых значений оптической толщины.

связаны с оптическими характеристиками среды. К их числу относятся, в частности, некоторые статистические средние величины, описывающие процесс диффузии излучения в среде, как, например, средние числа рассеяний диффундирующих квантов. В согласии с [14], для отраженных и пропущенных квантов эти числа определяются по формулам

$$\langle N_R(\tau_0) \rangle = \lambda \frac{\partial \ln R(\tau_0)}{\partial \lambda}, \quad \langle N_R(\tau_0) \rangle = \lambda \frac{\partial \ln \bar{R}(\tau_0)}{\partial \lambda}, \quad \langle N_Q(\tau_0) \rangle = \lambda \frac{\partial \ln Q(\tau_0)}{\partial \lambda}. \quad (5)$$

Важно отметить, что приведенные формулы верны и для неоднородных сред, включая случай, когда с глубиной меняется сам коэффициент рассеяния.

Другим примером может служить среднестатистическое время, затрачиваемое квантами при выходе из той или иной границы среды. При допущении, что время тратится лишь на пробег между двумя актами рассеяния, имеем [15]

$$\langle \Omega_R(\tau_0) \rangle = -\frac{\partial \ln R(\tau_0)}{\partial \beta}, \quad \langle \Omega_R(\tau_0) \rangle = -\frac{\partial \ln \bar{R}(\tau_0)}{\partial \beta}, \quad \langle \Omega_Q(\tau_0) \rangle = -\frac{\partial \ln Q(\tau_0)}{\partial \beta}, \quad (6)$$

где соответствующие средние величины обозначены через $\langle \Omega \rangle$, а β есть отношение коэффициентов поглощения в континууме и в центре спектральной линии.

Рассмотрим более подробно закон сложения для средних чисел рассеяния в случае однородной атмосферы. Отталкиваясь от известного закона композиции

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{1,2} \\ \mathbf{S}_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & -\mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{1,2} \\ \mathbf{S}'_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_2 & -\mathbf{S}'_2 \\ \mathbf{S}'_2 & \mathbf{M}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & -\mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_2 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_1 \\ \mathbf{S}'_1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по λ . Нетрудно убедиться, что производные базисных величин по λ можно выразить через N_R , N_Q , связанными, в свою очередь, с искомыми средними величинами посредством $\langle N_R \rangle = N_R/R$, $\langle N_Q \rangle = N_Q/Q$. Например, $\lambda \mathbf{P}' = -\mathbf{P} N_Q \mathbf{P}$, $\lambda \mathbf{S}' = (\mathbf{N}_R - \mathbf{S} N_Q) \mathbf{P}$. Таким образом преобразование (8) может рассматриваться как закон сложения для некоторых комбинаций величин N_R , N_Q , знание которых при известных $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$ дает возможность выразить среднее число рассеяний тех или иных групп квантов в составной атмосфере через эти величины, вычисленные для его компонентов.

4. *Принцип Гамильтона.* В Н1 и Н2 было показано, что представления групп композиции и трансляции в дифференциальной форме сводятся к системам линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями. Первая из них для однородной атмосферы записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau_0} = \mathbf{m}\mathbf{P}(\tau_0) - \mathbf{n}\mathbf{S}(\tau_0), \quad \frac{d\mathbf{S}}{d\tau_0} = \mathbf{n}\mathbf{P}(\tau_0) - \mathbf{m}\mathbf{S}(\tau_0), \quad (9)$$

с условиями $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$; при этом $\mathbf{m} = \alpha - \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = (\lambda/2)\mathbf{G}$.

Такую же форму имеет вторая система уравнений для величин $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Последние связаны с интенсивностями излучения на некоторой глубине τ , направленными в сторону границ $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, соответственно, в среде, освещаемой со стороны границы $\tau = \tau_0$ (см. Н2)

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \mathbf{m}\mathbf{U}(\tau, \tau_0) - \mathbf{n}\mathbf{V}(\tau, \tau_0), \quad \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{n}\mathbf{U}(\tau, \tau_0) - \mathbf{m}\mathbf{V}(\tau, \tau_0), \quad (10)$$

с начальными условиями $\mathbf{U}(0, \tau_0) = \mathbf{Q}(\tau_0)$, $\mathbf{V}(0, \tau_0) = \mathbf{0}$.

Система уравнений (9) аналогична уравнениям, получаемым путем инвариантного вложения [16, 6, 17]. Одновременно уравнения (10) являются классическими уравнениями переноса излучения. Если предварительно решена система уравнений (9) и коэффициент пропускания известен, то задача переноса (10) может быть сформулирована как задача с начальными условиями. Математически, мы имеем дело с одной и той же системой уравнений при различных начальных условиях, что обусловлено существованием простых соотношений, связывающих между собой глобальные оптические характеристики среды и величины, описывающие режим излучения внутри среды (см. Н2).

Системы уравнений такого типа могут быть сведены к матричному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\Phi'' = k^2 \Phi \quad (11)$$

с соответствующими начальными условиями, при этом $k^2 = (\alpha - 2n)\alpha$. Под Φ в первом случае подразумевается $P + S$, во втором - $U + V$. Оператор, действующий в (11), является самосопряженным (потенциальным), поэтому к задаче такого типа может быть применен вариационный принцип [18]. Эта возможность имеет важное значение для теории переноса излучения. Вариационная формулировка данных задач континуальной физики представляет собой наиболее короткий путь для выявления общих физических законов изучаемого явления и их трактовки. Для матрично-векторного оператора в (11) могут быть написаны обобщенные для этого случая выражения для плотности Лагранжиана и уравнения Эйлера-Лагранжа (см. также Н1)

$$L(\Phi, \Phi', k, \tau_0) = \Phi'^2 + k^2 \Phi^2, \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\tau_0} \frac{\partial L}{\partial \Phi'} - \frac{\partial L}{\partial \Phi} = 0. \quad (13)$$

Для рассматриваемых же здесь двух задач принцип Гамильтона (по аналогии с принципом наименьшего действия в аналитической механике) записывается в виде

$$\delta \int \Lambda(\Phi, \Phi', k, \tau_0) d\tau_0 = 0, \quad \delta \int \Lambda(\Phi, \Phi', k, \tau) d\tau = 0, \quad (14)$$

где Λ - функция Лагранжа.

Несложно проверить, что приведенные обобщенные формулы имеют смысл, аналогичный применяемым в скалярной задаче. Математически, такой общий подход чрезвычайно важен, поскольку позволяет охватить весьма широкий круг физических задач. Одним из примеров может служить задача о диффузном отражении и пропускании трехмерной средой при изотропном рассеянии (см. [19]). В данном случае уравнение (11) в развернутой форме записывается в виде интегродифференциального уравнения

$$\eta^2 \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = \Phi(\tau, \eta, \mu) - \lambda J(\tau, \mu), \quad (15)$$

где μ - косинус угла, под которым падает излучение на границу $\tau = \tau_0$ конечной среды, и

$$J(\tau, \mu) = \int_0^1 L(\tau, \eta, \mu) d\eta. \quad (16)$$

В данном случае

$$\Lambda(\Phi, \Phi', \tau) = \int_0^1 L(\Phi, \Phi', \tau, \eta) d\eta. \quad (17)$$

Обобщение вариационного подхода, данное в [20] для интегролифференциального уравнения, позволяет определить плотность Лагранжиана L

$$L(\Phi, \Phi', \tau, \eta) = \Phi^2 + (\eta\Phi')^2 - \lambda\Phi J. \quad (18)$$

В то же время этот результат следует непосредственно из (12), что является одним из преимуществ вектор-матричного подхода.

5. Законы сохранения. Квадратичные и билинейные интегралы. Характерной особенностью матричного уравнения (11) является отсутствие в нем в явном виде оптической толщины среды и оптической глубины. Другими словами, указанные величины являются циклическими координатами, что приводит к законам сохранения, выражающихся постоянством функции Гамильтона

$$\sum \left(L - \frac{\partial L}{\partial \Phi'} \Phi' \right) = \text{const}, \quad (19)$$

или

$$\sum (\Phi^2 - \mathbf{k}^{-2} \Phi'^2) = \text{const}. \quad (20)$$

Для рассмотренной выше задачи изотропного рассеяния (20) приобретает вид

$$\int_0^1 [\Phi^2 - (\eta\Phi')^2 - \lambda\Phi J] d\eta = \text{const}, \quad (21)$$

Если рассмотреть внутренний режим излучения, то $\Phi = U + V$, $\eta\Phi' = U - V$, поэтому (21) дает

$$\int_0^1 U(\tau, \eta, \mu; \tau_0) V(\tau, \eta, \mu; \tau_0) d\eta - \frac{\lambda}{4} \left(\int_0^1 (U(\tau, \eta, \mu; \tau_0) + V(\tau, \eta, \mu; \tau_0)) d\eta \right)^2 = \text{const}. \quad (22)$$

Полученное соотношение представляет собой записанное в наших обозначениях так называемый Q - интеграл Райбки [11]. Постоянная интегрирования находится из граничных условий: для конечной среды она равна

$$\text{const} = -\frac{\lambda}{4} \left(\int_0^1 Q(\eta, \mu, \tau_0) d\eta \right)^2, \quad (23)$$

и нулю - для полубесконечной среды. Легче всего разобраться в физическом смысле полученной закономерности можно, если рассмотреть скалярный аналог задачи. Тогда из (22) будем иметь

$$H^2(\tau) - (1 - \lambda)\Phi^2(\tau) = \lambda Q^2(\tau_0), \quad (24)$$

где $H = U - V$ и $\Phi = U + V$. Данные величины связаны с потоком излучения и интегральной интенсивностью (или функцией источника), соответственно. Полученное соотношение показывает, что в среде данной оптической толщины при заданном коэффициенте рассеяния на каждой ее глубине устанавливается

взаимно однозначная связь между интегральным полем излучения и его потоком: чем больше лучистой энергии заключено в среде, тем значительнее ее поток, и наоборот. В частности, в двух предельных случаях, когда $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, имеем $H(\tau) = U(\tau)$ и $H(\tau) = Q(\tau_0)$. Наконец, в полубесконечной атмосфере имеет место $H(\tau) = S(\tau)\sqrt{1-\lambda}$ (так называемый, закон $\sqrt{1-\lambda}$).

Следует особо отметить, что в данной задаче возможно вывести ряд других интегралов, в частности, R - интеграл, полученный Райбики в [11]. Однако как этот, так и все остальные интегралы являются следствием закона сохранения и самостоятельного значения не имеют (см. также [21]).

Аналогичным образом применяя принцип Гамильтона для глобальных оптических характеристик рассеивающей атмосферы, когда циклической координатой в уравнениях (9) и в соответствующем Лагранжиане является τ_0 . В этом случае система матричных уравнений (9) и (11) приводит к закону сохранения

$$\int_0^1 P(\tau_0, \eta, \mu) S(\tau_0, \eta, \mu) d\eta - \frac{\lambda}{4} \left(\int_0^1 [P(\tau_0, \eta, \mu) + S(\tau_0, \eta, \mu)] d\eta \right)^2 = -\frac{\lambda}{4}. \quad (25)$$

В применении к одномерной среде он приобретает следующий вид

$$\lambda(1+R)^2 - 4R = \lambda Q^2. \quad (26)$$

Данный интеграл хорошо известен в классической теории переноса излучения (см., например, [5,22]). Он обладает простым физическим смыслом, указывая на то, что соотношение между отражательной и пропускательной способностями той или иной атмосферы целиком определяется значением коэффициента рассеяния. Результаты, приведенные в данном разделе, дают ответ на вопросы, поставленные в [11], о природе квадратичных интегралов теории переноса. Более того, развиваемый нами групповой подход делает возможным распространить результаты, полученные как в упомянутой работе, так и в [11,23,24], на величины, определяющие отражательную и пропускательную способности рассеивающей и поглощающей атмосферы.

В заключение данного раздела коротко остановимся на так называемых билинейных интегралах, полученных впервые в [11]. Существование таких интегралов обусловлено свойством аддитивности линейных операторов (9-11). Действительно, рассмотрим для определенности две системы уравнений типа (9), отличающиеся друг от друга лишь значением параметра μ , от которого зависят искомые матриц-функции. Очевидно, что складывая эти системы, в результате получим систему такого же типа, где искомыми будут суммы одноименных матриц-функций с различными значениями μ (см., например, [11,10,23,25]). В этом случае имеет место

$$\int_0^1 [P(\tau_0, \eta, \mu) S(\tau_0, \eta, \mu') + P(\tau_0, \eta, \mu') S(\tau_0, \eta, \mu)] d\eta -$$

$$\frac{\lambda}{4} \left(\int_0^1 [P(\tau_0, \eta, \mu) + S(\tau_0, \eta, \mu)] d\eta \right) \left(\int_0^1 [P(\tau_0, \eta, \mu') + S(\tau_0, \eta, \mu')] d\eta \right) = -\frac{\lambda}{4}. \quad (27)$$

Далее, искомые величины в двух системах уравнений могут различаться значениями нескольких параметров, в частности, оптической толщиной (или глубиной в случае (24)), генерируя тем самым, так называемые, многоточечные билинейные интегралы. Отсюда можно заключить, что решения различных задач переноса излучения в однородных атмосферах с одинаковым значением коэффициента рассеяния λ связаны между собой некоторыми нелинейными соотношениями. Сказанное, в первую очередь относится к задачам переноса в средах, не содержащих источников энергии. Однако, как было показано нами в [10,19,25], существует группа задач переноса излучения с внутренними источниками энергии, решения которых могут быть сведены к решению задачи о диффузном отражении и пропускании (так называемая задача при отсутствии источников). К ней, в частности, относятся задачи переноса в таких средах, в которых первичные источники энергии распределены по полиномиальному или экспоненциальному законам. Для такой группы задач, названных нами RSF (reducible to the source-free problem) задачами, могут быть написаны разнообразные квадратичные и билинейные зависимости.

6. *Закон трансляции интегральной интенсивности и потока излучения.* Введенные в предыдущем разделе величины $H = U - V$ и $\Phi = U + V$, как мы видели, определяют баланс между мощностью поля излучения в среде и потоками излучения, выходящими из нее. В скалярной задаче о диффузном отражении и пропускании излучения для одномерной среды конечной оптической толщины, не содержащей источников энергии, данные величины представляют собой функцию источника и поток. В более общих задачах (трехмерная среда, учет зависимости поля излучения от направления и/или от частоты) упомянутые физические величины выражаются в виде интегралов от H и Φ . Если в среде присутствуют источники энергии, то опять-таки указанные две величины играют важную роль в определении фундаментальных величин, описывающих диффузию излучения в ней. С этой точки зрения представляет определенный интерес закон трансляции оптической глубины для данных величин при построении поглощающей и рассеивающей атмосферы с наперед заданными непрерывными законами изменения величин, определяющих элементарный акт рассеяния (см. H2). Указанный закон следует непосредственно из аналогичного закона для преобразования величин U и V , полученных в H2. В общей векторно-

матричной записи он имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_{1/2} \\ \mathbf{H}_{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \bar{\mathbf{S}}_2 + \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{S}_2 + \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{M}). \quad (29)$$

В дифференциальной форме преобразование (27) приводит к хорошо известным классическим результатам

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = (\mathbf{m} + \mathbf{n})\mathbf{H}(\tau), \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\tau} = (\mathbf{m} - \mathbf{n})\Phi(\tau). \quad (30)$$

В общем случае неоднородной среды величины $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ также зависят от оптической глубины.

7. Многопараметрические группы. Данное в Н1 определение группы композиции поглощающих и рассеивающих сред является достаточно общим, поскольку не ставит каких-либо ограничений на физические и оптические свойства объединяемых сред. Они могут быть неоднородными и различаться оптическими толщинами. Особый интерес представляют композиции однородных сред, отличающихся друг от друга некоторыми параметрами, характеризующими процесс диффузии в них. В зависимости от количества таких параметров, образуемые группы оказываются одно-, двух-, трех-параметрическими и т.д. При предельном переходе к бесконечно малым толщинам многокомпонентные группы приводят обычно к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных, порядок которых определяется количеством параметров, меняющихся независимо друг от друга.

В качестве примеров приведем две известные в теории переноса излучения задачи, сводящиеся к решению уравнений одного и того же типа.

Первая из них представляет собой нестационарную задачу переноса излучения в однородной среде конечной оптической толщины. Нас будет интересовать зависимость коэффициентов отражения и пропускания от толщины среды и времени, в предположении, что при диффузии фотоны тратят время лишь на пролет между двумя последовательными актами рассеяния. Среднее время такого пролета T определяется плотностью среды n и средним значением коэффициента поглощения в линии k : $T = (ckn)^{-1}$ (см., например, [5]). Далее, будем считать, что время ω измеряется в единицах T . Закон сложения рассматриваемых сред будет вновь задаваться (7), в котором индексы i ($i = 1, 2, 1 \cup 2$) относятся теперь как к оптической толщине τ_0 данной среды, так и к безразмерному времени ω . Для простоты рассмотрим задачу в одномерном приближении при допущении, что рассеяние

излучения в среде происходит с полным перераспределением по частотам, когда $\Gamma = \alpha_0 \alpha'_0$, при этом элементами диагональных матриц α_0 и α'_0 являются значения нормированных соответствующим образом профилей коэффициента поглощения в спектральной линии. Закон сложения для рассматриваемой задачи приводит к следующей гиперболической системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными.

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \omega} = \mathbf{mP}(\omega, \tau_0) - \mathbf{nS}(\omega, \tau_0), \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau_0} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \omega} = \mathbf{mP}(\omega, \tau_0) - \mathbf{mS}(\omega, \tau_0) \quad (31)$$

с условиями $\mathbf{P}(\omega, 0) = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}(\omega, 0) = \mathbf{0}$. Рассматривая левую часть (31) как производную по направлению и производя соответствующую параметризацию, искомые функции могут быть представлены в виде функций одной переменной, зависящих от некоторого параметра s , меняющегося в направлении перпендикулярном по отношению к характеристическому направлению [26]. Вдоль данного направления уравнения имеют вид, совпадающий по форме с уравнениями, рассмотренными выше. В частности по аналогии с (11) имеем

$$\bar{\Phi}'_s = \mathbf{k}^2 \bar{\Phi}(s), \quad (32)$$

где $\bar{\Phi}(s) = \bar{\mathbf{P}}(s) + \bar{\mathbf{S}}(s)$, $\mathbf{k}^2 = \mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2$.

Применение вариационного принципа вдоль указанного направления позволяет вывести для данной задачи плотность Лагранжиана

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \left[\mathbf{P}^2 + \mathbf{S}^2 - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{P} + \mathbf{S})^2 \right], \quad (33)$$

и закон сохранения в виде

$$\Sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \left[\frac{\lambda}{4} \alpha_0 (\mathbf{P} + \mathbf{S})^2 - \mathbf{PS} \right] = 0, \quad (34)$$

где для краткости записи аргументы искомых матриц-функций в (33) и (34) не отмечаются. Суммирование в (34) производится по одному из столбцов, обозначающих частоты отраженного излучения. В стационарной задаче зависимость от времени исчезает и находим

$$\Sigma \frac{\lambda}{4} \alpha_0 (\mathbf{P} + \mathbf{S})^2 - \mathbf{PS} = \text{const}. \quad (35)$$

Вторая задача заключается в определении профилей спектральных линий, образуемых в однородной рассеивающей и поглощающей атмосфере конечной толщины, в которой развита однородная турбулентность. Отсылая читателя к работе [29] за постановкой задачи и ее физическому аспекту, здесь отметим лишь, что подход, основанный на групповых свойствах величин, описывающих перенос излучения, может быть применен и в данной задаче, если пространст-

венные корреляции нетепловых движений представляются в виде марковского процесса, когда последние описываются гауссовским распределением на плоскости. В этом случае для данного распределения имеет место соотношение Чепмена-Колмогорова

$$G(u, u', \rho(l_1 + l_2)) = \int G(u, u'', \rho(l_1)) G(u, u'', \rho(l_2)) du'' \quad (36)$$

Распределение G обладает вероятностным смыслом, а именно величина $G(u, u', \rho(l)) du$ представляет собой вероятность того, что если на некоторой глубине τ' значение нетепловой скорости равно u' , то на глубине τ оно примет значение в интервале $(u, u + du)$. Коэффициент корреляции ρ для марковского процесса меняется по экспоненциальному закону $\rho(l) = \exp(-l/\Lambda)$, где Λ - средняя оптическая длина корреляции. Тогда закон сложения двух слоев с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 запишется в виде

$$\begin{pmatrix} P_{1u2}(u) \\ S_{1u2}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2(u') & -\bar{S}_2(u') \\ S_2(u') & M_2(u') \end{pmatrix} G(\rho(\tau_1)) \begin{pmatrix} P_1(u) \\ S_1(u) \end{pmatrix} \quad (37)$$

Здесь переменная u обозначает смещение частоты на правых границах рассматриваемых сред. Генерируемая данным правилом система векторно-матричных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial P}{\partial u} &= m(u) P(u, \tau_0) - n(u) S(u, \tau_0), \\ \frac{\partial S}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial S}{\partial u} &= n(u) P(u, \tau_0) - m(u) S(u, \tau_0) \end{aligned} \quad (38)$$

с начальными условиями $P(u, 0) = 1$, $S(u, 0) = 0$. Величины m и n задаются теми же формулами, что и в предыдущем примере с учетом смещения частоты. Система уравнений (38) верна при любых значениях коэффициента корреляции за исключением $\Lambda = 0$. Этот случай, соответствующий режиму микротурбулентности, рассматривается, как правило, отдельно (см. [27]). Мы видим, что полученная система уравнений по форме отличается от уравнений (31), приведенных в предыдущей задаче, наличием в ее левой части коэффициента корреляции Λ . Поэтому как методы исследования и решения, так и возможность применения вариационного принципа с существованием законов сохранения принципиально не отличаются.

8. Заключительные замечания. Введение теоретико-групповых методов в теорию переноса излучения, являющуюся одной из главных разделов астрофизики и играющую важную роль во многих областях физики, открывает новые возможности как для разработки методов решения различных физических задач, так и для глубокого понимания физической картины изучаемых

явлений. Групповой подход позволяет рассматривать с единой точки зрения классические уравнения переноса и уравнения, получаемые на основе метода инвариантного вложения. При этом важным является тот факт, что в обоих случаях задачи сводятся к решению линейных векторно-матричных дифференциальных уравнений одинаковой формы, что указывает на взаимосвязь между закономерностями, характерными для поля излучения внутри поглощающих и рассеивающих сред и для их глобальных оптических свойств. Эту взаимосвязь в виде простых соотношений удается установить благодаря использованию дискретного векторно-матричного подхода. Представляет интерес тот факт, что единственным инвариантом для любых, в общем случае, неоднородных плоскопараллельных сред конечной толщины является супердетерминант (Березиниан) суперматрицы, элементы которой выражаются через их оптические параметры. Иначе говоря, операторы - суперматрицы, групп композиции и трансляции принадлежат к классу суперматриц, супердетерминант которых равен единице.

Групповой подход позволяет выработать единые методы решения задач переноса излучения с весьма различным физическим содержанием. В качестве иллюстрации, два таких примера были приведены в конце данной работы. Получаемые уравнения принадлежат математически к одному и тому же типу, различаясь лишь входящими в них коэффициентами, задающимися физикой изучаемых объектов или явлений.

Важно отметить, что разработанный подход позволяет часто выявлять физически важные особенности рассматриваемой задачи и без ее предварительного решения. Получаемые уравнения, как правило, допускают применение вариационного принципа, позволяя тем самым определить величины, сохраняющиеся в процессе переноса излучательной энергии. Благодаря групповому подходу удается выделить класс задач переноса в однородных средах, обладающий рядом характерных для него особенностей, главной из которых, по-видимому, является возможность сведения формулируемых краевых задач к задачам с начальными условиями. Заслуживают также внимания глубокие связи между характеристиками поля излучения в таких средах, описываемыми билинейными соотношениями.

В работе рассмотрены одно- и двухпараметрические группы, вводимые в случае линейных задач переноса в средах с плоскопараллельной симметрией. Однако возможности применения обсуждаемого подхода намного шире, поскольку идеи, лежащие в его основе, используют наиболее общие представления о явлении переноса излучения. Поэтому в дальнейшем возможны обобщения полученных в работе результатов в самых разных направлениях.

GROUPS AND THEIR REPRESENTATIONS IN THE
THEORY OF RADIATIVE TRANSFER. III

A.G.NIKOGHOSSIAN

This is the final part of the series of papers devoted to application of the group theory methods to astrophysical problems of radiation transfer. Proof of equality to unity of super-determinants of the composition and translation operators supermatrices are given for inhomogeneous absorbing and scattering media of finite thickness. The possibility of application of the group approach to determining statistical mean values of characteristics of the radiation diffusion is demonstrated. The variational principle is applied in describing the transfer of radiation in homogeneous media; we formulate Hamilton's principle and find proper Lagrangian and conservation law. Examples of two-parametric composition groups introduced in treating non-stationary problems of the radiation transfer and problems of the radiation diffusion in turbulent media are discussed.

Keywords: *radiative transfer: groups: supermatrices: turbulent atmosphere*

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **57**, 295, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 272, 2014).
2. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **57**, 407, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 375, 2014).
3. В.А.Амбарцумян, *ДАН СССР*, **38**, 257, 1943.
4. В.А.Амбарцумян, *Изв. АН АрмССР*, Но.1,2, 1944.
5. В.В.Собалев, *Перенос излучения в атмосферах звезд и планет*, Гостехиздат, М., 1956.
6. С.Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, Изд. ИЛ, М., 1953.
7. R. Bellman, R. Kalaba, M. Wing, *J. Math. Phys.*, **1**, 280, 1960.
8. R. Bellman, R. Kalaba, M. Prestrud, *Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness*, Amer. Elsevier, NY, 1963.
9. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **52**, 471, 2009, (*Astrophysics*, **52**, 431, 2009).
10. A.G. Nikoghossian, *Light Scat. Reviews*, **8**, 377, 2013.
11. G. Rybicky, *Astrophys. J.*, **213**, 165, 1977.
12. A.G. Nikoghossian, *Astron. Astrophys.*, **422**, 1059, 2004.
13. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **54**, 149, 2011, (*Astrophysics*, **54**, 126, 2011).
14. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **47**, 123, 2004, (*Astrophysics*, **47**, 104, 2004).
15. А.Г.Никогосян, *Астрофизика*, **24**, 149, 1986, (*Astrophysics*, **24**, 89, 1986).

16. *В.В.Соболев*, Перенос излучения в атмосферах звезд и планет, 1956.
17. *R.Bellman, G.M.Wing*, An Introduction to Invariant Imbedding, NY, Wiley & Sons, 1973.
18. *M.M.Vainberg*, Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden Day, San Francisco, 1964, Chap. II.
19. *A.G.Nikoghossian*, J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transfer, **61**, 345, 1999.
20. *M.Tavel*, Transport Theory Statist. Phys., **1**, 271, 1971.
21. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **54**, 275, 2011, (*Astrophysics*, **54**, 242, 2011).
22. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН АрмССР, 1980.
23. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **22**, 612, 1978.
24. *Э.Г.Яновичский*, Астрон. ж., **53**, 1063, 1976.
25. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
26. *В.Я.Арсенин*, Методы математической физики и специальные функции, М., Наука, 1984.
27. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **60**, 443, 2017, (*Astrophysics*, **60**, 408, 2017).

