

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
АМБАРЦУМЯНА ДЛЯ ПЛОСКОЙ СРЕДЫ КОНЕЧНОЙ  
ТОЛЩИНЫ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Г.А. АРУТЮНЯН, О.А. ПОГОСЯН

Поступила 8 августа 2018

Численно реализован алгоритм решения функциональных уравнений Амбарцумяна, полученных для конечного слоя. Вычисления выполнены в частном случае перераспределения излучения по частотам. Для этой цели программа сначала вычисляет узлы полиномов Эрмита и соответствующие веса, используя при этом пакет программ, работающих с большим количеством значащих цифр. Исследовано влияние количества узлов квадратуры, а также оптической толщины слоя и значения вероятности выживания фотона на окончательный результат решения уравнений. В качестве иллюстрации результаты расчетов приведены в виде графиков и таблиц.

**Ключевые слова:** *Перенос излучения; Принцип инвариантности; перераспределение по частотам; численные методы*

**1. Введение.** Полученные применением принципа инвариантности Амбарцумяна функциональные уравнения существенно облегчили процедуру численного решения соответствующих задач теории переноса [1,2]. В оригинальных работах была рассмотрена задача теории переноса излучения в мутной среде при когерентном рассеянии. Причем в работе [2], которая посвящена решению задачи диффузного отражения излучения от полубесконечной атмосферы, приведены соответствующие решения той же задачи и для плоскопараллельного конечного слоя. Если в первом случае при изотропном рассеянии задача приводится к определению одной вспомогательной функции Амбарцумяна, то во втором случае, при тех же условиях, решается система из двух уравнений. Причем второе уравнение, учитывающее конечность толщины рассеивающей среды, обладает ядром с мнимой сингулярностью, что существенным образом осложняет численное решение этих уравнений.

В дальнейшем предложенный Амбарцумяном метод был применен многими авторами для решения широкого класса задач [3-8]. Западными исследователями более известны работы Чандрасекара (см. [3]), в которых он ссылается на оригинальную работу Амбарцумяна. И хотя Чандрасекар получил одни и те же вспомогательные функции, что и Амбарцумян, в иностранной литературе эти функции называются функциями Чандрасекара.

Знание указанных функций, представляющих решения задачи отражения излучения от среды и пропускания через нее, очень важно, поскольку с их помощью достаточно легко могут быть получены решения целого класса задач теории переноса излучения в данной среде [7-12]. На наш взгляд, именно это обстоятельство делает важной разработку методов решения уравнений Амбарцумяна. В настоящей работе мы детально опишем процедуру численного решения уравнений Амбарцумяна, полученных для одномерного слоя, когда при акте рассеяния происходит изменение частоты фотона, а также приведем результаты численных расчетов.

**2. Уравнения Амбарцумяна при перераспределении по частотам в линии.** С помощью Принципа инвариантности можно получить уравнения для функций отражения и пропускания при общих законах перераспределения излучения по частотам при элементарном акте рассеяния. Если при этом усредненная по углам функция перераспределения задается в виде билинейной суммы

$$r(x', x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha_k(x') \alpha_k(x), \quad (1)$$

где  $x'(\tau)$  представляет собой безразмерную частоту фотона до (после) рассеяния, а функции  $\alpha_k(x)$  подбираются в зависимости от вида функции перераспределения  $r(x', x)$ , то получаем следующую систему функциональных уравнений [12]:

$$\varphi_k(\tau, x) = \alpha_k(x) + \int_0^{\tau} \rho(\tau, x', x) \alpha_k(x') dx', \quad (2)$$

$$\psi_k(\tau, x) = \alpha_k(x) \exp[-v(x)\tau] + \int_0^{\tau} \sigma(\tau, x', x) \alpha_k(x') dx'. \quad (3)$$

Фигурирующие в уравнениях (2)-(3) функции  $\varphi_k(\tau, x)$  и  $\psi_k(\tau, x)$  называются функциями Амбарцумяна, которые зависят от оптической толщины  $\tau$  данного плоскопараллельного слоя,  $v(x) = \alpha(x) + \beta$ , где  $\alpha(x)$  - контур коэффициента поглощения, а параметр  $\beta$  является отношением коэффициентов поглощения в непрерывном спектре и в центре линии. Функции отражения  $\rho(x', x)$  и пропускания  $\sigma(x', x)$ , показывающие вероятность, соответственно, процессов, что фотон частоты  $x'$ , падающий на границу плоской одномерной среды толщины  $\tau$ , после многократных рассеяний будет отражен от нее или пропущен через эту среду и выйдет из нее в интервале частот  $(x, x+dx)$ , выражаются через функции Амбарцумяна следующим образом:

$$\rho(\tau, x', x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{\varphi_k(\tau, x') \varphi_k(\tau, x) - \psi_k(\tau, x') \psi_k(\tau, x)}{v(x) + v(x')}, \quad (4)$$

$$r(\tau, x', x) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{\sigma_k(\tau, x') \psi_k(\tau, x) - \psi_k(\tau, x') \sigma_k(\tau, x)}{v(x) - v(x')}. \quad (5)$$

где параметр  $\lambda$  показывает вероятность выживания кванта при однократном акте рассеяния.

Понятно, что интегрированием соотношения (4) и (5) по всем частотам  $x'$ , мы получим контуры линий отражения и пропускания при падении на границу слоя излучения единичной интенсивности:

$$R(\tau, x) = \int \rho(\tau, x', x) dx' \quad (6)$$

и

$$T(\tau, x) = \int \sigma(\tau, x', x) dx'. \quad (7)$$

Для расчета контуров с учетом другого спектрального распределения излучения, естественно, следует вычислить интеграл произведения интенсивности и функций отражения или пропускания.

Именно в соотношении (5) при численных расчетах возникает неопределенность типа 0/0, когда  $x = x'$ . Вообще говоря, функция пропускания  $\sigma(x', x)$  является непрерывной и гладкой, не показывает сингулярностей или разрывов. Сказанное легко может быть проверено при однократном рассеянии, когда

$$\varphi_k^0(\tau, x) = \alpha_k(x), \quad \psi_k^0(\tau, x) = \alpha_k(x) \exp[-v(x)\tau].$$

мы легко получаем

$$\lim_{x' \rightarrow x} \sigma^0(x', x) = \frac{\lambda \tau}{2} \exp[-v(x)\tau] \sum_{k=0}^{\infty} A_k \alpha_k^2(x) = \frac{\lambda \tau}{2} r(x, x) \exp[-v(x)\tau],$$

что доказывает вышесказанное о поведении функции отражения.

Однако совершить такой же предельный переход для следующих итераций не получается и поэтому при численных расчетах при равенстве аргументов под знаком интеграла остается непреодолимая 0/0 неопределенность. Одним из авторов настоящей работы ранее была предложена численная процедура, которая устраняет данную вычислительную трудность [10]. Для этого предлагалось при численных расчетах использовать не одну сетку точек определения искомых функций  $\{x_i\}$ , а сразу две сетки  $\{x_i\}$  и  $\{x'_j\}$ , причем сделать это таким образом, чтобы  $x_i \neq x'_j$ , при любых значениях индексов  $i$  и  $j$ , а для всего интервала значений бы выполнялось бы неравенство  $x_i < x'_j < x_{i+1}$ . Правда, при таком выборе аргументов возникает необходимость определения всех функций параллельно во всех точках, что, естественно, увеличивает объем численных расчетов.

С другой стороны, целесообразная замена интегралов в соотношениях (2)-

(3) квадратурами прямо зависит от свойств функций  $\alpha_k(x)$ . В том случае, когда уширение спектральной линии происходит исключительно благодаря доплеровскому смещению частоты квантов вследствие теплового движения рассеивающих атомов, профиль коэффициента поглощения задается экспонентой

$$\alpha(x) = \exp(-x^2), \quad (8)$$

а соответствующие вспомогательные функции  $\alpha_k(x)$  являются четными производными  $\alpha(x)$ , умноженные на некоторые нормировочные коэффициенты

$$\alpha_k(x) = \left[ \pi^{1/4} 2^k \sqrt{(2k)!} \right]^{-1} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \alpha(x). \quad (9)$$

Легко проверить, что функции  $\alpha_k(x)$  составляют полную систему ортонормированных функций с весом  $\exp(-x^2)$ . По сути они являются нормированными функциями Эрмита.

В данном случае при интегрировании достаточно хороший результат обеспечивает замена интегралов гауссовыми квадратурами, в которых в качестве нулей и весов используются нули и соответствующие веса полиномов Эрмита. Вопрос о точности такой замены вкратце рассмотрен в работе [13], но этот вопрос, а также проблемы, связанные с вычислением необходимых нулей и весов, мы обсудим также в следующем разделе настоящей работы.

При других функциях перераспределения чаще всего в качестве контура коэффициента поглощения фигурирует функция Фойгта

$$\alpha(x) = U(x, a) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{(x-t)^2 + a^2} dt, \quad (10)$$

где параметр  $a$  характеризует полуширину линии, обусловленную отличиями от доплеровского механизма причинами. Функция, которая задается формулой (10), в центре линии мало отличается от экспоненты (8), но в крыльях линии имеет совершенно другое поведение падая согласно степенному закону  $x^{-2}$  и поэтому при интегрировании требует соответствующего подхода. Отметим также что функции  $\alpha_k(x)$ , которые в данном случае зависят также от параметра  $a$ , определяются одним и тем же соотношением (9), но, в отличие от предыдущего случая, не составляют ортонормированную систему (см., например, [14.15]).

**3. Вычисление нулей полиномов Эрмита и соответствующих весов.** Вычисление нулей любого полинома с высокой точностью является не очень простой задачей. Это тем более справедливо для полиномов, которые определены в бесконечном интервале, как, например, полиномы Эрмита или Лагерра. Дело в том, что эти функции могут принимать сколь угодно большие значения и при расчетах любыми алгоритмами возникает необходимость суммирования членов, отличающихся многими порядками. Если соответ-

вующие расчеты производятся с обычной или даже двойной машинной точностью представления чисел, то могут быть получены заведомо неправильные значения. Для полиномов, например, Лежандра нет подобного рода опасностей. Поэтому в любой справочной литературе численные значения для узлов приводятся для полиномов Лежандра достаточно высоких порядков, тогда как для же величины для полиномов Лагерра или Эрмита можно найти лишь для не очень высокого порядка (см., например, [15]).

Для преодоления указанных трудностей машинных вычислений, которые в конечном счете приводят к неточности вычислений, необходимо "научить" компьютеры работать с большим количеством значащих цифр в представлении чисел. При этом следует исходить из тех возможностей, которые дают современные компьютеры и алгоритмические языки. Другим желательным требованием к инструменту вычислений должна была быть его универсальность. В качестве такого универсального инструмента на базе алгоритмического языка FORTRAN был создан пакет программ High Accuracy Handy MAThematics (HAHMATH), который позволяет совершать все арифметические действия с любой желаемой (и разумной) точностью. С этой целью используемые для расчетов длинные числа представляются в виде одномерных массивов, состоящих из целых чисел. Таким образом, любое длинное число с плавающей запятой сохраняется в компьютере в виде последовательности целых чисел, каждое из которых может принимать любое значение между 0 и 9999. Очевидно, что такое представление позволяет выразить любое число с любой точностью, в зависимости от размера массива. Все числа, хранящиеся в памяти компьютера, представлены в виде, близком по форме к числам с плавающей запятой. То есть, все числа представлены одним и тем же количеством значащих цифр, а в последнем байте хранится десятичная степень.

Мы здесь не остановимся на описании алгоритмов выполнения арифметических действий. Это достаточно емкая проблема, которая не имеет отношения к той задаче, которая рассматривается нами, и представляет отдельный интерес. Поэтому данному вопросу будет посвящена отдельная работа. Но в настоящей работе нам хотелось бы вкратце остановиться на численной процедуре вычисления необходимых для решения уравнений Амбарцумяна нулей многочленов Эрмита. Для соответствующих расчетов мы использовали метод последовательного приближения. С этой целью поиск значения узлов каждого многочлена начинается с некоторого неотрицательного значения аргумента, меньшего, чем значение первого узла. Таким значением может быть отличающееся от нуля любое минимальное число. Первым шагом вычисляется многочлен Эрмита в данной точке, после чего аргумент получает приращение в размере начального шага. Приращение аргумента продолжается до тех пор, пока значение многочлена не меняет знак. После этого шаг делится

на число и меняет знак. Процедура продолжается до тех пор, пока размер шага по абсолютной величине не становится меньше требуемой погрешности. Тогда значение аргумента сохраняется в качестве первого узла. После этого поиск возобновляется с первоначальным шагом, и все процедуры продолжают для второго и следующих узлов.

Для вычисления значений многочленов Эрмита наиболее выгодным на наш взгляд является применение рекуррентного соотношения (см., например, [14,15])

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), \quad (11)$$

с первыми многочленами, которые имеют следующую форму

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x. \quad (12)$$

Обычный современный персональный компьютер на вычисление всех узлов многочлена Эрмита с четырьмя десятками значащих знаков тратит всего одну секунду. Поэтому при численном решении уравнений Амбарцумяна (2)-(3) целесообразнее расчет численных значений соответствующих нулей и весов включить в общую программу, чем хранить в памяти и вызывать при необходимости.

С целью исследования возможностей используемого пакета, а также точности замены интегралов гауссовскими квадратурами, мы вычислили искомые величины для многочленов Эрмита вплоть до 100-го порядка. Визу, в качестве иллюстрации, в табл.1 мы приводим результаты вычислений узлов и соответствующих весов для многочленов Эрмита 49-го и 50-го порядков с

Таблица 1

## УЗЛЫ И ВЕСА ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

Узлы	Веса
Полином 49-го порядка $H_{49}(x)$	
0.	1.578669450177870021554425713058612627-1
3.15769005237552428866365517023950815-1	3.158929909378682345682082921832910205-1
5.318926995109617195112150511704385280-1	3.163723862926279968040112504140254634-1
9.486405076102579769781186769250780344-1	3.171784349190301149711380191917788419-1
1.266362023687358725801339502964168787 0	3.183220107482341823214101009885393909-1
1.585402251455046318540098582161590456 0	3.198189396065704521306875877384259893-1
1.906124760988360478108916140627115964 0	3.216906597568064550817037790245083238-1
2.228917745385946780345420847879722714 0	3.239651633222914593311893697975667750-1
2.554201193951962878259109857026487588 0	3.266783055057748741621202957720367568-1
2.882435610645599943779870955040678381 0	3.298756124048565547986236080022186675-1
3.214132868456855973704477946739643812 0	3.336147853671557154484453947482961326-1
3.549870037212095930101440899306908249 0	3.379692059715937910806977388151377952-1
3.890307405766161963356353226117789745 0	3.430329189966885674805818915705507391-1
4.236212530068788062465046095894649624 0	3.489278633160532581875267262211497075-1

Таблица 1 (окончание)

Узлы	Весы
4.588493140274483295115715009160339832 0	3.558146334328768154925359716886666384-1
4.9482434430044829250396392733091488440 0	3.639089918372771017862379430545765499-1
5.316811374183517457936432037968198524 0	3.735081523270970224787698456392847794-1
5.69585998503520877903834818704798817 0	3.850345159745695589003353403763513853-1
6.0872727281054755579248194408137351274 0	3.991125260553589802100563090592549132-1
6.495292565007660279263745906064286828 0	4.167132748074769744882447165913875605-1
6.922852834959762446942477254197001457 0	4.394517007872337597620187111688634300-1
7.376859390631929080939244158798828721 0	4.702744853917727408812279258325772596-1
7.868062864081664997684129048138856887 0	5.153476346696341910044804647307237333-1
8.41733718626797777731630339985713362 0	5.908376422452912862238621143193147205-1
9.079405395199433570496694301255047321 0	7.640782410695982753237249778272131818-1
Полином	50-го порядка $H_{50}(x)$
1.563025468894680969356159039307385683-1	3.126302980303591791840328096101503629-1
4.690590566782368853182560997083783149-1	3.129334480523896566916404375841087097-1
7.822717295546075533252408578828117132-1	3.135435899896412833808020826639933722-1
1.096251128957682396958261961117386817 0	3.144685508824714012694115952364586641-1
1.411317754898299803301142674172297120 0	3.157204402300939291414325257002452908-1
1.727806547515898571987236209679394960 0	3.173161243496043107753875345388791477-1
2.046071968686409725535213510738685727 0	3.192779159931800657633822261826987380-1
2.366493904298664574525901116430759429 0	3.216345379620548444533611498051467935-1
2.6894847022677454979294981760205700993 0	3.244224487088660856810111776785774619-1
3.015497769574523090341244824230670928 0	3.276876613546050924931311360886138467-1
3.3450383139378905283933818282039785275 0	3.314882542475231059801048155315688979-1
3.678677062515269824416463961824774742 0	3.35897862768376842108938014343104043379-1
4.017068172858134111891104112146422266 0	3.410107272587486067453059976764701405-1
4.360973160454578945177672721911221742 0	3.469487695993775321582500181346016169-1
4.711293666169042104741038201609626412 0	3.538724699794639972594982327866596936-1
5.069117584917234964336785196792334318 0	3.619972650916177007729795516268192294-1
5.435786087224948381901867833221331238 0	3.716197712499140586523706199289449819-1
5.812994675420405599197692936286330223 0	3.831613921964814037342641100819368145-1
6.202952519274671949744970333995297551 0	3.972449437758446716642314718406044953-1
6.608647973855358515038460609503090381 0	4.148388210590251893031133448047364095-1
7.034323509770611160263342753751203417 0	4.375532823000444111000053675783293869-1
7.486409429864194109427444345783442258 0	4.683262119425485966805966330641281604-1
7.975622368205637080507131031481549143 0	5.133047978515365805725674441510438000-1
8.522771303917803969373380823526531457 0	5.8860529737729205179969016271808739-1
9.182406958129317509076372516574338078 0	7.61348691180747546481423212948394117-1

37 значащими цифрами. Показанные результаты были получены при расчетах с применением чисел с 73 значащими цифрами, а узлы полиномов определены с точностью до  $10^{-53}$ .

Результаты вычислений здесь даны в виде чисел с плавающей запятой почти в том формате, в котором числа представлены в пакете НАММАТН. Но в действительности в этом пакете они представлены чуть иначе. Значение

первого узла полинома  $H_n(x)$ , например, имеет следующий вид 1563025468 894680969356159 393 7385683-1. В этом представлении, естественно, нет десятичной точки, так как подпрограммы учитывают, что цифра (от 1 до 9) в первом байте является цифрой до запятой. Кроме этого, поскольку отдельные части любого длинного числа хранятся в ряде последовательных байтов в виде четырехзначных целых чисел, то те части, численное значение которых меньше 1000, при печати появляются с пробелами перед значащими цифрами. В приведенном примере таким является предпоследний байт (с нелюбимым значением 738) со своим соседним байтом спереди (393). В таблице в таких случаях вместо пробелов добавлены нули. Степень длинных чисел хранится в отдельном байте, и последняя цифра в представлении чисел обозначает эту степень, которая показывает количество позиций сдвига десятичной точки. Другими словами, число -1 означает умножение длинного числа на  $10^{-1}$ .

4. *Численные процедуры и результаты.* Мы здесь рассмотрим простейший случай полного перераспределения излучения по частотам, при котором даже в системе атома абсолютно нет корреляции между частотами поглощенного и излученного фотонов. Тогда функция перераспределения по частотам представляет собой произведение функций поглощения и излучения, а чисто математически это выражается в том, что в билинейной сумме остается лишь первый член:

$$r(x', x) = \alpha_0(x') \alpha_0(x). \quad (13)$$

В этом случае вместо уравнений (2)-(3) будем иметь

$$\varphi_0(\tau, x) = \alpha_0(x) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(\tau, x') \varphi_0(\tau, x) - \psi_0(\tau, x') \psi_0(\tau, x)}{v(x') + v(x)} \alpha_0(x') dx', \quad (14)$$

$$\psi_0(\tau, x) = \alpha_0(x) \exp[-v(x)\tau] + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(\tau, x') \psi_0(\tau, x) - \psi_0(\tau, x') \varphi_0(\tau, x)}{v(x) - v(x')} \alpha_0(x') dx'. \quad (15)$$

Система уравнений (14)-(15) численно решена как с двойной точностью, так и используя пакет программ НАНМАТН. Следует отметить, что при данной точности итерационного приближения искомым функциям результаты расчетов, полученные двумя способами, не отличаются друг от друга.

На рис. 1 в качестве иллюстрации приведены графики искомым функций Амбарцумяна  $\varphi_0(x)$  и  $\psi_0(x)$  при различных значениях параметров. Здесь  $\tau = 1$  и  $\beta = 0.0001$ , а значения вероятности выживания кванта  $\lambda$  показаны на рисунке. При данных значениях  $\lambda$  графики одноименных функций не очень отличаются друг от друга. Причина в данном случае кроется в том, что при оптической толщине равной единице квант испытывает не очень большое количество рассеяний, и значение вероятности выживания кванта

мало влияет на значение искомых функций.

На следующих двух рисунках показаны графики контуров спектральных

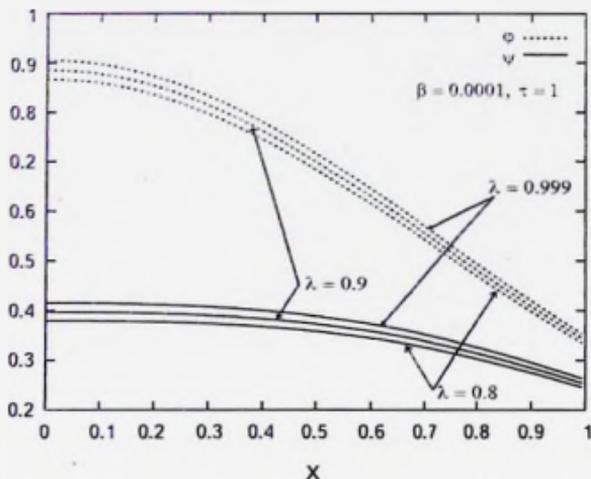


Рис.1. Функции Амбарцумяна  $\phi_1(x)$  и  $\psi_1(x)$ .

линий. Графики на рис.2 показывают зависимость контуров линий отражения и пропускания в зависимости от  $\lambda$  при оптической толщине среды равной единице. Как видно из графиков профиль линии отражения всегда выше профиля пропускания на всех частотах. Графики на рис.3 показывают те же профили линий в зависимости от оптической толщины. Эти данные показывают, что при малых толщинах среды профили линий отражения и пропускания почти не отличаются. Физически это объясняется тем, что после одного рассеяния фотон движется с равной вероятностью вперед и назад. Вследствие тонкости оптической толщины слоя он выходит из обеих сторон среды почти с одинаковыми вероятностями. В оптически толстых средах вклад фотонов, рассеянных более одного раза, можно считать ничтожным. С увеличением толщины слоя среднее число рассеяний фотона растет, и параллельно с этим увеличивается интенсивность выходящего излучения. Но если этот процесс для отраженного излучения продолжается монотонно, то проходящее излучение доходит до максимума и начинает уменьшаться в центре. Эта картина хорошо видна на рис.3 по примеру слоя, оптическая толщина которого 100.

При численных процедурах решение системы функциональных уравнений считалось найденным, если относительная разность искомых величин, полученных в двух последовательных итерациях, меньше данной величины при всех

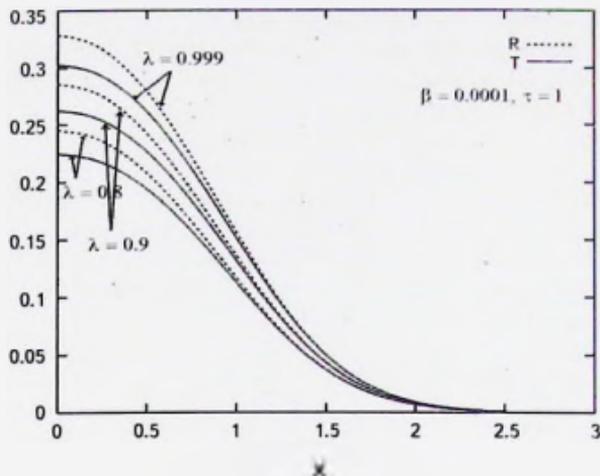


Рис. 2. Контур линии отражения и пропускания (рассеянная часть излучения) при  $\tau = 1$  в зависимости от  $\lambda$ .

значениях аргумента:

$$\left| 1 - \frac{g^{(n+1)}(x_i)}{g^{(n)}(x_i)} \right| \leq \epsilon_0 \quad (16)$$

где  $g(x)$  - искомая функция, а верхние индексы в скобках показывают номер итерации. Величина  $\epsilon$  характеризует точность вычислений и задается пользователем при численных расчетах.

С другой стороны, понятно, что выполнение условия (16) необходимое, но не достаточное условие для решения системы уравнений (14)-(15) с данной точностью. Во-первых, заменив интегралы гауссовскими суммами, мы вводим некоторую погрешность, которая может быть оценена известными формулами [15]. Тем не менее, в каждой численной процедуре кроется множество источников возможного накопления погрешности, которые не легко поддаются оценке. Поэтому численный эксперимент остается наилучшим методом для исследования картины накопления погрешностей при использовании данного алгоритма.

Для численного решения системы уравнений мы пользовались возможностями современных персональных компьютеров, применяя при этом двойную точность машинного представления чисел. Процедура начинается вычислением нулей и соответствующих весов полиномов Эрмита, имеющих одинаковое количество узлов на интервале от нуля до бесконечности. Очевидно, что таковыми являются полиномы со степенями  $2 \times N - 1$  и  $2 \times N$  с  $N$  узлами,

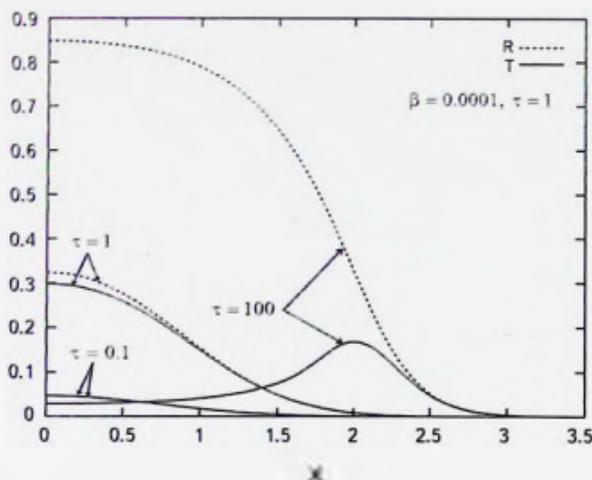


Рис.3. Контур линии отражения и пропускания (рассеянная часть излучения) в зависимости от  $\tau$  при  $\lambda = 0.99$ .

причем в число узлов первого входит также точка  $x = 0$ .

Расчеты этого этапа выполняются с помощью пакета НАНМАТН с приведенными в предыдущем разделе параметрами вычислений (числа с 73 значащими цифрами, точность определения узлов  $10^{-53}$ ). В качестве нулевого приближения искомых функций используются свободные члены функциональных уравнений:

$$\varphi_0^{(0)}(x) = \alpha_0(x), \quad (17)$$

$$\psi_0^{(0)}(x) = \alpha_0(x) \exp[-v(x)\tau]. \quad (18)$$

Итерационный процесс продолжался до выполнения условия (16), для которого был использован параметр  $\varepsilon = 10^{-12}$ . Все расчеты выполнены при  $\beta = 0.0001$ , для четырех значений оптической толщины среды ( $\tau = 0.1; 1; 10$  и  $100$ ) и четырех значений вероятности выживания кванта при однократном рассеянии ( $\lambda = 0.8; 0.9; 0.99$  и  $0.999$ ). С целью исследования влияния замены интегралов гауссовской суммой, все расчеты были выполнены с использованием четырех комплектов нулей и весов полиномов Эрмита ( $N = 7; 13; 25$  и  $41$ ).

В табл.2 приведены сводные данные, характеризующие зависимости погрешностей вычислений от значений различных параметров и порядка полиномов, узлы которых используются для гауссовской квадратуры интегралов. В первой строке таблицы даны значения вероятности выживания кванта при акте рассеяния. Во второй — приведены числа узлов, использованных для прибли-

Таблица 2

КОЛИЧЕСТВО ИТЕРАЦИЙ И ЧИСЛО ПРАВИЛЬНЫХ ЗНАЧАЩИХ ЦИФР МОМЕНТОВ ФУНКЦИЙ АМБАРЦУМЯНА  $\varphi_0(x)$  И  $\psi_0(x)$

$k$	0.8				0.9				0.99				0.999			
	7	13	25	41	7	13	25	41	7	13	25	41	7	13	25	41
$\tau = 0.1$	43	14	8	8	86	26	8	8	903	218	9	9	6738	766	9	12
	6	9	13	13	6	10	13	13	5	9	13	13	6	10	13	13
	6	8	13	13	6	8	13	13	6	9	13	13	5	9	13	13
$\tau = 1$	57	40	18	19	105	73	19	19	1156	688	68	25	9293	5938	127	26
	5	7	12	13	4	7	12	13	5	6	11	13	4	6	11	13
	4	6	11	13	4	6	11	13	4	6	11	13	4	5	11	13
$\tau = 10$	45	44	44	45	77	66	57	90	618	490	298	222	6209	3691	2425	2392
	5	5	7	10	4	4	7	9	3	6	8	9	3	5	9	10
	1	3	5	9	2	4	6	9	2	5	6	8	2	3	6	9
$\tau = 100$	58	58	58	58	87	86	86	103	279	259	247	1450	1947	1287	1194	2109
	4	3	7	8	5	6	8	9	4	4	6	8	3	5	5	6
	0	0	3	4	0	0	3	4	1	1	3	4	0	1	3	4

женных вычислений интегралов, и поэтому каждой ячейке первой строки соответствуют четыре столбца - по одному для каждого комплекта узлов. Строки в таблице соответствуют значениям оптической толщины среды, которые даны в первом столбце таблицы. Для каждого значения оптической толщины соответствующая строка разделена на три части. В первой подстроке приведено количество итераций, которое было необходимо для обеспечения условия (16) при данной точности вычислений. Во второй и третьей подстроках даны количества верных знаков моментов вычисленных функций  $\varphi_0(x)$  и  $\psi_0(x)$ .

Моменты функций  $\varphi_0(x)$  и  $\psi_0(x)$  связаны между собой соотношением

$$\bar{\varphi}_0^2 - \frac{4\pi^{1/4}}{\lambda} \bar{\varphi}_0 + \frac{4\pi^{1/2}}{\lambda} - \bar{\psi}_0^2 - \frac{4\beta}{\lambda} W_R = 0, \quad (19)$$

что можно получить из (14), проинтегрировав это уравнение по всем частотам. Здесь через  $\bar{\varphi}_0$  и  $\bar{\psi}_0$  обозначены моменты искоемых функций, а  $W_R$  представляет собой интеграл профиля линии отражения (6). С целью оценки погрешности могло быть использовано соотношение (19), но, как оказалось, величина  $W_R$  очень не чувствительна по отношению к точности функций  $\varphi_0(x)$  и  $\psi_0(x)$ . Поэтому в качестве критерия мы здесь пользуемся близостью моментов функций, вычисленных с помощью двух квадратурных сеток. По сути эти сетки должны были обеспечить одинаковую точность, и поэтому их сравнение дает возможность определить количество правильных значащих цифр в вычисленных моментах.

Первое, что бросается в глаза, это то, что выполнение условия с точностью до двенадцатой значащей цифры отнюдь не означает, что уравнения действительно решены с такой точностью. Даже при малых значениях оптической толщины точными можно считать лишь 6-9 знаков, когда интеграл заменяется квадратурой с тринадцатью или меньшим количеством узлов. С увеличением оптической толщины среда ситуация ухудшается. Причем ухудшение намного заметнее в случае функции  $\psi_0(x)$ , связанной с прохождением фотона. При  $\tau = 10$  момент функции  $\psi_0(x)$  имеет лишь 1-3 правильных значащих цифр, а при  $\tau = 100$ , практически - ни одной. Следует еще раз заметить, что это наблюдается несмотря на то, что уравнения решались с точностью выполнения условия (16) до двенадцатой значащей цифры. Правда, точность моментов функций заметно повышается с увеличением количества узлов интегрирования.

Вторая заметная тенденция связана с увеличением числа итераций при увеличении вероятности выживания фотона при однократном рассеянии. Она легко объяснима, поскольку увеличение параметра  $\lambda$  означает, что квант претерпевает больше рассеяний. Примерно такую же роль играет и увеличение оптической толщины среды, т.е., в среднем тем больше рассеяний, чем толще слой. И тем не менее, здесь наблюдается некий максимум, который при малых значениях  $\lambda$  заметен вблизи  $\tau = 1$ , а при больших  $\lambda$  перемещается в сторону больших толщин. Но, скорее всего, это связано с методикой численных расчетов и не имеет физической основу. Вопрос может проясниться, если решится задача об определении среднего числа рассеяний в рассматриваемых средах.

И наконец, еще одна особенность этих вычислений заключается в том, что количество итераций уменьшается, если увеличиваем число узлов интегрирования. Однако эта тенденция достаточно хорошо наблюдается лишь при малых оптических толщинах. Если оптическая среда имеет большую оптическую толщину, то замечаются некоторые отклонения от этой тенденции.

**5. Заключение.** Функциональные уравнения Амбарцумяна, полученные для решения задачи многократного рассеяния фотона в слое конечной оптической толщины, могут быть легко решены численными методами. Для этого следует разделить друг от друга, с обязательным условием не пересечения между собой, внешние и подынтегральные аргументы. Такое разделение позволяет решить задачу простым итерационным методом.

При решении указанных уравнений следует учитывать, что в каждом таком случае необходимо найти оптимальные расчетные параметры для замены интегралов гауссовской (или другой) квадратурой. На точность полученных решений достаточно сильно влияет количество узлов интегрирования. Малое количество не обеспечивает нужной точности, а большое число узлов

увеличивает объем вычислений.

С другой стороны, сходимость итерационного процесса с данной точностью пока еще не означает, что именно с такой точностью найдено решение уравнений. Анализ численных расчетов показывает, что при недостаточном количестве узлов интегрирования, полученных на основе сходимости итерационного процесса, решения могут обладать точностью на 6 - 12 порядков ниже. В некоторых случаях это означает, что в результате высокоточной сходимости итерационного процесса мы получаем численные данные, значения цифр которых либо вовсе неправильны, либо правильны всего лишь несколько первых цифр.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, НАН  
Армения, e-mail: hhayk@bao.sci.am

## SOLVING THE AMBARTSUMIAN FUNCTIONAL EQUATIONS FOR A MEDIUM OF FINITE THICKNES BY NUMERICAL METHODS

H.A.HARUTYUNIAN, H.A.POGHOSYAN

The algorithm for solving the functional equations of Ambartsumian obtained for the finite medium has been realized numerically. Calculations are carried out for the particular case of the radiation complete frequency redistribution. The nodes and corresponding weights of Hermit polynomials have been calculated at first for this purpose using a software package, working with high number of significant digits. The influence of the number of the used quadrature nodes, as well as the effect of thickness of the slab and the value of photon's survival probability on the final result of equations' solving is considered. Some diagrams and tables of the calculations results are given as an illustration.

*Key words: Radiative transfer; Principle of Invariance; frequency redistribution; numerical methods*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, Астрон. ж., **19**, 30, 1942.
2. *В.А.Амбарцумян*, Доклады АН СССР, **38**, 257, 1942.
3. *S.Chandrasekhar*, Radiative Transfer, London. Oxford Univ. Press. 1950.
4. *В.В.Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., Гос. Изд. Техн.-Теорет. Лит., 1956.
5. *Дж.Кастри, Р.Калиба*, Методы погружения в прикладной математике, М., Мир, 1976.
6. Принцип инвариантности и его приложения. ред. М.А.Мнацаканян, О.В.Пикичян, Ереван, АН Арм. ССР, 1989.
7. *N.V.Yengibarian, A.G.Nikoghossian*, JQSRT, **13**, 787, 1973.
8. *Г.А.Арутюнян, А.Г.Никогосян*, ДАН СССР, **242**, 66, 1978.
9. *Н.А.Нарутянцян, А.Г.Никогосян*, JQSRT, **19**, 135, 1978.
10. *Г.А.Арутюнян*, ДАН АрмССР, **41**, 70, 1980.
11. *Г.А.Арутюнян, А.Г.Никогосян*, ДАН СССР, **268**, 1342, 1983.
12. *Г.А.Арутюнян*, ДАН СССР, **320**, 1073, 1991.
13. *Н.Рогосян*, ComBAO, **LXIV**, 41, 2017.
14. *И.К.Суетин*, Классические ортогональные многочлены, М., Наука, 1979.
15. Справочник по специальным функциям, ред. М.Абрамовиц, И.Стиган, М., Наука, 1979.

