АСТРОФИЗИКА

ТОМ 61 АВГУСТ, 2018 ВЫПУСК 3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЩЕГО ЧИСЛА, ФУНКЦИИ СВЕТИМОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕНЧИВОСТИ БЛЕСКА ЗВЕЗД ТИПА Т ТЕЛЬЦА В ЗВЕЗДНЫХ АГРЕГАТАХ

О.В.ПИКИЧЯН

Поступила 28 декабря 2017
Принята к печати 20 июня 2018

На основе достаточно удаленных друг от друга по времени четырех наблюдений звездного агрегата показана возможность оценки полного числа находящихся в нем неправильно переменных звезд. Сформулирована обратная задача восстановления функции светимости звездного агрегата по усредненным яркостям его членов. Рассматривается задача о нахождении функции распределения блеска звезд в предположении, что их изменения представляют собой стационарный случайный процесс. При этом в качестве исходной информации используются данные детальной фотометрии звезд на двух достаточно удаленных друг от друга по времени "снимках" агрегата.

Ключевые слова: *обратная задача: звездные агрегаты: статистика: неправильные переменные звезды: звезды типа Т Тельца*

1. *Введение*. После открытия В.Амбарцумяном звездных ассоциаций, исследование нестационарных явлений в звездных агрегатах стало одной из главных задач космогонии молодых объектов. В частности, в 1968г. Амбарцумяном [1], с помощью использования формулы Пуассона, была получена статистическая оценка полного числа вспыхивающих звезд в Плеядах. При этом было доказано, что для неоднородного (по частоте вспышек) ансамбля объектов данная оценка является лишь нижним пределом их реального числа [2]. В итоге был сделан вывод, что все или почти все звезды малой светимости в скоплении Плеяды в раннем этапе своей эволюции проходят фазу вспышечной активности типа UV Ceti. Далее, с применением аналогичной методики была также дана оценка общей доли тех звезд типа T Tau в Орионе, которые одновременно с иррегулярными непрерывными изменениями блеска показывают также вспышки типа UV Ceti [3]. Кривые же блеска "классических" представителей звезд типа T Tau имеют характер непрерывного случайного стационарного процесса. Здесь уже неприменимы формулы типа Пуассона, поскольку случайный процесс изменчивости блеска в данном

случае не является точечно-дискретным, а стационарно-непрерывным. По этой причине статистические характеристики изменчивости блеска звезды исследовались в основном путем длинных серий электрофотометрических наблюдений "избранных" единичных объектов. Такого рода наблюдения естественно выполнялись лишь для ограниченного числа типичных представителей данных объектов, вследствие чего были построены и изучены их индивидуальные функции распределения блеска, а также автокорреляционные функции (более детально об этом см., например, [4,5]). Вопрос же исследования общестатистических "коллективных" характеристик агрегата звезд, состоящего из сотен или большего числа членов, "родившихся совместно" и показывающих стационарные, неправильные, непрерывные случайные изменения блеска, каковым является например агрегат в Орионе, до сих пор остается недостаточно изученным. Между тем сравнение "среднестатистических" физических характеристик членов различных скоплений (имеющих разные возрасты) в звездной космогонии традиционно считается одним из важных методов выявления их общих эмпирических свойств и эволюционных изменений (см., [6-8]).

Данная работа посвящена двум упрощенным модельным схемам, позволяющим исследовать статистические характеристики ансамблей неправильно переменных звезд в звездных агрегатах. Задача статистической оценки полного числа неправильных переменных звезд в звездных агрегатах, а также выявление статистических характеристик их непрерывно-изменяющихся кривых блеска путем сравнения нескольких "полных" снимков агрегата были предложены академиком В.А.Амбарцумяном и использованы Пикичяном в [9]. Важно отметить, что подобные методики статистических "популяционных" оценок позднее стали широко применяться также в социологии и в медицине (см., например, [10,11]).

Первая задача представляет собой простую схему непосредственного статистического определения общего числа N звезд типа Т Тельца (в общем случае, - неправильных переменных звезд) в агрегате, в котором сделан подсчет (например, визуальный) числа членов изменивших свой блеск с амплитудой, большей определенной звездной величины Δm. Здесь требуются две пары наблюдений звездного агрегата, выполненные при достаточном временном удалении друг от друга. То есть, требуется наличие всего четырех "независимых снимков" исследуемой области, сделанных в разное время.

Вторая задача посвящена точной математической формулировке обратной задачи определения функции светимости $B(\overline{m})$ неправильных переменных звезд агрегата и нахождению плотности вероятности $\varphi(\Delta m)$ - "дифференциальную" функцию распределения изменчивости (т.е. отклонения Δm от своего среднего значения $\overline{m}$) их яркости, в качестве общей статистической характеристики изменчивости блеска нестационарных объектов данного агрегата.

Здесь требуются результаты уже детальной фотометрии, но всего лишь двух снимков, полученных путем двух, достаточно удаленных друг от друга по времени, наблюдений агрегата.

2. *Схема определения общего числа неправильных переменных*. Рассмотрим простую схему определения полного числа неправильных переменных в звздном агрегате с помощью результатов четырех наблюдений агрегата.

2.1. *Однородный агрегат*. Предположим, что все звезды данного агрегата обладают одинаковым свойством стохастической непрерывной и стационарной изменчивости блеска вокруг некоторого среднего значения своей яркости (модель "однородного" агрегата). В агрегате могут присутствовать или проецироваться также звезды постоянного блеска. Сначала делаются два "снимка" данного агрегата с разницей в несколько месяцев, а затем, через несколько лет, повторяется такая же процедура получения снимков (рис.1).

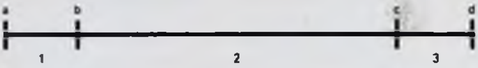

Рис.1. Временная схема четырех наблюдений.

При этом получаются три временных интервала наблюдений: [a,b], [b,c] и [c,d] с четырьмя снимками исследуемого агрегата звезд. Первый интервал наблюдений представлен двумя пластинками "a" и "b", второй - "b" и "c", третий - "c" и "d". Временной интервал [a,b] берется длительностью в несколько месяцев с тем расчетом, чтобы звезда в момент "b" уже успела "забыть" свое состояние в момент "a", т.е. чтобы эти два значения блеска звезды можно было считать случайными. А величина временого интервала [b,c] должна быть существенно длиннее, чем [a,b] и [c,d] уже в несколько лет, чтобы события во временном отрезке [a,b] можно было считать независимыми от событий временного отрезка [c,d]. Вероятность изменения блеска звезды на величину $\geq \Delta m$ в первом и третьем временных интервалах обозначим через p (эти временные интервалы по вероятности изменения блеска звезд равноценны, поскольку изменчивость блеска звезды считается непрерывным, стационарным и случайным процессом), а во втором интервале - через ϕ. Сравним полученные четыре пластинки. Число звезд, показавших изменение блеска в i-ом интервале наблюдений обозначим через n_i, а тех звезд, блеск которых менялся последовательно в двух интервалах i и j - через n_{ij}, при этом i, j могут принимать значения из набора 1, 2, 3. Если же изменение блеска зарегистрировано во всех трех интервалах, то число этих звезд обозначим через n_{123}. Искомое общее число неправильных переменных в агрегате обозначим через N. Первый и третий интервалы, очевидно, в статистическом смысле эквивалентны, т.е. математические ожидания величин n_1 и n_3 одинаковые. Поскольку далее вместо математических ожиданий будут применяться значения самих реализаций, то целесообразно вместо n_1 и n_3 взять их осредненные значения $\bar{n}_1 = \bar{n}_3 = (n_1 + n_3)/2$. То же самое относится и к двум совмещенным событиям изменения блеска звезд одновременно в интервалах "1" и "2", а также их статистическим эквивалентам в "2" и "3" - т.е. $\bar{n}_{12} = \bar{n}_{23} = (n_{12} + n_{23})/2$.

Результаты сравнения между собой четырех независимых событий в трех интервалах времени "1", "2", "3" очевидно запишутся в виде:

$$\begin{gathered} \bar{n}_1 = Np, \quad n_{13} = \bar{n}_1 p = Np^2, \quad \bar{n}_{12} = \bar{n}_1 \phi, \\ n_2 = N\phi, \quad \bar{n}_{23} = n_2 p, \quad n_{123} = \bar{n}_{12} p. \end{gathered} \tag{1}$$

Отсюда непосредственно следуют три выражения, определяющие искомую величину

$$N = \frac{\bar{n}_1^2}{n_{13}} = \frac{\bar{n}_1 n_2}{\bar{n}_{12}} = \frac{\bar{n}_1 \bar{n}_{12}}{n_{123}}. \tag{2}$$

Если учитывать относительное богатство сделанных отсчетов, то значения первых двух оценок будут иметь больший статистический вес, чем значение третьей оценки, поскольку $n_i \geq n_{ij} \geq n_{123}$, поэтому в качестве среднего целесообразно брать их некоторое взвешенное значение:

$$N = A\left(\frac{\bar{n}_1^2}{n_{13}} + \frac{\bar{n}_1 n_2}{\bar{n}_{12}}\right)\Big/2 + (1-A)\frac{\bar{n}_1 \bar{n}_{12}}{n_{123}}, \tag{3}$$

где $2/3 < A < 1$.

2.2. *Неоднородный агрегат*. Выше мы исходили из предположения, что в заданном интервале времени все звезды агрегата обладают одной и той же вероятностью изменчивости блеска $\geq \Delta m$. Однако важно выяснить значимость полученного результата (3), когда сделанное предположение не справедливо, т.е. когда в звездном агрегате присутствуют группы с разными вероятностями изменчивости блеска $\geq \Delta m$ в одном и том же интервале времени (модель "неоднородного" агрегата). Покажем, что, если звездный агрегат, в указанном выше смысле, не однороден, то сделанная простая оценка общего числа неправильных переменных является лишь нижним пределом их реального числа. Действительно, если агрегат состоит из n групп неправильно переменных звезд, которые в первом и третьем временных интервалах в каждой i-й группе ($i = 1, 2, ..., n$) показали изменение блеска $\geq \Delta m$ с вероятностями $\phi_i(\Delta m)$, то обозначая через N_i число звезд в каждой из этих групп, для полного числа членов в этом неоднородном агрегате будем иметь

$$N^* = \sum_{i=1}^{s} N_i\,, \tag{4}$$

а для наблюдаемого числа звезд, показывающих изменение блеска в интервале "1" и в обоих интервалах "1", "3", получим соответственно

$$n_1 = \sum_{i=1}^{s} N_i\,\phi_i \quad \text{и} \quad n_{13} = \sum_{i=1}^{s} N_i(\phi_i)^2\,. \tag{5}$$

Вводя теперь вероятность принадлежности звезды к i-й группе

$$f_i = \frac{N_i}{N^*}, \quad \text{при этом} \quad \sum_{i=1}^{s} f_i = 1, \tag{6}$$

находим

$$n_1 = N^* \sum_{i=1}^{s} \phi_i\, f_i\,, \quad n_{13} = N^* \sum_{i=1}^{s} (\phi_i)^2 f_i\,. \tag{7}$$

Сопоставляя результаты однородного и неоднородного агрегатов, получаем

$$N = \frac{n_1^2}{n_{13}} = N^* \left(\sum_{i=1}^{s} \phi_i\, f_i \right)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{s} (\phi_i)^2 f_i\,, \tag{8}$$

т.е. $N = kN^*$, где принято обозначение

$$k = \left(\sum_{i=1}^{s} \phi_i\, f_i \right)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{s} (\phi_i)^2 f_i\,. \tag{9}$$

С помощью неравенства Шварца

$$\left(\sum_{i=1}^{s} u_i v_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{s} u_i^2 \right)\left(\sum_{i=1}^{s} v_i^2 \right), \tag{10}$$

и подстановок: $u_i = \sqrt{f_i}$ и $v_i = \phi_i \sqrt{f_i}$, а также учитывая, что $\sum_{i=1}^{s} f_i = 1$, находим оценку

$$k \le 1, \quad N^* \ge N\,, \tag{11}$$

что и требовалось доказать. Действительно, из формулы (11) следует, что реальное число неправильно переменных звезд N^* в агрегате, когда его члены обладают различной активностью изменчивости блеска, будет больше, чем то, что дается статистической оценкой N, в предположении однородного агрегата, т.е. когда всем его членам приписываются одинаковые статистические характеристики неправильной изменчивости блеска.

3. ***Задача определения функции светимости и "дифференциальной" функции (или плотности) распределения блеска неправильных переменных в агрегате.*** Пусть имеются результаты детальной фотометрии двух снимков агрегата, сделанных с интервалом в несколько лет,

чтобы зарегистрированные таким образом два физических состояния каждой звезды - члена агрегата, можно было считать независимыми событиями. Обозначим через $b(m,m')$ число звезд, которые на первом снимке имели звездную величину m', а на втором - m. Предположим, что все переменные звезды в агрегате имеют одинаковую плотность вероятности $\varphi(\Delta m)$ отклонения $\Delta m = m - \overline{m}$ блеска от среднего значения $\overline{m}$. Примем также, что в агрегате имеется или на него проецируется некоторая доля звезд постоянного блеска. Если обозначить через $B(\overline{m})$ число переменных звезд, имеющих средний по бесконечно длительному периоду времени блеск $\overline{m}$, то результат двух указанных выше наблюдений нетрудно представить в виде уравнения

$$b(m,m') = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\overline{m})\varphi(m-\overline{m})\varphi(m'-\overline{m})d\overline{m}, \quad m \neq m'. \tag{12}$$

Действительно, звезды, имеющие на первой пластинке величину m', это те звезды, блеск которых в момент первой регистрации был отклонен от своего среднего значения $\overline{m}$ на величину $\Delta m' = m' - \overline{m}$, а при второй регистрации - на величину $\Delta m = m - \overline{m}$. Поскольку между двумя снимками достаточно большой (несколько лет) временной интервал, то вероятность совместного появления указанных двух независимых событий (m,m') выражается умножением их вероятностей. Далее, умножением полученного результата на $B(\overline{m})$, т.е. на первоначальное число участников этого события, учитывается доля звезд, имеющих среднюю звездную величину $\overline{m}$. Интегрированием по данному параметру учитываются все члены агрегата. Однако сюда не включены звезды, которые на обеих пластинках показали одно и то же значение блеска $m = m'$, их число обозначим через $b|_{m=m'} = A(m)$. Среди последних, очевидно, есть звезды, которые вовсе не являются переменными, обозначим их число через $a(m)$. Число указанных переменных звезд, случайным образом показывающих на обеих пластинках совпадающие значения блеска m, очевидно будет $\int_{-\infty}^{+\infty} B(\overline{m})\varphi^2(m-\overline{m})d\overline{m}$. В итоге получаем

$$A(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\overline{m})\varphi^2(m-\overline{m})d\overline{m} + a(m). \tag{13}$$

Результаты фотометрии лишь одной пластинки будут выражаться уравнением

$$b_0(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\overline{m})\varphi(m-\overline{m})d\overline{m} + a(m), \tag{14}$$

которое следует из уравнения (12) с учетом того, что $b_0(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(m,m')dm'$. Под $a(m)$ понимается число звезд постоянного блеска. Условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$. Соотношение (14) следует также непосредственно из физических соображений. Таким образом задача сводится к определению величин $B(\overline{m})$ и $\varphi(\Delta m)$ при известном $b(m,m')$, при этом функция светимости $a(m)$ звезд постоянного блеска в агрегате также является неизвестной. Система уравнений

(12)-(13) достаточно специфична - является переопределенной системой нелинейных интегральных уравнений первого рода типа свертки. Переопределенность заключается в том, что подлежат определению три неизвестные функции: $B(\overline{m})$, $\varphi(\Delta m)$, $a(m)$ лишь одной переменной, посредством знания одной функции, но уже двух переменных $b(m,m')$. Вследствие этого ее решение, очевидно, будет включать лишь различные интегралы заданной из наблюдений функции $b(m,m')$. Трудность же заключается в математически некорректном характере задачи, поскольку относительно двух искомых функций $B(\overline{m})$ и $\varphi(\Delta m)$ соотношения (12)-(13) (в частности, также (14)) являются уравнениями первого рода (указанные функции выступают в них лишь под знаком интеграла). Некоторым упрощающим фактором является принадлежность полученных уравнений к типу свертки, поскольку с помощью интегрального преобразования Фурье их можно привести к алгебраическим функциональным уравнениям относительно образов Фурье искомых функций. Однако при этом остается типичная для таких ситуаций трудность выполнения обратного преобразования Фурье.

Весьма примечательно, что два предположения, сделанные при выводе уравнений (12)-(13), позволяют существенно упростить рассматриваемую обратную задачу. Первое из них заключается в том, что представление переменности блеска изучаемых звезд в виде стационарного непрерывного случайного процесса позволяет считать очередность указанных выше двух наблюдений лишь условной. Следовательно функция $b(m,m')$ должна быть симметричной (что следует также из (12)), однако при каждой практической реализации, естественно, будут отклонения от симметрии, обусловленные лишь ограниченностью статистики. Исходя из этого следует заданную функцию заранее симметризовать обычным образом. Второе предположение касается того, что величина $b(m,m')$ при значениях $m=m'$ терпит скачок $a(m)$ за счет наличия в агрегате звезд постоянного блеска или вследствие проектирования на наблюдаемое поле агрегата. Последние не являются членами ансамбля исследуемых неправильных переменных, поэтому целесообразно их исключить из наших уравнений путем, например, линейного "выравнивания матрицы" $b(m,m')$ на диагонале $m=m'$, приписыванием "диагональным элементам" новые усредненные по двум ближайшим соседям $b_{sim}(m,m+\Delta)$ и $b_{sim}(m,m-\Delta)$ значения. Тогда симметризованная и выровненная указанным образом, полученная из наблюдений, функция b_{sim} будет иметь вид:

$$\begin{cases} g(m,m') = b_{sim}(m,m') = [b(m,m') + b(m',m)]/2, & m \neq m' \\ \overline{g}(m) = [b_{sim}(m,m+\Delta) + b_{sim}(m,m-\Delta)]/2, & \overline{g}(m) = b_{sim}\big|_{m=m'} \end{cases} \tag{15}$$

В итоге вместо (12) и (13) для произвольных значений m и m' задача окончательно сводится к решению уравнения

$$g(m,m')=\int_{-\infty}^{+\infty}B(\overline{m})\varphi(m-\overline{m})\varphi(m'-\overline{m})d\,\overline{m}\,. \tag{16}$$

Из этого уравнения вытекают, по крайней мере, три способа его решения: *первый способ* - получение замкнутого аналога "недоопределенной" системы (13)-(14), при этом функция светимости звезд постоянного блеска находится уже непосредственно - без решения каких-либо уравнений, а *второй* и *третий* способы связаны с операцией применения интегрального преобразования Фурье.

3.1. *Замкнутая система для определения* $B(\overline{m})$ *и* $\varphi(m-\overline{m})$. *Определение функции* $a(m)$. Записывая уравнение (16) для значений $m=m'$ и интегрируя по переменной m', вместо уравнений (13), (14), получаем замкнутую систему:

$$\begin{cases}\overline{g}(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}B(\overline{m})\varphi^2(m-\overline{m})d\,\overline{m}\\ g_0(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}B(\overline{m})\varphi(m-\overline{m})d\,\overline{m}\,,\end{cases} \tag{17}$$

где принято обозначение

$$g_0(m)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(m,m')d\,m'. \tag{18}$$

Решение системы (17) условно назовем *первым* способом решения задачи (16). Анализ этой системы выходит за рамки данной работы. Укажем лишь, что для ее численного решения можно обратиться к богатому арсеналу прикладных регуляризационных методов решения интегральных уравнений первого рода типа свертки (см., например, [12], гл. 4). Посредством сравнения (13)-(14) с (17) нетрудно заметить, что нахождение неизвестной функции светимости $a(m)$ звезд постоянного блеска, после выполнения операций (15), осуществляется сразу двумя простыми способами

$$a(m)=A(m)-\overline{g}(m)=b_0(m)-g_0(m).$$

В качестве конечного результата естественно брать их осредненное значение

$$a(m)=\{[A(m)+b_0(m)]-[\overline{g}(m)+g_0(m)]\}/2\,. \tag{19}$$

3.2. *Фурье-образы искомых функций*. Дальнейший анализ общего соотношения (16) дает возможность, помимо системы (17), развить еще две теперь уже численно-аналитические методики нахождения искомых функций $B(\overline{m})$ и $\varphi(\Delta m)$. Действительно, применяя двойное преобразование Фурье к уравнению (16), получим функциональное алгебраическое соотношие

$$\overline{\overline{g}}(s,s')=\overline{B}(s+s')\overline{\varphi}(s)\overline{\varphi}(s'), \tag{20}$$

где Фурье-образы исходных функций обозначены посредством:

$$\overline{F}(s,s') = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(m,m') e^{i(ms+m's')} dm\,dm', \quad \overline{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(m) e^{ims} dm. \tag{21}$$

Принимая в соотношении (20) $s' = 0$, получим

$$\overline{\overline{g}}(s,0) = \overline{B}(s)\overline{\varphi}(s)\overline{\varphi}(0), \tag{22}$$

при этом нетрудно убедиться, что:

$$\overline{\varphi}(0) = 1, \quad \overline{\overline{g}}(s,0) = \overline{g}_0(s), \quad \overline{B}(0) = \overline{\overline{g}}(0,0) = g_{00} = N, \tag{23}$$

где N - полное число переменных звезд в агрегате, а для моментов функций приняты обозначения:

$$F_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^j F(x,y)\,dy, \quad F_{jk} = \iint_{-\infty}^{+\infty} x^j y^k F(x,y)\,dx\,dy, \quad j,k = 0,1.$$

Из (22) и (23) находим

$$\overline{\varphi}(s) = \frac{\overline{g}_0(s)}{\overline{B}(s)}, \tag{24}$$

подстановка которого в (20) приведет нас к симметричному функциональному уравнению

$$\overline{B}(s+s') = Q(s,s')\overline{B}(s)\overline{B}(s'), \tag{25}$$

где ядро имеет вид

$$Q(s,s') = \frac{\overline{\overline{g}}(s,s')}{\overline{\overline{g}}(s,0)\overline{\overline{g}}(s',0)} = \frac{\overline{\overline{g}}(s,s')}{\overline{g}_0(s)\overline{g}_0(s')}. \tag{26}$$

При этом справедливы соотношения:

$$Q(s,s') = Q(s',s), \quad Q(s,0) = \frac{1}{\overline{B}(0)} = \frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{N}. \tag{27}$$

Из функционального уравнения (25) следуют *второй* и *третий* способы поиска решения уравнения (16). Действительно, соотношение (25) позволяет построить Фурье-образ $\overline{B}(s)$ искомой функции светимости $B(m)$ неправильных переменных рекуррентным образом

$$\overline{B}[(i+1)\Delta] = Q(i\Delta,\Delta)\overline{B}[i\Delta]\overline{B}[\Delta], \quad i = 1,2,3,\ldots \tag{28}$$

наращивая шаг, если известно его значение на некотором исходном шаге Δ. В качестве исходного можно брать, например, небольшой шаг, равный $|\Delta| = 10^{-25}$, тогда, воспользовавшись приближением

$$\overline{B}(\Delta) \cong \overline{B}(0) = N, \tag{29}$$

можно последовательно вычислить все значения $\overline{B}(s)$ с увеличением текущего значения аргумента постоянным шагом Δ до желаемого конечного значения. При необходимости более быструю процедуру наращивания можно выполнить посредством использования, например, формулы удвоения, полученной из

(25) при $s=s'$

$$\overline{B}\left(2^{i+1}\Delta\right)=Q\left(2^{i}\Delta,2^{i}\Delta\right)\left[\overline{B}\left(2^{i}\Delta\right)\right]^{2},\quad i=0,1,2,3,... \tag{30}$$

Здесь уже на каждом последующем этапе рекуррентного наращивания аргумента имеет место процедура удвоения численного значения предыдущего шага. Примечательно, что на любом этапе расчета, исходя из конкретных целей, схемы (28) и (30) можно произвольным образом чередовать. После вычисления $\overline{B}(s)$ величина $\overline{\varphi}(s)$ находится по формуле (24).

Третий способ нахождения $B(\overline{m})$ и $\varphi(m-\overline{m})$ заключается в аналитическом построении явных форм их искомых образов $\overline{B}(s)$ и $\overline{\varphi}(s)$. Действительно, с помощью функционального уравнения (25) легко получить также дифференциальное уравнение. Полагая в нем значение переменной s' бесконечно малым и равным $\Delta\rightarrow 0$, имеем

$$\overline{B}(s+\Delta)=Q(s,\Delta)\overline{B}(s)\overline{B}(\Delta), \tag{31}$$

а затем, выполняя разложение по этому малому параметру в ряд Тейлора с сохранением лишь членов первой степени малости, получим соотношение

$$\overline{B}(s)+\frac{d\overline{B}}{ds}\Delta=\left\{Q(s,0)+\left[\frac{\partial Q(s,s')}{\partial s'}\right]_{s'=0}\Delta\right\}\overline{B}(s)\left[\overline{B}(0)+\left(\frac{d\overline{B}}{ds}\right)_{s=0}\Delta\right]+O\left(\Delta^{2}\right). \tag{32}$$

Выполняя здесь необходимые сокращения с учетом (27), получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d\overline{B}(s)}{ds}=\left[Nq(s)+\frac{\alpha}{N}\right]\overline{B}(s),\quad \alpha=\left(\frac{d\overline{B}}{ds}\right)_{s=0}, \tag{33}$$

в котором фигурируют величины:

$$q(s)=\left[\frac{\partial Q(s,s')}{\partial s'}\right]_{s'=0}=\frac{\gamma(s)}{N\overline{g}_{0}(s)}-\frac{\gamma(0)}{N^{2}},\quad \gamma(s)=\left[\frac{\partial \bar{\bar{b}}(s,s')}{\partial s'}\right]_{s'=0}=i\overline{g}_{1}(s). \tag{34}$$

Производя в (33) соответствующее интегрирование с учетом (23) и (34), получим

$$\overline{B}(s)=Ne^{N\phi(s)+\frac{\alpha}{N}s}, \tag{35}$$

где принято обозначение

$$\phi(s)=\int_{0}^{s}q(x)dx=\frac{i}{N}\left[k(s)-\frac{g_{01}}{N}s\right], \tag{36}$$

при этом:

$$k(s)=\int_{0}^{s}\frac{\overline{g}_{1}(x)}{\overline{g}_{0}(x)}dx. \tag{37}$$

Из выражений (35), (36) и (24) окончательно получим явную форму искомых образов Фурье:

$$\overline{B}(s)=Ne^{\left[b(s)-\frac{\overline{B}_0}{N}s\right]\frac{\alpha}{N}s}, \qquad (38)$$

$$\overline{\varphi}(s)=\frac{\overline{B}_0(s)}{N}e^{-\left[b(s)-\frac{\overline{B}_0}{N}s\right]\frac{\alpha}{N}s}. \qquad (39)$$

Подстановка полученного решения (38) в исходное дифференциальное уравнение (33) превращает его в тождество.

4. *Обсуждение полученных решений и видение дальнейших исследований.* Хотя и аналитическое решение (38) удовлетворяет дифференциальному уравнению (33), но здесь, вообще говоря, комплексный, инфинитезимальный (см. вторую из формул (33)) параметр α остается неопределенным. Более того, полученное решение дифференциального уравнения (33) должно удовлетворять также первоначальному функциональному уравнению (25). В связи с этим, проявляются еще два обстоятельства: во-первых, из (25) следует, что, если некоторая функция $\overline{B}_0(s)$ удовлетворяет данному уравнению, то функция

$$\overline{B}(s)=\overline{B}_0(s)e^{ics} \qquad (40)$$

также является его решением. Легко видеть, что найденный Фурье-образ искомой функции светимости неправильных переменных агрегата определяется с точностью до постоянного экспоненциального множителя. Отсюда следует, что для самой искомой функции

$$B(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ims}\overline{B}(s)ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(m-c)s}\overline{B}_0(s)ds=\overline{B}_0(m-c) \qquad (41)$$

мы имеем лишь форму функциональной зависимости без ее "калибровки" по отношению к координатным осям. Используя (24) и (40), нетрудно видеть, что для плотности вероятности функции распределения изменения блеска аналогично (41) имеет место неопределенность

$$\varphi(\Delta m)=\varphi_0(\Delta m+c). \qquad (42)$$

Выполнение указанных калибровок выходит за рамки данной работы. Для этой цели требуется дополнительное специальное исследование, лучше на основе численного моделирования "виртуальной наблюдаемой функции" $b(m,m')$ по некоторым заранее заданным конкретным модельным функциям $B(\overline{m})$ и $\varphi(m-\overline{m})$, а затем тестирование приведенных выше методик на восстановление исходных модельных функций по значениям заданной функции $b(m,m')$. Такое исследование раскроет особенности решения приведенной обратной задачи как по сравнению реальных возможностей приведенных методик относительно друг друга, так и по выяснению условий однозначности и определения точности восстановления искомых величин в зависимости от богатства заданного "из наблюдений" статистического ансамбля. Сюда включен также вопрос калибровки восстановленных кривых по отношению координатных осей. Физической основой выбора модельных функций, очевидно, могут служить детальные данные длительных индивидуальных наблюдений типичных представителей неправильных переменных звезд широко представленные в [4]. Второе обстоятельство заключается в том, что подстановка полученного решения (38) в функциональное уравнение (25) показывает, что заданная из наблюдений реальная физическая картина изначально должна удовлетворять некоторому условию самосогласованности

$$e^{A(s+s')-A(s)-A(s')}=NQ(s,s'), \tag{43}$$

которое при частном значении $s'=0$ или $s=0$ (см., формулы (37) и (27)) удовлетворено автоматически.

5. *Заключение.* Перечислим полученные выше результаты:

- Предложена простая схема оценки полного числа неправильных переменных в однородном звездном агрегате посредством двух пар достаточно удаленных друг от друга наблюдений агрегата.

- Показано,что если агрегат не однороден по статистическим характеристикам своих членов, то оценка общего числа неправильных переменных в предположении однородного агрегата является лишь нижним пределом их реального числа.

- Сформулирована обратная задача статистического определения функции светимости для средних значений блеска и функции распределения яркости относительно среднего значения блеска неправильных переменных звезд на основе данных полной фотометрии двух достаточно удаленных друг от друга по времени наблюдений агрегата.

- Для решения указанной обратной задачи представлены три независимые методики: система двух интегральных уравнений относительно искомых функций, простая рекуррентная схема численного расчета образов Фурье искомых функций, а также аналитические замкнутые выражения для образов Фурье искомых величин.

- Показано,что функция светимости звезд постоянного блеска, проецированных или присутствующих в исследуемом агрегате, элементарным образом выражается через наблюдаемые характеристики агрегата.

Выражаю свою искреннюю признательность коллегам: профессору А.Г.Никогосяну и А.А.Акопяну за многочисленные обсуждения, ценные замечания и помощь во время работы над данной статьей.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: hovpik@gmail.com hovpik@bao.sci.am

THE INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION OF THE TOTAL NUMBER, LUMINOSITY FUNCTION AND CHARACTERISTICS OF THE BRIGHTNESS VARIABILITY OF T Tau TYPE STARS IN STELLAR AGGREGATES

H.V.PIKICHYAN

The paper demonstrates the opportunity of estimation of the total number of irregular variable stars in stellar aggregates on the base of the results of four observations made far apart from each other. We formulated an inverse problem which allows restoring the luminosity function of the aggregate with use of the averaged brightness of its members. By assuming that the stellar variation is a stationary and continuous random process, we treated a problem of finding the distribution function of brightness variability of stars. The original information requires the detailed photometry of stars on two rather distant in time "pictures" of the aggregate.

Key words: *inverse problem: stellar aggregates: statistics: irregular variable stars: T Tau type stars*

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А.Амбарцумян*, В сб.: Звезды, туманности, галактики, Труды. симпозиума, посвящ. 60-летию акад.В.А.Амбарцумяна (Бюракан,16-19 сент. 1968г.), Ереван, Изд.АН АрмССР, 283-292, 1969.
2. *В.А.Амбарцумян, Л.В.Мирзоян, Э.С.Парсамян и др.*, Астрофизика, 6, 7, 1970, (Astrophysics. 6, 1,1970).
3. *В.А.Амбарцумян*, Астрофизика, 6, 31, 1970, (Astrophysics, 6, 11, 1970).
4. *Ф.И.Лукацкая*, Изменения блеска и цвета нестационарных звезд, К., Наукова думка, 1977.
5. *К.Гофмейстер, Г.Рихтер, В.Венцель*, Переменные звезды, М., Наука, 1990.
6. *П.Н.Холопов*, Звездные скопления, М., Наука, 1981.
7. *Л.В.Мирзоян*, Нестационарность и эволюция звезд, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1981.
8. *Г.А.Гурзадян*, Звездные вспышки: физика, космогония, М., Наука, 1985.
9. *О.В.Пикичян*, О вероятностной картине, о возможности оценки общего числа и о функции светимости звезд типа Т Тельца в звездных агрегатах, Дипломная работа, ЕГУ, Ереван, 1972, 30с.

10. *R.S.McCrea*, *B.J.T.Morgan*, Analysis of Capture-Recapture Data, (Chapman & Hall/CRC, Interdisciplinary Statistics Series) CRC Press Taylor & Francis Group, 2015, 302p.
11. Capture-Recapture Methods for the Social and Medical Sciences, Edited by Dankmar Böhning, Peter G.M. van der Heijden, John Bunge, (Chapman & Hall/CRC Interdisciplinary Statistics Series), CRC Press Taylor & Francis Group, 2018, 465p.
12. *А.Ф.Верлань*, *В.С.Сизиков*, Справочник по интегральным уравнениям: методы, алгоритмы, программы (Справочное пособие), К., Наукова думка, 1986, 544с.