

ОБ УСКОРЕННОМ РАСШИРЕНИИ РАННЕЙ И ПОЗДНЕЙ ВСЕЛЕННОЙ В РАМКАХ СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ. II

Р.М.АВАКЯН, Г.Г.АРУТЮНЯН

Поступила 29 мая 2017

Принята к печати 14 декабря 2017

В "эйнштейновском" представлении модифицированной теории Йордана описана космологическая динамика квазидеситтеровской модели методом качественной теории динамических систем. Получена инфляционная картина расширения в интервале изменения безразмерного параметра ускорения от единицы до нуля.

Ключевые слова: *космология; качественная эволюция; модифицированная гравитация*

1. *Введение.* Инфляционная парадигма обеспечивает естественный способ решения проблем плоскостности и горизонта в стандартной космологии, а также генерирует возмущения плотности, являющиеся источником для образования крупномасштабной структуры Вселенной. Как известно, одним из интересных объектов исследований, связанных с инфляцией ранней Вселенной, являются де-ситтеровские модели в присутствии скалярных полей. Тот факт, что предлагаемые космологические модели в итоге могут быть непосредственно проверены измерениями температурной анизотропии космического микроволнового фона (СМВ), стимулирует рассмотрение различных вариантов инфляционных процессов в рамках альтернативных теорий гравитации, в частности, скалярно-тензорных и $f(R)$ теориях [1].

2. *Модель и инфляционное решение.* В рамках модифицированной скалярно-тензорной теории Йордана [2], в ее эйнштейновском представлении рассматривается процесс экспоненциального расширения ранней Вселенной с помощью качественных методов теории динамических систем. Рассматриваемая однородная и изотропная модель с минимально-связанным скалярным полем Φ в присутствии космологического скаляра $\phi(\Phi)$ описывается с помощью функционала действия [3]

$$S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{\phi_0}{16\pi} (R + 2\phi(\Phi)) + \frac{1}{2} \Phi^\alpha \Phi_\alpha \right] d^4x, \quad (1)$$

Где ς - безразмерный параметр теории Йордана, G - гравитационная постоянная, $\phi_0 = \frac{2(2+\varsigma)}{G(3+2\varsigma)}$, $\Phi_\alpha = \frac{\phi_\alpha}{\phi} \sqrt{\phi_0 \frac{(3+2\varsigma)}{16\pi}} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha}$ - связь потенциала скалярного поля Φ в "эйнштейновском" представлении с потенциалом ϕ в собственном представлении теории Йордана [4].

Уравнения поля представлены в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (2)$$

где все величины зависят только от времени

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}H + V_E'(\Phi) = 0, \quad (3)$$

$$3H^2 = 8\pi G \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V_E(\Phi) \right), \quad (4)$$

$$2\dot{H} = -8\pi G \dot{\Phi}^2. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения $H = \dot{a}/a$, $V_E(\Phi) = \varphi(\Phi)/(8\pi G)$; точкой обозначена производная по времени, а штрихом - производная по скалярному полю Φ . Исключив H из системы (3)-(5) и вводя безразмерные величины $x = \Phi/\Phi_0$, $\tau = t/t_0$ (t_0 - положительная константа с размерностью времени), получаем уравнения автономной динамической системы в виде [5,6]

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\Phi_0 \sqrt{12\pi G} y (y^2 + 2V(x))^{1/2} - V'(x), \quad (7)$$

где фигурирует безразмерная потенциальная энергия $V(x) = (t_0/\Phi_0)^2 V_E(\Phi_0 x)$. При этом параметр Хаббла определяется как

$$H^2 = \frac{\Phi_0^2}{t_0^2} \frac{4\pi G}{3} (y^2 + 2V(x)). \quad (8)$$

В результате (6)-(7) описывают космологическую динамику в "эйнштейновском" представлении теории Йордана в деситтеровском случае с пренебрежением обычного вещества ($P=0$, $\varepsilon=0$).

Используя метод качественной теории динамических систем, для исследования такой гравискалярной космологической модели в случае положительного $V(x)$ целесообразно ввести вспомогательную функцию $X(x)$ [7]

$$y = \sqrt{2V(x)} \operatorname{sh} X(x). \quad (9)$$

Тогда уравнение для фазовой траектории принимает вид

$$X'(x) + \frac{V'}{2V(x)} \operatorname{cth} X(x) + \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{2}} m_p^{-2} = 0, \quad (10)$$

где $m_p = \sqrt{\hbar c / (8\pi G)}$ - планковская масса.

В частном случае $X(x) = cx$,

$$c = -\Phi_0 \sqrt{12\pi G} - \frac{V'(x)}{2V(x)} \operatorname{cth}(cx). \quad (11)$$

Такой выбор $X(x)$ позволяет из (11) получить потенциал $V(x)$ в виде

$$V = V_0 (chcx)^{-2(1+(\Phi_0 \sqrt{12\pi G}/c))}. \quad (12)$$

Тогда

$$y = \frac{\sqrt{2V_0} \operatorname{th} cx}{(chcx)^{\Phi_0 \sqrt{12\pi G}/c}}. \quad (13)$$

Из (8), имея в виду (12) и (13), получаем

$$H = \frac{\Phi_0}{t_0} \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} (chcx)^{-\Phi_0 \sqrt{12\pi G}/c}. \quad (14)$$

Полевое уравнение (5) можно преобразовать к виду

$$q = 1 - \frac{3y^2}{y^2 + V(x)}, \quad (15)$$

что позволяет придти к выражению для безразмерного ускорения $q = \ddot{a}a/\dot{a}^2$

$$q = 1 - 3th^2 cx \quad (16)$$

независимо от выбора $V(x)$. Динамику рассматриваемого процесса можно представить, используя (16). Из (5) и (16) следует

$$\frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} = q - 1 = -3th^2 cx,$$

что удобно записать в виде

$$\frac{dH_0/H}{d\tau} = 3t_0 H_0 \left(1 - \frac{1}{ch^2 cx} \right). \quad (17)$$

Имея в виду (14)

$$chcx = \left(\frac{H_0}{H} \right)^{c/\Phi_0 \sqrt{12\pi G}}, \quad (18)$$

где $H_0 = \frac{\Phi_0}{t_0} \sqrt{\frac{V_0 8\pi G}{3}}$, уравнение (17) перепишем в виде

$$\int d(H_0/H) + \int \frac{d(H_0/H)}{\left(\frac{H_0}{H} \right)^{2c/\Phi_0 \sqrt{12\pi G}} - 1} = 3t_0 H_0 (\tau - \tau_0). \quad (19)$$

Космологический скаляр, по сути, является переменным аналогом Λ ,

поэтому из (11) в случае $V \approx (H_0/H)^n$ [8] получим

$$c = -\Phi_0 \sqrt{12\pi G} + \frac{n}{2} \Phi_0 \sqrt{12\pi G} \quad (20)$$

и, соответственно,

$$y = \frac{\sqrt{2V_0} \operatorname{th} cx}{(chcx)^{2/(n-2)}}, \quad (21)$$

$$H = \frac{H_0}{(chcx)^{2/(n-2)}}, \quad (22)$$

$$V = V_0 \cdot (chcx)^{2n/(n-2)}, \quad (23)$$

$$q = 1 - 3 \operatorname{th} \left(\frac{n-2}{2} \Phi_0 \sqrt{12\pi G} \cdot x \right). \quad (24)$$

В частном случае $n=4$, $c = \Phi_0 \sqrt{12\pi G}$. Система уравнений (6)-(7) при таком выборе потенциальной энергии скалярного поля принимает следующий вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = cy^2 \left(chtcx - \frac{2}{chtcx} \right), \quad (25)$$

а фазовая траектория

$$y = y_0 \frac{shcx}{chcx}, \quad (26)$$

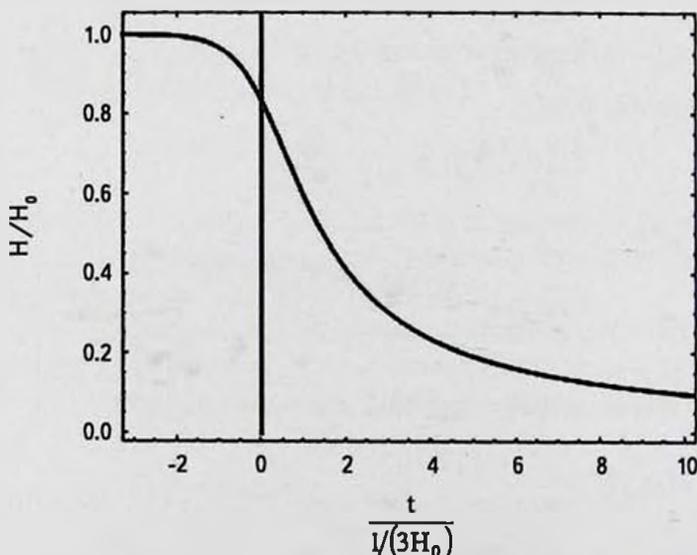


Рис.1. Временная зависимость параметра Хаббла.

где $y_0 = \frac{H_0 t_0}{\Phi_0} \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}$.

Введя обозначение $z = H_0/H$ и интегрируя (19) в пределах от $z \approx 1$ до z , получим решение

$$z-1 + \int \frac{dz}{z^2-1} = 3H_0(t-t_0), \tag{27}$$

асимптотическое поведение которого представлено на рис.1.

При этом безразмерное ускорение $q = \ddot{a}/\dot{a}^2 = \dot{H}/H^2 + 1$ оказывается равным [9]

$$q = 3 \left(\frac{H}{H_{DS}} \right) - 2 \tag{28}$$

и примерно при значении $H_c = \sqrt{2/3} H_0$ обращается в нуль. При анализе (28) имеем следующую асимптотику $t \rightarrow -\infty$, $H(t) \approx H_0(1 - \exp(6H_0(t-t_0)))$, т.е. параметр Хаббла экспоненциально быстро стремится к H_0 . На рис.1, изображающем временную зависимость $H(t)$, нулевое значение параметра q реализуется в момент $t=0$, где меняется поведение параметра масштабного фактора от экспоненциального характера к степенному ($t \rightarrow \infty$, $H(t) \rightarrow 1/3t$). Таким образом, в рамках рассматриваемой модели возникновение инфляционного процесса можно связать с асимптотическим квазидеситтеровским процессом при изменении параметра Хаббла от $H_0 = \text{const}$ до значения $\approx 0.82 H_0$, что соответствует интервалу положительного q от единицы до нуля, после чего ускорение становится отрицательным.

Подтверждением конца инфляции может служить поведение параметра Хаббла, следующее из (18)

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = q-1 = 3 \left[\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 - 1 \right], \tag{29}$$

поскольку при $q \rightarrow 0$ $|\dot{H}/H^2| = 3\Phi^2/(2V) \rightarrow 1$ нарушается один из критериев медленного скатывания. Что касается потенциала скалярного поля, то

$$V(q) = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \left(\frac{H}{H_0} \right)^4 = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \left(\frac{q+2}{3} \right)^2, \tag{30}$$

при $q=0$ равно $V = 3H_0^2/(2\pi G)$, что также отличается от оценки медленного скатывания [10].

Более детально поведение полученного решения представлено на рисунках, изображающих временное поведение $\Phi(t)$, $q(t)$ и $V(t)$.

На рис.2 представлен результат интегрирования уравнения $x(t)$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\sqrt{2V_0} thcx}{ch^2cx}, \quad (31)$$

имеющего вид

$$t = \frac{c}{\sqrt{2V_0}} (\tau - \tau_0) = \int \frac{ch^2cx}{shcx} dcx = chx + \ln \left| th \frac{cx}{2} \right|. \quad (32)$$

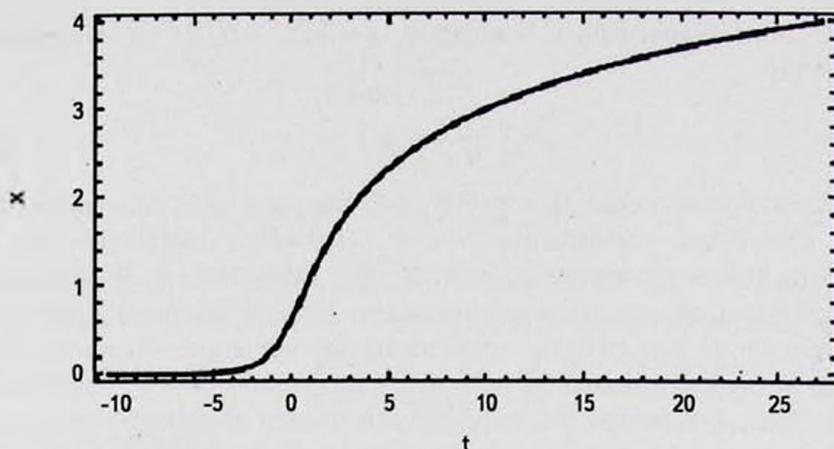


Рис.2. Временное поведение безразмерной переменной $x(t)$.

Приведенные зависимости от t позволяют подтвердить факт, что инфляция в такой модели соответствует интервалу изменения q от 1 до нуля. Рис.2 свидетельствует о том, что в процессе инфляции $\Phi \rightarrow 0$. Из уравнения фазовой траектории следует $\dot{\Phi} \rightarrow 0$, а из уравнения (5) $\dot{H} \rightarrow 0$, т.е. идет

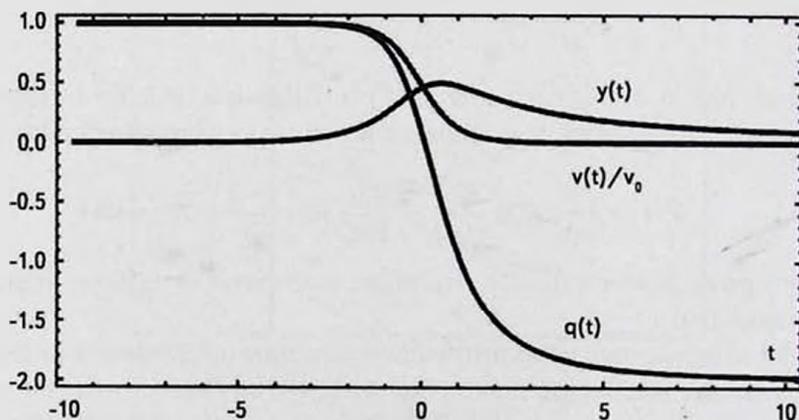


Рис.3. Временные зависимости безразмерных величин $V(t)/V_0$, $q(t)$, $x(t)$.

процесс $H \rightarrow \text{const}$ с максимально возможным расширением, соответствующим $q = 1$.

Таким образом, подтверждена традиционная интерпретация инфляции - механическое скатывание по профилю $V(t)$ при наличии зависящего от времени "хаббловского трения" с коэффициентом $3H$. Сравнение кривых позволяет сделать заключение о том, что инфляционный процесс заканчивается при устремлении потенциальной энергии к нулю, тогда как кинетическая энергия, напротив, начинает расти, что приводит к замедлению расширения Вселенной и, возможно, к горячей стадии ее расширения [10].

3. *Качественный анализ инфляционного процесса.* Для качественного анализа системы (6)-(7) воспользуемся известным приемом исследования кривых вблизи особых точек [11]. Введя обозначения автономных систем

$$\frac{dx}{d\tau} = y = P, \quad \frac{dy}{d\tau} = -cy[y^2 + 2V(x)]^{1/2} - V'(x) = Q, \quad (33)$$

используем известное характеристическое уравнение системы (33)

$$S^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) S + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0, \quad (34)$$

которое в нашем случае сводится к

$$S^2 + c\sqrt{2V(x_c)}S + V''(x_c) = 0. \quad (35)$$

В результате получим

$$S = -c\sqrt{\frac{V(x_c)}{2}} \pm \sqrt{\frac{c^2V(x_c)}{2} - V''(x_c)}. \quad (36)$$

Когда критической точкой в фазовом пространстве (x, y) является координата $(x_c, 0)$, где $V'(x_c) = 0$, а $V(x_c) \geq 0$ функция Хаббла является постоянной величиной

$$H_c^2 = \frac{8\pi G}{3} V_E(\Phi_c), \quad (37)$$

соответствующей пространству Минковского для $V_E(\Phi_c) = 0$ и пространству де-Ситтера с космологической постоянной $\Lambda = 8\pi G V_E(\Phi)$ в случае $V_E(\Phi_c) \neq 0$.

Для максимума потенциала $V''(x_c) < 0$ имеем критическую точку, соответствующую седлу с направлениями сепаратрисы $\vec{e}^a = (1, S_a) / \sqrt{1 + S_a^2}$. Из (23) в частном случае $n=4$ определяем производные потенциала $V(x)$

$$V'(x) = -5V_0c \frac{shcx}{(chcx)^5}, \quad (38)$$

$$V''(x) = -\frac{5V_0c}{ch^4cx} \left(1 - \frac{5sh^2cx}{ch^2cx} \right). \quad (39)$$

Из (39) критическая точка $x_c = 0$, а $V''(x_c) = -5V_0c/ch^4cx < 0$, следовательно в данной задаче имеем неустойчивое равновесие в седле. Для построения фазового портрета на бесконечности воспользуемся полярными координатами (ρ, θ) , которые определим как

$$x = \frac{\rho \cos \theta}{1 - \rho}, \quad y = \frac{\rho \sin \theta}{1 - \rho} \quad (40)$$

с $\theta \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, т.е. фазовое пространство проектируем на единичную окружность, а точки на бесконечности соответствуют $\rho = 1$. Динамическая система на бесконечности имеет 4 критические точки: $\theta = 0$, $\theta = \pi$ - устойчивые узлы, $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$ - неустойчивые узлы.

На рис.4 изображен фазовый портрет с седлом в качестве критической точки, к которой примыкают только две пары полутраекторий с определенными касательными. Таким образом, рассмотренное выше частное инфляционное

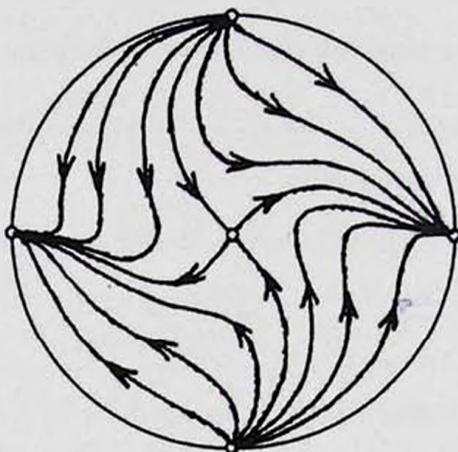


Рис.4. Фазовый портрет, спроектированный на единичный круг.

решение соответствует сепаратрисам, выходящим из седловой точки. Как видно из рис.3, эволюция начинается с седла, с максимума V , постоянного значения H и $q = 1$ при очень малом значении инфлатона ($x \approx 0$) и кинетической энергии ($\dot{x} \approx 0$). Затем идет убыль потенциальной и рост кинетической энергии, а также уменьшение q до нуля. К концу инфляции, по всей вероятности $q = 0$, потенциальная энергия значительно падает, а кинетическая достигает максимума. Согласно фазовому портрету возможны 4 качественно различные модели космологической эволюции, разделенные сепаратрисами седловой точки, соответствующей максимуму потенциальной энергии.

Для оценки числа e -фолдингов $N = \ln(a(\Phi_k)/a(\Phi))$ (Φ - поле инфлантона в процессе инфляции, Φ_k - его значение в конце инфляции) имеем

$$N_{tot}(\Phi) = \int_{\Phi}^{\Phi_k} H(\Phi) \frac{d\Phi}{\Phi}. \quad (41)$$

Из соотношения (5) $\dot{\Phi} = -H'/(4\pi G)$, так что в итоге

$$N_{tot}(\Phi) = -4\pi G \int_{\Phi}^{\Phi_k} \frac{H}{H'} d\Phi = \frac{1}{3} \ln \frac{sh \Phi_k}{sh \Phi}. \quad (42)$$

Таким образом, учитывая поведение Φ в процессе инфляции ($\dot{\Phi} \approx 0$), приходим к выводу, что необходимая величина N получается задолго до конца инфляции.

Что касается длительности рассматриваемого процесса, то из асимптотического поведения (27) можно получить

$$\ln \left(1 - \frac{H(t)}{H_0} \right) \approx 6H_0(t - t_0), \quad (43)$$

допуская, что конец инфляции определяется занулением ускорения $q=0$, а функция Хаббла $H \approx 0.82 H_0$. Поскольку предположительное значение функции Хаббла на стадии инфляции $10^{36} \text{ с}^{-1} < H_0 < 10^{42} \text{ с}^{-1}$, то из (43) получается общепринятое время инфляционного процесса.

4. Заключение. Построение инфляционной истории развития Вселенной - это задание начальных условий, обеспечивающих близкую к действительности эволюцию Вселенной. Предполагаемое наличие темной энергии - источника антигравитации, привело к использованию скалярно-тензорных теорий гравитации, в частности, модифицированной теории Йордана-Дикке-Бранса, построенной, как и ОТО, на основе математического аппарата дифференциальной геометрии, в которой существенную роль выполняет специфический космологический скаляр, являющийся по сути переменным аналогом "эйнштейновской" космологической постоянной Λ . В настоящее время Λ , введенная в теорию Эйнштейна, может быть квалифицирована как феномен глобального масштаба, проявляющий себя в динамике космологического расширения. Λ связывают с антигравитацией, которая имеет место только в рамках масштабов, где реально наблюдается регулярное космологическое расширение по закону Хаббла. Этот факт и соображения из физики микромира позволяют предположить наличие функциональной связи космологической постоянной Λ с параметром Хаббла. В основу модели инфляционного развития рассматриваемой задачи положена зависимость космологического скаляра от различных степеней параметра Хаббла. Используется "эйнштейновское" представление теории Йордана, рассматривается де-ситтеровский случай пренебрежения обычным веществом, а космологический

скаляр играет роль потенциальной энергии инфлантона.

Система гравитационных уравнений для такой модели может быть записана в виде системы уравнений автономной динамической системы, что позволяет использовать метод качественной теории динамических систем.

Полученные результаты наглядно показывают наличие асимптотического инфляционного процесса, продолжительность и число e -фолдингов которого соответствуют общепринятым значениям. Эволюция инфляционного процесса начинается с максимума потенциала инфлантона, что соответствует постоянному значению параметра Хаббла H_0 , и $q = 1$ при малых значениях инфлантона и кинетической энергии. Далее идет убыль потенциальной и рост кинетической энергии до максимального значения при $q = 0$. Таким образом, инфляционный процесс характеризуется интервалом изменения q от единицы до нуля, после чего начинается горячая стадия и замедление расширения Вселенной.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета по науке МОН РА в рамках совместного русско-армянского исследовательского проекта 15РФ-009.

Кафедра теоретической физики им. Г.С.Саакяна, ЕГУ, Армения,
e-mail: rolavag@ysu.am haghohar@ysu.am

ON THE ACCELERATED EXPANSION OF THE EARLY AND LATE STAGES OF UNIVERSE IN THE FRAMEWORK OF SCALAR-TENSOR THEORY OF GRAVITY. II

R.M.AVAGYAN, G.H.HARUTYUNYAN

The dynamics of the quasi de Sitter model in the Einstein representation of the modified Jordan theory is described by using the methods of qualitative theory of dynamical systems. The inflationary picture of the expansion is obtained in the range of the dimensionless parameter of the acceleration from zero to one.

Key words: *Cosmology: Qualitative evolution: Modified gravity*

ЛИТЕРАТУРА

1. *A.A.Starobinski*, Phys. Lett. B., **117**, 175, 1982.
2. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян*, *Астрофизика*, **48**, 455, 2005, (*Astrophysics*, **48**, 381, 2005).
3. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян*, *Астрофизика*, **48**, 633, 2005, (*Astrophysics*, **48**, 532, 2005).
4. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян, А.В.Овсепян и др.*, *Астрофизика*, **57**, 327, 2014, (*Astrophysics*, **57**, 304, 2014).
5. *O.I.Bogoyavlensky*, *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Springer, Berlin, 1985.
6. *I.Wainwright, G.F.R.Ellis*, *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
7. *R.M.Avagyan, E.V.Chubaryan, G.H.Harutunyan et al.*, *Gen. Relativ. Gravit.*, **48**, 21, 1-21, 2016.
8. *S.Carneiro*, *Int. Mod. Phys.*, D **15**, 2241, 2006.
9. *Р.М.Авакян, Г.Г.Арутюнян, С.В.Сушков*, *Астрофизика*, **60**, 159, 2017, (*Astrophysics*, **60**, 142, 2017).
10. *Д.С.Горбунов, В.А.Рубаков*, *Введение в теорию ранней Вселенной*, М., 2006.
11. *A.A.Coley*, *Dynamical Systems and Cosmology*, Kluwer Academic Publishers, Pordrecht, 2003.

